Biomatemática ***33*** *(2023), 93–102* ***ISSN 1679-365X***
Uma publicação do grupo de Biomatemática IMECC – Unicamp

Incremento de funções polinomiais

Cristhian A. Bugs[1], Diego G. Nunes[2], Jamerson S. Marques[3]
Campus São Gabriel – UNIPAMPA, 97.300-900, São Gabriel/RS.

Resumo. A análise do incremento corrente no estudo de funções é muito importante para descrever o crescimento/decrescimento de variáveis dependentes de acordo com uma função $f(x)$. Analisar incrementos de variáveis é importante para auxiliar na tomada de decisões e para comparações entre condições que podem influenciar as respostas de determinados tipos de variáveis . Utilizando o conceito de derivada é possível analisar os incrementos de forma analítica para funções polinomiais quando o incremento é avaliado em um intervalo unitário ou até mesmo em um intervalo qualquer. Para qualquer função polinomial os resultados encontrados mostram que o incremento corrente unitário e o incremento corrente periódico podem ser obtidos por meio das derivadas de ordem superior da função. Dessa forma, as formas analíticas para os incrementos possibilitam uma modelagem mais precisa e direta dos incrementos para funções polinomiais.

Palavras-chave: *Modelagem matemática; derivação; formas analíticas.*

1. Introdução

Os resultados de experimentos envolvendo relações de dependência entre variáveis podem ser explicados pela análise de curvas ajustadas para descrever como uma variável depende de outra. As curvas ajustadas podem indicar as taxas de crescimento instantâneo para diferentes valores da variável independente a partir da derivada primeira da função.

Já as taxas de crescimento médio (incremento médio - IM) são dadas pela variação de $y(\Delta y)$ dividida pela variação de $x(\Delta x)$, enquanto o incremento corrente (IC) pode ser definido por meio da função $f(x)$ que descreve a relação

[1]cristhianbugs@unipampa.edu.br
[2]diegonunes@unipampa.edu.br
[3]jamersonmarques@unipampa.edu.br

entre a variável dependente y e a variável independente x, através da diferença $IC = \Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ dados os números reais x_1 e x_0. O incremento Δy também pode ser obtido por meio da derivada de $f(x)$ em x_0 de acordo com a expressão

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) \approx (df(x_0)/dx) \cdot \Delta x$$

mas uma boa aproximação depende do tamanho de $\Delta x = x_1 - x_0$ e da função $f(x)$ (Mortimer, 2013).

O incremento corrente e o incremento médio são importantes para o estudo de variáveis em determinadas áreas do conhecimento. Na área florestal a determinação do momento ótimo de colheita de uma floresta depende da determinação da idade no qual o incremento médio anual (IMA) de volume é igual ao incremento corrente anual (ICA), ou seja, no instante de tempo em que ocorre a intersecção entre as duas curvas de incrementos (Silva et al., 2022; Seo et al., 2023).

Os incrementos também foram utilizados para comparar os efeitos da temperatura e da quantidade de chuva sobre o incremento em massa do tronco $(Mg \cdot ha^{-1} \cdot ano^{-1})$ de diferentes genótipos de *Eucalyptus* plantados em regiões tropicais e subtropicais do Brasil (Binkley et al., 2020). Além disso, o incremento corrente em altura e área basal em períodos de 10 anos para a espécie *Nothofagus pumilio* foram utilizados para comparar o crescimento de árvores em regiões do Mediterrâneo e Patagônia nos Andes no sul do Chile (Piper e Fajardo, 2011).

Se por um lado as curvas de crescimento no meio florestal são descritas por curvas sigmoidais, polinômiais ou exponenciais por meio da determinação dos parâmetros dos modelos a partir dos dados observados (Pommerening e Muszta, 2016; Garcia, 2005), a modelagem do incremento depende da utilização de diferentes técnicas. O incremento anual de uma variável pode ser aproximada pela derivada primeira da função de crescimento (Pommerening e Muszta, 2016; Silva et al., 2022), a modelagem do incremento pode ser feita através da comparação de modelos ajustados aos dados observados de incremento (Ngugi et al., 2015) e existe também a possibilidade de obter os valores estimados dos incrementos de uma variável de forma direta a partir da curva de crescimento ajustada aos dados de crescimento.

Normalmente as curvas ajustadas para descrever o crescimento em relação ao peso, altura, diâmetro, área basal ou volume de plantas estão relacionadas com a existência de pontos de inflexão e de assíntotas horizontais para indicar diferentes taxas de crescimento e uma estabilização no crescimento (Seo et al., 2023; Pommerening e Muszta, 2016; Garcia, 2005). Nestas condições, muitos modelos sigmoidais(não lineares) são comparados para a escolha do modelo mais ajustado aos dados de crescimento (Seo et al., 2023; Zeide, 1993; Archontoulis e Miguez, 2015).

Se por um lado o uso de modelos sigmoidais para a modelagem do crescimento apresenta como principal vantagem a interpretação biológica dos parâmetros, o incremento da variável de interesse somente pode ser obtido por meio da derivada primeira da função ou de forma direta a partir da curva ajustada para modelar o crescimento. Não existe a possibilidade de dedução de um novo modelo para a modelagem do incremento de forma direta a partir da curva de crescimento dada por um modelo não linear.

Diferente do que acontece com a maior parte dos modelos não lineares utilizados para modelar o crescimento, os parâmetros de modelos polinomiais são desprovidos de interpretação biológica (Paine et al., 2012), mas é possível que polinômios tenham condições de fazer melhores estimativas quando comparados a outros modelos em algumas condições. Para a modelagem de volume de árvores e florestas foram utilizados modelos polinomais que dependem somente do diâmetro na altura do peito (dap) e modelos que dependem tanto do dap quanto da altura das árvores (Dhyani, 2021; Bermejoa et al., 2004).

Para modelar a produção de biomassa aérea de três espécies de *Eucalyptus* em diferentes regiões do Uruguai, foram testadas diferentes equações para a obtenção do melhor modelo. Para a região de Paysandú o volume depende somente do diâmetro na altura do peito, para a espécie *E. dunnii* é dado por uma curva polinomial do segundo grau (Resquin et al., 2018). Polinômios do terceiro grau foram utilizados para modelar o crescimento em volume (m^3/ha) de 10 espécies de árvores nativas na Costa Rica (Petita e Montagnini, 2004).

2. Objetivos

Considerando a importância da modelagem dos incrementos de determinadas variáveis, os objetivos deste trabalho foram:

- demonstrar formas analíticas para os incrementos de funções polinomiais;
- mostrar a dependência destes incrementos em relação às derivadas de ordem superior de uma forma dependente do grau do polinômio utilizado.

3. Preliminares

3.1. Conceitos

Definição 1 *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida em um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Dado um número real* $x \in I$, *definimos o incremento corrente unitário (ICU) de* $f(x)$, *para* x *fixado, pela diferença*

$$ICU(x) = f(x) - f(x-1)$$

De um modo mais geral, podemos pensar no incremento da função $f(x)$ para os valores reais x e α de acordo com a seguinte definição.

Definição 2 *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida em um intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Dados os números reais* $\alpha, x \in I$ *tal que* $0 \leq \alpha \leq 1$, *definimos o incremento corrente periódico (ICP) de* $f(x)$ *em* x *fixado e algum* α, *pela diferença*

$$ICP(x) = f(x) - f(x-\alpha)$$

É evidente que cada um dos incrementos definidos acima pode ser obtidos de forma direta por meio das diferenças, mas o maior desafio é obter de um modo geral expressões analíticas para todos incrementos independente da função $f(x)$. No caso de funções polinomiais, é possível verificar que estas diferenças estão diretamente relacionadas com as derivadas da função de uma forma dependente do grau do polinômio.

4. Resultados

4.1. Demonstração

De um modo geral, dado um polinônio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

podemos também obter expressões analíticas para ICU e ICP de uma forma dependente do grau do polinômio. Consideremos quatro lemas que serão utilizados para a obtenção de expressões analíticas para os incrementos.

Lema 1 *Dada uma função polinomial de grau* n, *então*

$$ICU = \sum_{i=1}^{n} a_i [x^i - (x-1)^i]$$

para x inteiro.

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} ICU(x) &= f(x) - f(x-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i (x-1)^i \\ &= [a_n x^n - a_n (x-1)^n] + ... + [a_1 x^1 - a_1 (x-1)^1] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ICU &= \sum_{i=1}^{n} [a_i x^i - a_i (x-1)^i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i [x^i - (x-1)^i] \end{aligned}$$

■

Lema 2 *Para qualquer número real x,*

$$x^n - (x-1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^{i+1}$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} (x-1)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i \\ &= \binom{n}{0} x^{n-0} (-1)^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x^n - (x-1)^n &= x^n - x^n - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^{i+1} \end{aligned}$$

■

Lema 3 *Seja* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$*, então*

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[\frac{f(x)^{(i)}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j+1}\right)a_i$$

Demonstração. De fato, mostremos por indução. Para $n = 1$ temos que $f(x) = a_1 x + a_0$. Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+1}[\frac{f'(x)}{1!}] = f'(x) = a_1$$

Ao mesmo tempo, temos que

$$\sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{1}\binom{1}{1}x^{1-1}(-1)^{1+1}\right)a_1 = x^0.(-1)^2.a_1 = a_1$$

Portanto, a equação é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos agora, que a equação é verdadeira para n de modo que para

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

temos

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[\frac{f^{(i)}(x)}{i!}] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j+1}\right)a_i$$

mostremos que a equação é verdadeira também para $n+1$. Sejam

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e

$$f_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Temos que

$$f_{n+1}^{(j)} - f_n^{(j)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)!}a_{n+1}x^{n+1-j}$$

Logo,

$$f_{n+1}^{(j)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)!}a_{n+1}x^{n+1-j} + f_n^{(j)}$$

Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}[\frac{f_{n+1}^{(i)}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!}a_{n+1}x^{n+1-i} + \frac{f_n^{(i)}}{i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!}a_{n+1}x^{n+1-i}\right) + \sum_{i=1}^{n+1}\left((-1)^{i+1}\frac{f_n^{(i)}}{i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!}a_{n+1}x^{n+1-i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i}\frac{f_n^{(i)}}{i!}\right)$$

visto que $f_n^{(n+1)} = 0$. Por hipótese de indução, temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\frac{f_n^{(i)}}{i!} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j+1}\right)a_i$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}[\frac{f_{n+1}^{(i)}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!}x^{n+1-i}\right)a_{n+1}+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j+1}\right)a_i$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}[\frac{f_{n+1}^{(i)}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j+1}\right)a_i$$

■

Lema 4 *Seja* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$*, então*

$$\sum_{i=1}^{n}[a_ix^i - a_i(x-1)^i] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[\frac{\frac{d^if(x)}{dx^i}}{i!}]$$

para qualquer número real x*.*

Demonstração. De fato, pelo 3 temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[\frac{\frac{d^if(x)}{dx^i}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j+1}\right)a_i$$

Mas pelo 2,

$$\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}(-1)^{j} = [x^i - (x-1)^i]$$

Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[\frac{\frac{d^i f(x)}{dx^i}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n}[x^i - (x-1)^i]a_i$$

■

Vejamos agora um resultado que também mostra a relação das derivadas de ordem superior de polinômios com a definição de incremento periódico.

Teorema 1 *Se $f(x)$ é uma função polinomial de grau n, então dados os números reais x, α,*

$$ICP(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\alpha^i[\frac{f^{(i)}(x)}{i!}]$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
ICP(x) &= f(x) - f(x-\alpha) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i[x^i - (x-\alpha)^i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i[x^i - (x-\alpha)^i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i[x^i - \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}\alpha^j(-1)^j] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}\alpha^j(-1)^{j+1}]
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\alpha^i[\frac{\frac{d^i f(x)}{dx^i}}{i!}] = \sum_{i=1}^{n} a_i[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}\alpha^j(-1)^{j+1}]$$

então podemos concluir que pela equação acima que

$$ICP(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\alpha^i[\frac{f^{(i)}(x)}{i!}]$$

■

Corolário 1 *Se $f(x)$ é uma função polinomial de grau n, então dados os números reais x, α,*

$$\frac{d(ICP(x))}{dx} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\alpha^i[\frac{f^{(i+1)}x}{i!}]$$

Este resultado permite encontrar o valor x com período α de maior incremento. Em outras palavras, é possível verificar se ICP(x) admite pontos críticos e, consequentemente, pontos extremos da função. Este resultado é importante para indicar a dinâmica do incremento da função $f(x)$ fixado um valor α.

5. Conclusões

Os resultados encontrados são importantes na obtenção de expressões analíticas para a determinação dos incrementos de funções polinomais. A relação dos incrementos com as derivadas de funções polinomiais permite a obtenção de forma direta dos incrementos e pode produzir resultados mais exatos e precisos em comparação com modelos probabilísticos.

Referências

Archontoulis, S. V. e Miguez, F. E. (2015). Nonlinear Regression Models and Applications in Agricultural Research. *Agronomy Journal*, 107(2):63–68.

Bermejoa, I., Canellasa, I., e Miguel, A. S. (2004). Growth and yield models for teak plantations in Costa Rica. *Forest Ecology and Management*, 189:97–110.

Binkley, D., Campoeb, O. C., Alvaresc, O. C., Carneirod, R. L., e Stape, J. L. (2020). Variation in whole-rotation yield among eucalyptus genotypes in response to water and heat stresses: The techs project. *Forest Ecology and Management*, 462:1–12.

Dhyani, R. (2021). Modelling tree growth for estimation and validation of stemm volume equations. *Amity Journal of Computational Sciences*, 5(1):94–101.

Garcia, O. (2005). Unifyng sigmoid univariate growth equations. *FBMIS*, 1:63–68.

Mortimer, R. G. (2013). *Mathematics for Physical Chemistry*. Academic Press.

Ngugi, M. R., Doley, D., Cant, M., e Botkin, D. B. (2015). Growth rates of eucalyptus and other australian native tree species derived from seven decades of growth monitoring. *J. For. Res.*, 26(4):811–826.

Paine, C. E. T., Marthews, T. R., Vogt, D. R., Purves, D., Rees, M., Hector, A., e Turnbul, L. A. (2012). How to fit nonlinear plant growth models and calculate growth rates: an update for ecologists. *Methods in Ecology and Evolution*, 3:245–256.

Petita, B. e Montagnini, F. (2004). Growth equations and rotation ages of ten native tree species in mixed and pure plantations in the humid neotropics. *Forest Ecology and Management*, 199:243–257.

Piper, F. I. e Fajardo, A. (2011). No evidence of carbon limitation with tree age and height in nothofagus pumilio under mediterranean and temperate climate conditions. *Annals of Botany*, 108:907–917.

Pommerening, A. e Muszta, A. (2016). Relative plant growth revisited: Towards a mathematical standardisation of separate approaches. *Ecological Modelling*, 320:383–392.

Resquin, F., Navarro-Cerrillo, R. M., Rachid-Casnati, C., Hirigoyen, A., Carrasco-Letelier, L., e Duque-Lazo, J. (2018). Allometry, growth and survival of three eucalyptus species (*Eucalyptus benthamii* maiden and cambage, e. *dunnii* maiden and e. *grandis* hill ex maiden) in high-density plantations in uruguay. *Forest*, 9(745):1–12.

Seo, Y., Lee, D., e Choi, J. (2023). Developing and comparing individual tree growth models of major coniferous species in south korea based on stem analysis data. *Forests*, 14(115):1–16.

Silva, J. W. L., Silva, J. A. A., in, e Tavares, J. A. (2022). Volumetric production of eucalyptus spp. clones under different spacing in a severe drought period in the semiarid region of pernambuco. *Floresta*, 52:150–158.

Zeide, B. (1993). Analysis of Growth Equations. *Forest Science*, 39(3):594–16.