

**IDENTIFICAÇÃO DO MODELO LOTKA-VOLTERRA NA  
MODELAGEM DE UM SISTEMA LAGARTA- INIMIGO NATURAL**

**Marát M. Ráfikov**

**DEFIMEC - UNIJUI**

98700-000, c.p. 560, Universidade de Ijuí - RS

e-mail: rafikov@brunijui

**Maria Cristina P. de Araújo**

**DBQ - UNIJUI**

## IDENTIFICAÇÃO DO MODELO LOTKA-VOLTERRA NA MODELAGEM DE UM SISTEMA LAGARTA- INIMIGO NATURAL

Marat M. Rafikov

DEFIMEC - UNIJUI

98700-000, c.p. 560, Universidade de Ijuí - RS

e-mail: rafikov@brunijui

Maria Cristina P. de Araújo

DBQ - UNIJUI

### 1. Introdução.

Um dos principais prejuízos à produtividade da soja é o ocasionado pelo ataque de pragas. A incidência de pragas aumenta a cada ano quando estas não são controladas convenientemente. A realização do controle de populações das pragas através da aplicação de inseticidas prejudica às condições ecológicas da região. Observações indicam que, possivelmente, mais da metade de todas as aplicações de inseticidas em soja não são necessárias (Tonet, 1976).

Uma maneira adequada de diminuir a incidência de pragas, sem causar efeito nocivo às condições ecológicas da região, permitindo a ocorrência de inimigos naturais que mantêm as populações abaixo do nível econômico de danos, é através do manejo integrado de pragas ou do controle biológico. A lagarta da soja Anticarsia gemmatilis é o inseto mais comumente encontrado nas lavouras de soja, atacando a área foliar da cultura. As lagartas mede-palmo da Subfamília Plusiinae que ocorrem nas principais regiões produtoras de soja, são consideradas de segunda magnitude, ou pragas secundárias. Mas estudos publicados (Silva, 1987) demonstraram que as populações de lagartas da Subfamília Plusiinae foram praticamente iguais às da lagarta da soja Anticarsia gemmatilis. Com isso sentiu-se a necessidade de estudar e modelar as interações entre as lagartas e os seus inimigos naturais: predadores, parasitas e doenças.

A Modelagem Matemática é um dos métodos efetivos da pesquisa de interações entre pragas e seus inimigos. Os modelos matemáticos ajudam a revelar as regularidades do desenvolvimento de tais sistemas, permitem fazer o prognóstico do estado do ecossistema e apoiam a tomada de decisões sobre controle biológico.

O modelo presa-predador foi estabelecido e analisado independentemente por Lotka e Volterra, por volta de 1925 e tem a forma do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $x$  é a população de pragas (por exemplo, a lagarta da soja) e  $y$  é a população dos seus inimigos naturais;  $a, \alpha, b, \beta$  são constantes positivas, sendo  $\alpha$  a taxa de crescimento das presas,  $b$  a taxa de mortalidade dos inimigos naturais e  $\alpha, \beta$  os coeficientes que caracterizam a interação entre as duas espécies.

### 2. Métodos de identificação do modelo

Um método da identificação do modelo Lotka-Volterra num caso particular, quando  $\alpha = \beta$ , foi proposto pelos Bacalá e Benneton (1990). Aquele método se baseia no fato do modelo

possuir um Hamiltoniano integrável, o que permitiu formular o problema da identificação dos coeficientes do modelo (1) como um problema de regressão linear múltipla.

O Hamiltoniano das equações do modelo Lotka-Volterra (1), pode ser obtido por eliminação do tempo, fornecendo:

$$H = \beta(x + y) - b \ln y - a \ln x \quad (2)$$

Dividindo (2) por  $\beta$  e rearranjando:

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + H \quad (3)$$

recaímos num problema de regressão linear múltipla na variável  $Y = (x + y)$  versus  $X_1 = \ln x$  e  $X_2 = \ln y$ , sendo as equações que ajustam aos dados usando mínimos quadrados.

Na equação da regressão (3) é designado:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a}{\beta}; \\ c_2 &= \frac{b}{\beta} \end{aligned} \quad (4)$$

De um modo geral  $\alpha \neq \beta$  não se pode usar a regressão (3) para identificação dos parâmetros do modelo (1).

Neste artigo, propomos os métodos de identificação dos parâmetros do modelo Lotka-Volterra (1) que se baseia numa propriedade muito importante do modelo (1): os valores médios de  $x$  e  $y$  ao longo de um período são os mesmos para todas as soluções, embora soluções diferentes tenham períodos distintos. (Bassanezi e Ferreira (1988)), ou seja,

$$\frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a}{\alpha} = \bar{y} \quad (5)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{b}{\beta} = \bar{x} \quad (6)$$

sendo os primeiros membros das equações (5) e (6) os valores médios de  $y$  e  $x$  ao longo de um período.

Esta propriedade pode ser usada para calcular os parâmetros  $\bar{x}, \bar{y}$  com base na estatística dada sobre populações de pragas e seus inimigos naturais ao longo do período  $T$ . Existem várias opções para calcular aproximadamente as integrais que existem no lado esquerdo das expressões (5), (6). A integral que existe no lado esquerdo da expressão (5):

$$\int_0^T y dt$$

sob ponto de vista geométrico é igual à área limitada por uma parte do gráfico da função  $y(t)$ , pelo eixo  $Ot$  e pelas ordenadas  $y(0)$  e  $y(T)$ .

Por exemplo, aproximando a área como a soma dos retângulos obtemos a fórmula seguinte:

$$\int_0^T y dt \cong \sum_{i=1}^{N-1} y_i \Delta t_i; \quad (7)$$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i;$$

onde  $N$  é o número de pontos estatísticos;  $y_i$  é o valor da função  $y$  medido no momento  $t_i$ ;  $t_1 = 0$ ,  $t_N = T$ .

Para a aproximação da área através da soma dos trapézios pode ser usada a fórmula:

$$\int_0^T y dt \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (y_i + y_{i+1}) \Delta t_i \quad (8)$$

As interpretações geométricas das fórmulas (7) e (8) são representadas na Figura 1

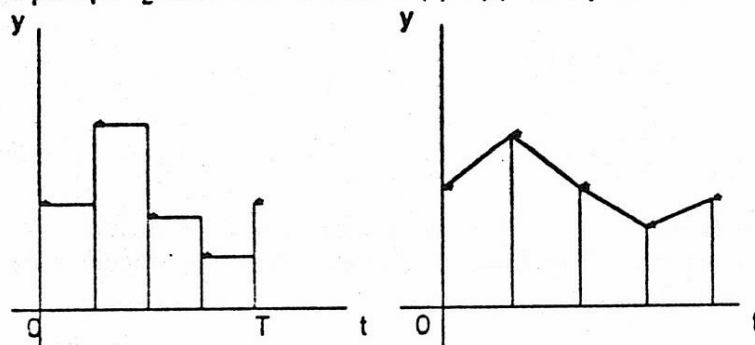


Figura 1. Interpretações geométricas das fórmulas (7) e (8).

Analogicamente podem ser escritas as fórmulas da aproximação da integral:

$$\int_0^T x dt$$

através da soma dos retângulos:

$$\int_0^T x dt \cong \sum_{i=1}^{N-1} x_i \Delta t_i \quad (9)$$

e a soma dos trapézios:

$$\int_0^T x dt \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i + x_{i+1}) \Delta t_i \quad (10)$$

Levando as expressões (7), (9) ou (8), (10) nas fórmulas (5) e (6), obtemos as seguintes para os cálculos dos parâmetros  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N-1} y_i \Delta t_i, \\ \bar{x} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N-1} x_i \Delta t_i\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{N-1} (y_i + y_{i+1}) \Delta t_i, \\ \bar{x} &= \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i + x_{i+1}) \Delta t_i\end{aligned}\quad (12)$$

Chamaremos as fórmulas (11) como Fórmulas de Retângulos e as (12) como Fórmulas de Trapézios.

A propósito, calculando os valores médios de  $x$  e  $y$  ao longo do período, podemos obter os valores estimativos de  $\bar{x}, \bar{y}$ , isto é:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x} \quad (13)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \bar{y} \quad (14)$$

Mas as fórmulas (13),(14) podem ser aplicadas para a identificação do modelo Lotka-Volterra se as medições foram feitas uniformemente. No caso contrário é melhor usar as fórmulas (11) ou (12).

Contudo, sabe-se a partir da linearização de (1) em torno do ponto crítico  $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$  que o mesmo ponto é um centro estável para o sistema linear. Isto significa que para pequenas flutuações em torno do ponto crítico  $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ , o tamanho das populações de presas e predadores varia periodicamente com o período:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}} \quad (15)$$

Temos também que a amplitude das oscilações da população de pragas é

$$A_1 = k \frac{b}{\beta} \quad (16)$$

e a amplitude das oscilações da população de inimigos naturais é

$$A_x = k \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (17)$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária.

Das fórmulas (5),(6),(15)-(17) obtemos os parâmetros do modelo  $a, b, \alpha, \beta$  e a constante  $k$ :

$$\begin{aligned} k &= \frac{A_x}{\bar{x}} \\ \alpha &= \frac{2 \cdot \bar{x}}{A_x T} \\ a &= \alpha^2 \\ b &= \frac{A_x^2 \alpha^2}{k^2 a} \\ \beta &= \frac{b}{\bar{x}} \end{aligned} \quad (18)$$

Os valores preliminares de  $T, A_x, A_y$  podem ser escolhidos da estatística. Durante a experiência computacional podem ser obtidos valores melhores sob ponto de vista de um critério que caracterize a aproximação das trajetórias temporais às estatísticas. Por exemplo, como critério pode servir o valor médio de módulos de desvios entre trajetórias e estatísticas:

$$S_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x(t_i) - x_i| \quad (19)$$

$$S_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y(t_i) - y_i| \quad (20)$$

A ordem dos cálculos para a identificação de coeficientes do modelo (1):

- 1- atribuir os valores preliminares a  $T, A_x, A_y$  de dados estatísticos ou das regularidades do desenvolvimento do ecossistema;
- 2- calcular os parâmetros  $\bar{x}, \bar{y}$  conforme (11) ou (12) ou (13),(14);
- 3- calcular os coeficientes  $\alpha, a, b, \beta$  através das fórmulas (18);
- 4- impôr condições iniciais  $x_0, y_0$  de estatística;
- 5- integrando o sistema (1), determinar as trajetórias temporais;
- 6- calcular os valores dos critérios (19), (20).
- 7- variando os valores de  $T, A_x, A_y, x_0, y_0$  executar a experiência computacional tentando obter valores mínimos de critérios.

### 3. Resultados

Os métodos da identificação propostos neste artigo foram aplicados às várias comunidades de lagartas, pragas da soja e seus inimigos naturais.

Tabela 1. Dados Estatísticos da incidência de lagartas da soja e seus predadores

T (tempo em dias)	0	6	22	29	34
X (número de lagartas)	35	16	114	81	32
Y (número de predadores)	15	9	8	22	24

Os dados da Tabela 1 foram amostrados pelo método do pano, na região de Ijuí, durante a safra 92/93.

Da análise da estatística é visto que o período de oscilações fica entre 34 e 41 dias, as amplitudes de oscilações do número de presas e predadores são 55 e 8, respectivamente. Então, os valores preliminares de  $T$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  foram escolhidos dentro destes números. Como resultado de experiências computacionais que foram feitas conforme o algoritmo acima referido, foram obtidos os seguintes valores destes parâmetros:  $T = 37$ ;  $A_x = 65$ ;  $A_y = 15$

A Tabela 2 resume os resultados da identificação dos coeficientes do modelo (1) através de vários métodos.

Tabela 2. Resultados da Identificação do Modelo Lotka-Volterra

Coeficientes e parâmetros do modelo.	Fórmulas (13) e (14)	Fórmula de Retângulos	Fórmula de Trapézios
$\bar{X}$	55,6	49,0882	63,4706
$\bar{Y}$	15,6	11,7647	12,5882
a	0,206467	0,181261	0,145946
$\alpha$	0,013235	0,015467	0,011594
b	0,139671	0,168055	0,197589
$\beta$	0,002512	0,003423	0,003113

Os gráficos que mostram a variação dos números de lagartas da soja e seus inimigos naturais são representados nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

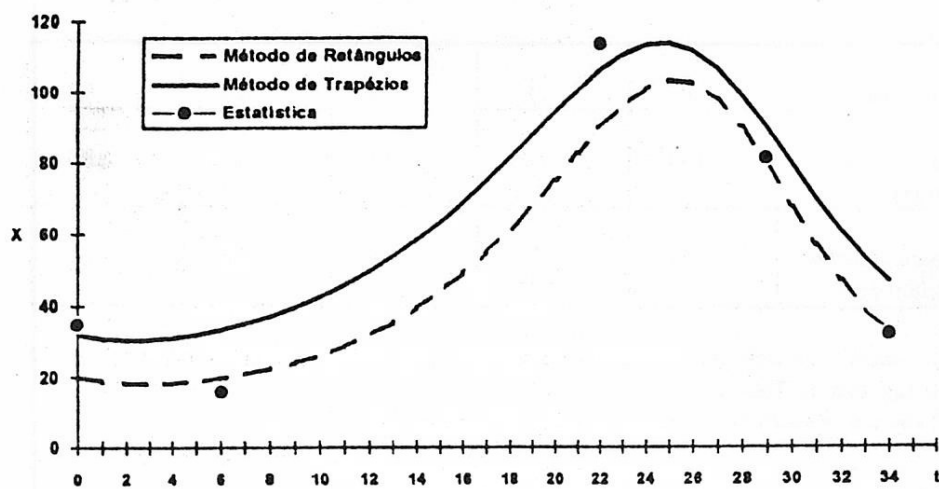


Figura 2. Variação do número de lagartas da soja (*A. gemmatalis*)

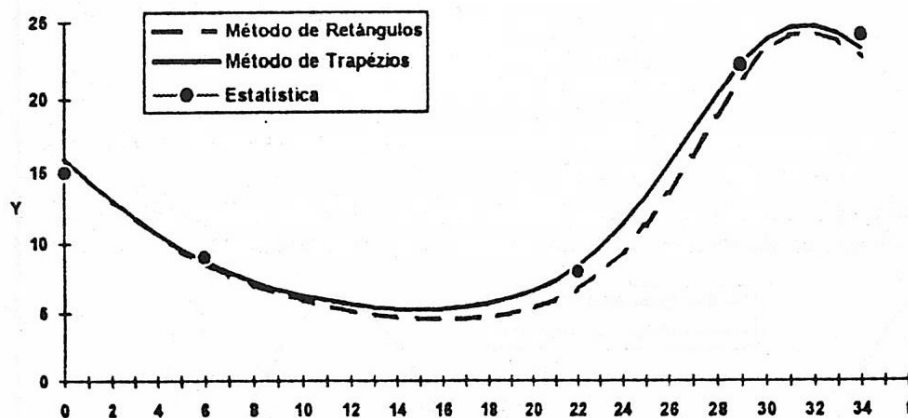


Figura 3. Variação do número de inimigos naturais da lagarta da soja (*A. gemmatalis*)

Em muitos casos não existe a oportunidade de obter diretamente a informação sobre o número de predadores no sistema modelado. Por exemplo, considerando interações entre as lagartas e parasitas é difícil saber o número de parasitas que atuam no sistema. Nestes casos é possível modelar o número de inimigos naturais indiretamente, medindo, por exemplo, o número de lagartas atingidas pelos predadores. Consideraremos a incidência da doença causada por *Entomophthora gammae* entre espécies de lagartas da Subfamília Plusiinae, como um sistema presa-predador, medindo o número de predadores através de número de lagartas contaminadas.

Na Tabela 3 são representados os dados estatísticos sobre a incidência de lagartas da Subfamília Plusiinae na região de Cruz Alta (Baiotto, 1988).



Tabela 3. Dados estatísticos da incidência de lagartas da Subfamília Plusiinae

T (tempo em dias)	0	8	15	23	37
x (número total de lagartas)	150	100	45	110	80
y (número de lagartas contaminadas)	47	37	18	22	31

A Tabela 4 resume os resultados da identificação dos coeficientes do modelo (1) com base na estatística da Tabela 3.

Tabela 4. Resultados da identificação do modelo (1)

Coeficientes e parâmetros	Fórmulas de Trapézios
$\bar{x}$	91,0185
$\bar{y}$	26,7963
a	0,249131
$\alpha$	0,009297
b	0,217372
$\beta$	0,002388

Os resultados da Tabela 4 foram calculados para seguintes valores dos parâmetros:  $T = 27$ ,  $A_x = 40$ ,  $A_y = 11$ ,  $x_0 = 150$ ,  $y_0 = 27$ .

Gráficos da variação do número total de lagartas e número de lagartas contaminadas da Subfamília Plusiinae são representados nas Figuras 4 e 5, respectivamente.

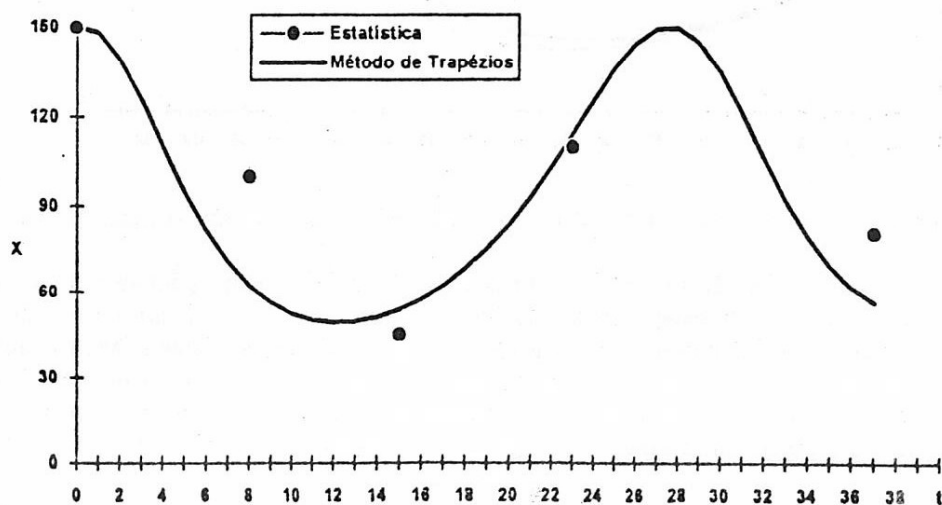


Figura 4. Variação do número total de lagartas da Subfamília Plusiinae

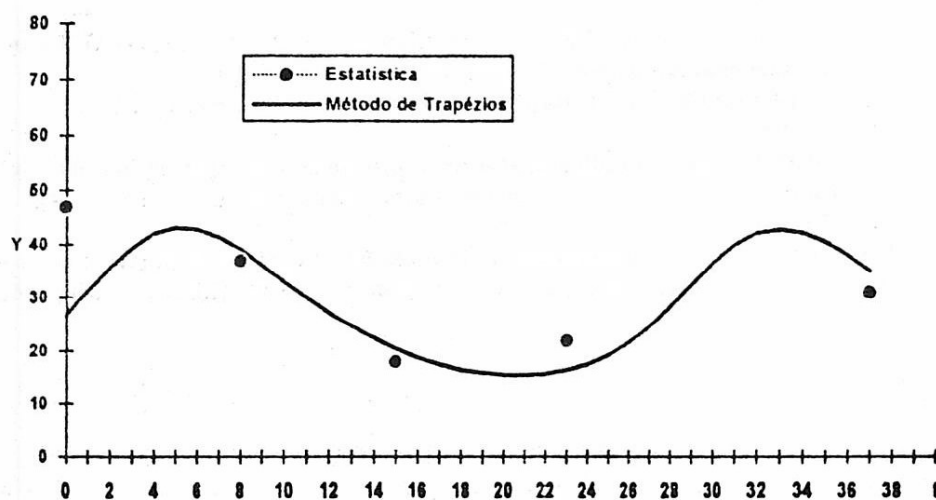


Figura 5. Variação do número de lagartas da Subfamília Plusiinae contaminadas por *Entomophthora gammae*

#### 4. Conclusões

Neste trabalho foi apresentada a aplicação de uma nova metodologia de identificação do modelo Lotka-Volterra. Apesar de esta metodologia não ter um fundamento teórico semelhante ao método de regressão múltipla, os resultados mostram que os métodos propostos podem ser aplicados em muitos casos impossíveis para outros métodos de identificação.

O método proposto é aplicável para pequenos números de medições estatísticas. Nestes casos é possível obter os valores estimativos dos parâmetros do modelo (1) que permitam, pelo menos, obter as tendências de interações dentro do sistema modelado. Por exemplo, levando em conta que para os sistemas considerados lagarta-inimigo natural o período, usualmente, é 20-40 dias, seria interessante fazer a identificação dos parâmetros do modelo (1) com base nos dados estatísticos do primeiro período para prognosticar interações entre as espécies nos próximos períodos e tomar as decisões sobre o controle biológico.

#### 5. Referências bibliográficas

BACCALÁ, LUIZ ANTÔNIO & BENNETON, JOCELYN FREITAS. Identificação do Modelo Lotka-Volterra na descrição da sensibilidade de Bactérias a

- Antibióticos.** Anais do VIII Congresso Brasileiro de Automática, Belém, SBA, 1990, pp. 1209 - 1213.
- BAIOTTO, CLÉIA RESANI.** *Frequência de Parasitas e Doenças em Populações Naturais de Plusia SPP em Soja.* Monografia de Pós-Graduação em Biologia "Latu Senu" da Universidade de Ijuí. Professora orientadora: Maria Cristina P.de Araújo. Ijuí, 1988, 32 p.
- BASSANEZI, RODNEY CARLOS & FERREIRA JR, WILSON CASTRO.** *Equações Diferenciais com Aplicações.* São Paulo: Harbra Ltda, 1988.
- NAKANO, OCTAVIO ET ALII.** *Entomologia Econômica.* Piracicaba, ESAL-Q, USP, 1981, 314 p.
- SILVA, MAURO T.B. da.** *Bioecologia, Dano e Controle de Rachiplusia nu na Cultura do Linho.* Rev. Centro de Ciências Rurais. Santa Maria, UFSM, 17(4), 1987, pp. 351-367.
- TONET, GABRIELA L.** *Levantamento e Manejo de Pragas da Soja (Glycine max (L) Merrill).* Ata IV Reunião Conjunta da Pesquisa da Soja RS/SC. Santa Maria, ago 1979.