

# Abordagem numérica para um problema Malthusiano e de decaimento com condição inicial intervalar via distribuição $J_{0.5}$

Pedro H. M. Zanineli<sup>1</sup>, Vinícius F. Wasques<sup>2</sup>

Ilum Escola de Ciência, C. N. Pesquisa em Energia e Materiais, 13.087-548,  
Campinas/SP.

Allan E. R. Andrade<sup>3</sup>

UFMS, 79.613-000, Três Lagoas/MS.

**Resumo.** Este trabalho apresenta um estudo numérico do modelo de Malthus e de decaimento a partir de condições iniciais intervalares. Para isso são considerados os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta, cujas operações são baseadas em aritméticas intervalares. Em particular, é considerada a aritmética interativa atrelada à conjunta  $J_{0.5}$ , a fim de explorar a propagação de incerteza ao longo do fenômeno. Algumas simulações são apresentadas para ilustrar a metodologia e resultados teóricos obtidos.

**Palavras-chave:** *Aritmética intervalar; equações diferenciais intervalares; iteratividade fuzzy.*

## 1. Introdução

Vários fenômenos da natureza podem ser descritos por ferramentas matemáticas, como equações diferenciais. Por exemplo, Malthus afirmou que uma população cresce proporcional a si mesma. A equação diferencial que modela esse problema é dada por  $x' = \lambda x$ , em que  $\lambda$  é a taxa de crescimento em uma situação sem limitação de espaço e alimentação.

---

<sup>1</sup>pedro.zanineli12@gmail.com

<sup>2</sup>vwasques@outlook.com - FAPESP n<sup>o</sup> 2023/03927-0

<sup>3</sup>allan.andrade@ufms.br

Por outro lado, um problema de decaimento é descrito por um modelo muito similar ao de Malthus, isto é,  $x' = -\mu x$ , sendo  $\mu$  a taxa de degradação química da partícula. Assim, equações diferenciais podem ser usadas para analisar como certos objetos evoluem ao longo do tempo. Abordagens como essa requerem informações, como taxas de crescimento e condição inicial.

No entanto, esses parâmetros nem sempre são descritos com precisão, uma vez que existem várias incertezas atreladas aos fenômenos. Nesse sentido, a Teoria de Conjuntos Fuzzy, que estende a Teoria Intervalar, pode ser utilizada como ferramenta para descrever tais fenômenos de uma forma mais realista. Por outro lado, resolver equações diferenciais não é uma tarefa simples, ainda mais quando incorporamos variáveis fuzzy ou intervalares (Barros et al., 2017).

Assim, métodos numéricos são úteis para estudar esse tipo de problema. Nesse sentido, é desejável que os métodos numéricos satisfaçam alguns requisitos, como a ordem em que o método é calculado, e que de fato aproxime a solução analítica do problema.

A soma usual (Minkowski) de intervalos possui a propriedade de comutatividade e associatividade, o que a torna consistente nesse sentido. Por outro lado, a soma entre dois intervalos produz um novo intervalo que é maior em tamanho do que os anteriores. Aqui, estamos nos referindo ao tamanho pela largura do intervalo. No contexto da Teoria de Conjuntos Fuzzy, quanto maior a largura, maior a incerteza. Com isso em mente, estamos interessados em outras aritméticas que tenham boas propriedades, como as mencionadas acima, e que possamos ter um melhor controle de suas larguras.

Diferentes tipos de soma entre números fuzzy (ou intervalos) foram propostos na literatura, mas nem todos satisfazem a propriedade associativa, por exemplo. Aqui, o foco será a soma interativa (Fullér e Majlender, 2004). A ideia de interatividade está relacionada a uma relação fuzzy chamada distribuição de possibilidade conjunta, que tem uma interpretação semelhante às distribuições na teoria da probabilidade.

Entre os diferentes tipos de soma interativa, discutiremos a soma  $+_{0.5}$  que está associada à distribuição  $J_{0.5}$  proposta em (Esmi et al., 2021) mostraram que o conjunto dos números fuzzy munido da soma  $+_{0.5}$  possui estrutura de semigrupo, e, portanto, satisfaz a propriedade associativa.

Além disso, exploraram algumas propriedades algébricas desse conjunto no contexto intervalar. Aqui, faremos um estudo numérico do problema populacional proposto por Malthus (Edelstein-Keshet, 2005), considerando uma

condição inicial de intervalo e como a incerteza propaga-se a longo prazo. Além disso, vamos também aplicar a metodologia para estudar o controle da incerteza de um decaimento a partir de uma condição inicial intervalar.

A seguir, apresentamos conceitos preliminares na teoria de conjuntos clássica e fuzzy para uma melhor compreensão do trabalho.

## 2. Preliminares

Os métodos de Euler e Runge-Kutta são ferramentas matemáticas para fornecer soluções numéricas para equações diferenciais ordinárias dadas na forma de um problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

O método numérico proposto por Euler é definido por

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n),$$

em que  $h$  é o tamanho de cada intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  e  $x_{n+1}$  é a aproximação de  $x(t)$  em  $t = t_{n+1}$ . Como uma extensão do método de Euler, o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Ruggiero e Lopes, 2000), é dado por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

com  $k_1 = f(t_n, x_n)$ ,  $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1)$ ,  $k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2)$  e  $k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3)$ .

### 2.1 Teoria de conjuntos fuzzy

Aqui a teoria dos conjuntos fuzzy será apresentada como uma extensão da teoria dos intervalos. É importante destacar que a teoria dos intervalos estuda a estrutura, propriedades e aplicações de elementos na forma de  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ . Um subconjunto fuzzy  $A$  de um universo  $X$  é definido por uma generalização da função característica  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ , ou seja, uma função  $\varphi_A : X \rightarrow [0, 1]$  chamada de função de pertinência.

Por exemplo, o intervalo  $[1, 2]$  pode ser definido pela função  $\chi_{[1,2]}$  que satisfaz  $\chi_{[1,2]}(x) = 1$ , se  $x \in [1, 2]$ , ou  $\chi_{[1,2]}(x) = 0$ , se  $x \notin [1, 2]$ . Por outro

lado,  $[1, 2]$  pode ser generalizado por um conjunto fuzzy trapezoidal  $A$ , como o definido por  $\varphi_A(x) = 1$ , se  $x \in [1, 2]$ ,  $\varphi_A(x) = x$ , se  $x \in [0, 1]$ ,  $\varphi_A(x) = 3 - x$ , se  $x \in [2, 3]$ , e  $\varphi_A(x) = 0$  caso contrário.

Para cada  $0 < \alpha \leq 1$ , o  $\alpha$ -corte de  $A$  é definido por

$$[A]^\alpha = \{u \in X : \varphi_A(u) \geq \alpha\},$$

e supondo que  $X$  é um espaço topológico, então o 0-corte de  $A$  é definido como  $[A]^0 = cl\{u \in X : \varphi_A(u) > 0\}$ , em que  $cl$  denota o fechamento de um subconjunto de  $X$  (Barros et al., 2017). A largura de um conjunto fuzzy é calculada pelo tamanho de seu 0-corte e quanto maior a largura, maior a incerteza que ele modela.

Na modelagem e aplicações, o conceito de um número fuzzy é considerado, uma vez que estende a definição de um número real. Um subconjunto fuzzy  $A$  de  $X$  é um número fuzzy se o espaço topológico é dado por  $X = \mathbb{R}$  e cada  $\alpha$ -corte de  $A$  é um intervalo não vazio, fechado e limitado com suporte limitado ( $\text{supp}A = \{u \in \mathbb{R} : \varphi_A(u) > 0\}$ ) (Esmi et al., 2021). A classe de números fuzzy é denotada por  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ . Em particular, a classe de números fuzzy com extremos dos  $\alpha$ -níveis contínuos, em relação a  $\alpha$ , é denotada por  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ .

No espaço dos números fuzzy, as operações aritméticas são definidas em termos dos princípios de extensão, como os princípios de extensão de Zadeh e sup- $J$ ,

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(z) &= \sup_{x \otimes y = z} \min\{A(x), B(y)\} \quad (\text{princípio de extensão de Zadeh}) \\ (A \otimes_J B)(z) &= \sup_{x \otimes y = z} J(A(x), B(y)) \quad (\text{princípio de extensão sup-}J), \end{aligned}$$

em que  $\otimes$  é uma operação aritmética e  $J$  é uma relação chamada distribuição de possibilidade conjunta (DPC). Lembre-se que  $J$  é uma DPC entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  se  $A(x) = \sup_{u \in \mathbb{R}} J(x, u)$  e  $B(y) = \sup_{v \in \mathbb{R}} J(v, y)$ , simultaneamente (Fullér e Majlender, 2004).

As operações aritméticas via extensões de Zadeh e sup- $J$  são chamadas de *aritmética padrão* (ou não interativa) e *aritmética interativa*, respectivamente. A principal diferença entre esses dois tipos de aritmética é que a extensão sup- $J$  produz resultados mais específicos do que a extensão de Zadeh, o que significa que  $A \otimes_J B$  tem largura menor ou igual à largura de  $A \otimes B$ . Para intervalos, a adição via extensão de Zadeh é dada por  $[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$ , o que é equivalente à adição de Minkowski (Moore et al., 2009). Por outro

lado, a adição via extensão sup- $J$  produz outros resultados; por exemplo, a distribuição  $J = J_0$  proposta por (Esmi et al., 2015), produz  $[\underline{a}, \bar{a}] +_{J_0} [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\underline{a} + \bar{b}, \underline{b} + \bar{a}), \max(\underline{a} + \bar{b}, \underline{b} + \bar{a})]$ . Por exemplo, seja  $A = [1, 2]$  e  $B = [3, 7]$ , então  $A + B = [1+3, 2+7] = [4, 9]$  e  $A +_{J_0} B = [\min(2+3, 1+7), \max(2+3, 1+7)] = [5, 8]$ . Note que  $\text{width}(A +_{J_0} B) = 3 \leq 5 = \text{width}(A + B)$ .

Operações aritméticas como  $\otimes_{J_0}$  são importantes porque permitem controlar o crescimento da largura em uma dinâmica temporal, ao contrário da aritmética padrão. O crescimento da largura significa uma propagação de incerteza, o que leva a inconsistências na modelagem. Outras aritméticas iterativas podem ser consideradas para evitar esse problema, como a família de DPCs proposta por Esmi et al. (2021), denotada por  $J_\gamma$ . A construção dessa família é muito elaborada, então aqui nos concentramos apenas na expressão da soma, obtida a partir do princípio de extensão sup- $J$ . A soma  $A +_\gamma B$  é fornecida no próximo teorema.

**Teorema 1** (Esmi et al., 2021) *Sejam  $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ , cujos  $\alpha$ -cortes são  $[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$  e  $[B]^\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ . Para cada  $\gamma \in [0, 1]$ , temos que os  $\alpha$ -cortes de  $A +_\gamma B$  são dados por*

$$[A +_\gamma B]^\alpha = [c_\alpha^-, c_\alpha^+] + \{\bar{a} + \bar{b}\} \quad (2.1)$$

com

$$c_\alpha^- = \inf_{\beta \geq \alpha} h_{(A+B)}^-(\beta, \gamma) \quad e \quad c_\alpha^+ = \sup_{\beta \geq \alpha} h_{(A+B)}^+(\beta, \gamma), \quad (2.2)$$

com

$$h_{(A+B)}^-(\beta, \gamma) = \min\{ (a^{(\bar{a})})_\beta^- + (b^{(\bar{b})})_\beta^+ + \gamma((b^{(\bar{b})})_\beta^- - (b^{(\bar{b})})_\beta^+), \\ (a^{(\bar{a})})_\beta^+ + (b^{(\bar{b})})_\beta^- + \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^- - (a^{(\bar{a})})_\beta^+), \\ \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^- + (b^{(\bar{b})})_\beta^-) \}$$

e

$$h_{(A+B)}^+(\beta, \gamma) = \max\{ (a^{(\bar{a})})_\beta^- + (b^{(\bar{b})})_\beta^+ + \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^+ - (a^{(\bar{a})})_\beta^-), \\ (a^{(\bar{a})})_\beta^+ + (b^{(\bar{b})})_\beta^- + \gamma((b^{(\bar{b})})_\beta^+ - (b^{(\bar{b})})_\beta^-), \quad , \text{ em que} \\ \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^+ + (b^{(\bar{b})})_\beta^+) \}$$

$(a^{(\bar{a})})_\beta^-$ ,  $(a^{(\bar{a})})_\beta^+$ ,  $(b^{(\bar{b})})_\beta^-$  e  $(b^{(\bar{b})})_\beta^+$  representam os extremos dos  $\alpha$ -cortes deslocados a partir dos pontos médios dos números fuzzy  $A$  e  $B$ , respectivamente, e os símbolos inf e sup representam os operadores ínfimo e supremo, respectivamente.

No contexto da teoria intervalar, um resultado similar pode ser obtido. Esse resultado é enunciado no teorema 2.

**Teorema 2** (Esmi et al., 2022) Sejam  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  e  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$  dois intervalos e  $\gamma \in [0, 1]$ . A soma interativa  $C = A +_{\gamma} B$  para qualquer  $\gamma \in [0, 1]$  é dada por  $C = [\underline{c}, \bar{c}]$ , tal que

$$\bar{c} = \max\{\bar{a} + \underline{b} + \gamma(\bar{b} - \underline{b}), \underline{a} + \bar{b} + \gamma(\bar{a} - \underline{a})\}$$

e

$$\underline{c} = \min\{\underline{a} + \bar{b} - \gamma(\bar{b} - \underline{b}), \bar{a} + \underline{b} - \gamma(\bar{a} - \underline{a})\}.$$

Por exemplo, sejam  $A = [1, 2]$  e  $B = [2, 5]$ . As somas interativas  $+_{\gamma}$  são dadas por  $A +_0 B = [4, 6]$ ,  $A +_{0.25} B = [3.75, 6.25]$ ,  $A +_{0.5} B = [3.5, 6.5]$ ,  $A +_{0.75} B = [3.25, 6.75]$  e  $A +_1 B = [3, 7]$ . Perceba que quanto maior o valor  $\gamma$ , maior o tamanho do intervalo. Nesse sentido, o parâmetro  $\gamma$  “mede” o nível de interatividade entre os intervalos, e, conseqüentemente, o tamanho do intervalo de resposta.

Este artigo foca em uma distribuição específica de possibilidade conjunta dessa família, a distribuição  $J_{0.5}$ , que será discutida na próxima seção. A partir de agora, a discussão será fornecida apenas para a classe de intervalos, denotada por  $\mathcal{I}$ .

### 3 Distribuição de Possibilidade Conjunta $J_{0.5}$

A distribuição de possibilidade conjunta  $J_{0.5}$  é definida por uma relação que restringe o domínio dos produtos cartesianos nos quais os elementos dos intervalos são associados. A representação gráfica dessa distribuição de possibilidade conjunta para intervalos é apresentada na figura 1.

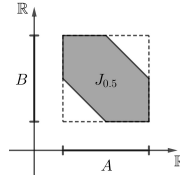


Figura 1: Representação da distribuição de possibilidade conjunta  $J_{0.5}$  para intervalos.

A soma entre números difusos interativos com base em  $J_{0.5}$  pode ser obtida a partir do teorema 2, aplicando  $\gamma = 0.5$ . A expressão de  $+_{0.5}$  é dada pelo seguinte corolário.

**Corolário 1** *Sejam  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  e  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$  dois intervalos. A soma interativa  $C = A +_{0.5} B$  é dada por  $C = [\underline{c}, \bar{c}]$ , com*

$$\underline{c} = \underline{a} + 0.5(\bar{b} + \underline{b}) \text{ e } \bar{c} = \bar{a} + 0.5(\bar{b} + \underline{b})$$

ou

$$\underline{c} = \underline{b} + 0.5(\bar{a} + \underline{a}) \text{ e } \bar{c} = \bar{b} + 0.5(\bar{a} + \underline{a}).$$

A partir do corolário acima, é possível estabelecer uma conexão entre a largura de  $A +_{0.5} B$  e seus operandos, que é enunciado no lema a seguir.

**Lemma 1** *(Wasques et al., 2023) Sejam  $A$  e  $B$  intervalos. Se  $\text{diam}(A) \geq \text{diam}(B)$ , então  $A +_{0.5} B = A + b$ , em que  $b$  é o ponto médio do intervalo  $B$ . Por outro lado, se  $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$ , então  $A +_{0.5} B = B + a$ , sendo  $a$  o ponto médio do intervalo  $A$ .*

Wasques et al. (2023) provaram que o conjunto  $(\mathcal{I}, +_{0.5})$  satisfaz a propriedade associativa, e portanto tem estrutura de semigrupo. Isso significa que podemos alterar a ordem de computação em métodos numéricos, o que não necessariamente ocorre em geral.

Aqui a principal propriedade desse semigrupo será explorada em métodos numéricos. Note que em métodos como Euler e Runge-Kutta, a associatividade é uma propriedade fundamental para garantir a consistência da solução numérica final, uma vez que o cálculo não pode depender da ordem em que é realizado. Na próxima seção, apresentamos uma aplicação dessa soma interativa em um modelo de crescimento populacional chamado problema Malthusiano e em modelo de decaimento.

## 4. Os modelos de Malthus e decaimento

Malthus propôs o primeiro modelo para estudar a dinâmica do crescimento populacional. As premissas do seu modelo são que a população cresce proporcionalmente a si mesma, levando à seguinte equação diferencial ordinária  $x' = \lambda x$ , sendo  $0 < \lambda \leq 1$  a taxa de crescimento. Portanto, a partir de uma informação sobre o valor inicial da população  $x(0) = x_0$ , a solução para esse problema é dada por  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ , o que é coerente com a hipótese estabelecida por Malthus.

No entanto, determinar com precisão o valor inicial  $x(0)$  nem sempre é simples. Assim, é mais razoável modelar  $x(0)$  por meio de intervalos ou

números fuzzy, a fim de considerar uma imprecisão em torno do valor inicial da população. Portanto, o problema malthusiano estudado aqui é definido por

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(0) = X_0 \in \mathcal{I} \end{cases},$$

tal que  $X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$  e  $0 < \lambda \leq 1$ .

Uma vez que analisado o crescimento, este será então comparado com o problema oposto, ou seja, o problema de decaimento. De maneira similar ao crescimento, o problema malthusiano de decrescimento considerando intervalos ou números fuzzy é definido como sendo

$$\begin{cases} x' = -\lambda x \\ x(0) = X_0 \in \mathcal{I} \end{cases},$$

tal que  $X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$  e  $0 < \lambda \leq 1$ .

Em termos do princípio da extensão de Zadeh (ou sup- $J$ ) para uma entrada, a solução intervalar para o problema de Malthus é dada por  $\hat{X}(t) = [\underline{x}_0 e^{\lambda t}, \overline{x}_0 e^{\lambda t}]$ , enquanto que a do decaimento se invertem os extremos da solução.

Aqui, será considerada uma metodologia em que se parte de métodos numéricos clássicos para aproximar soluções de equações diferenciais, em que  $X_n$  será dado por intervalos e a soma envolvida no método será estendida para a soma interativa  $+_{0.5}$ . A fim de apresentar as vantagens de  $+_{0.5}$ , a solução numérica via soma usual de intervalos também será fornecida.

## 5. Interpretação do problema

A proposta desenvolvida por Thomas Malthus definida como modelo de crescimento malthusiano refere-se ao crescimento de uma população a uma taxa proporcional a ela mesma. Para descrever uma população humana, por exemplo, é possível perceber que detém muitas limitações, mas, para um universo amostral mais isolado, com uma menor quantidade de variáveis, pode ser bastante útil. Por exemplo, é possível pensar na aplicação para uma cultura de bactérias que cresce isolada em um laboratório.

Para explorar o modelo de crescimento malthusiano e sua respectiva solução, é possível resolver numericamente por meio de diferentes métodos.



Para tanto, as soluções numéricas via método de Euler baseadas nas somas  $+_0$ ,  $+_{0.5}$  e a usual para o problema de crescimento são, respectivamente, dadas por

$$X_{n+1} = X_n +_0 h(\lambda X_n), \quad (5.3)$$

$$X_{n+1} = X_n +_{0.5} h(\lambda X_n) \text{ e} \quad (5.4)$$

$$X_{n+1} = X_n + h(\lambda X_n). \quad (5.5)$$

Já as soluções numéricas via método de Runge-Kutta baseadas nas somas  $+_0$ ,  $+_{0.5}$  e usual para o problema de decrescimento são, respectivamente, dadas por

$$X_{n+1} = X_n +_0 \frac{h}{6}(K_1 +_0 2K_2 +_0 2K_3 +_0 K_4), \quad (5.6)$$

com

$$\begin{aligned} K_1 &= \lambda X_n, \\ K_2 &= \lambda \left( X_n +_0 \frac{h}{2} K_1 \right), \\ K_3 &= \lambda \left( X_n +_0 \frac{h}{2} K_2 \right), \\ K_4 &= \lambda (X_n +_0 h K_3), \end{aligned}$$

$$X_{n+1} = X_n +_{0.5} \frac{h}{6}(K_1 +_{0.5} 2K_2 +_{0.5} 2K_3 +_{0.5} K_4), \quad (5.7)$$

em que

$$\begin{aligned} K_1 &= \lambda X_n, \\ K_2 &= \lambda \left( X_n +_{0.5} \frac{h}{2} K_1 \right), \\ K_3 &= \lambda \left( X_n +_{0.5} \frac{h}{2} K_2 \right), \\ K_4 &= \lambda (X_n +_{0.5} h K_3) \end{aligned}$$

e

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (5.8)$$

tal que

$$\begin{aligned} K_1 &= \lambda X_n, \\ K_2 &= \lambda \left( X_n + \frac{h}{2} K_1 \right), \\ K_3 &= \lambda \left( X_n + \frac{h}{2} K_2 \right), \\ K_4 &= \lambda (X_n + h K_3). \end{aligned}$$

## 6. Resultados e discussões

As soluções numéricas (5.3), (5.4) e (5.5) são representadas na figura 2 à esquerda, ao passo que o diâmetro das soluções dos intervalos possa ser observado à direita.

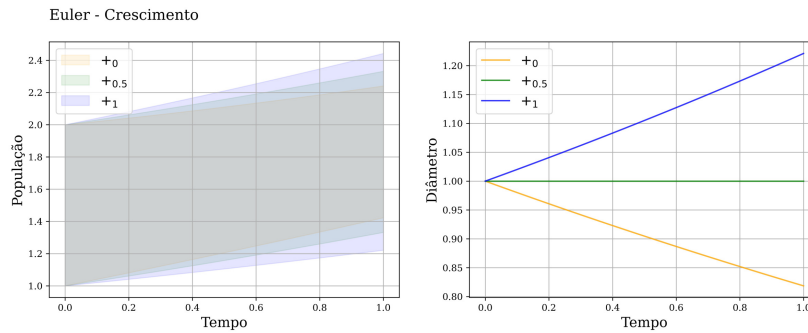


Figura 2: Solução numérica para o modelo malthusiano de crescimento (à esquerda). Diâmetro da solução em cada instante de tempo (à direita). Os parâmetros da simulação foram  $h = 0.01$ ,  $\lambda = 0.2$  e  $x_0 = [1, 2]$ .

Note que ambas as soluções têm o comportamento qualitativo da solução clássica proposta por Malthus, ou seja, a solução apresenta crescimento exponencial. A figura 2 para a soma usual revela que a largura da solução numérica aumenta indefinidamente, o que implica que a incerteza se propaga ao longo do tempo.

No entanto, a solução numérica via soma iterativa  $+_{0.5}$  possui diâmetro constante ao longo do tempo, o que mostra um controle da incerteza sobre o fenômeno. Por outro lado, a soma  $+_0$  faz com que a incerteza diminua ao longo do tempo, corroborando resultados teóricos Esmi et al. (2021).

Ainda mais, a figura 2 sugere que a solução intervalar via  $J_0$  está contida na solução via  $J_{0.5}$  que está contida na solução  $J_1$ . Isso ocorre devido ao fato de que  $J_0 \subset J_{0.5} \subset J_1$ , e portanto,

$$\sup_{x+\lambda hy=z} J_0(x, y) \subset \sup_{x+\lambda hy=z} J_{0.5}(x, y) \subset \sup_{x+\lambda hy=z} J_1(x, y),$$

e assim

$$X_n +_0 \lambda h X_n \subset X_n +_{0.5} \lambda h X_n \subset X_n +_1 \lambda h X_n,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como consequência temos que

$$\text{diam}(X_n +_0 \lambda h X_n) \leq \text{diam}(X_n +_{0.5} \lambda h X_n) \leq \text{diam}(X_n +_1 \lambda h X_n),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e portanto, o diâmetro da solução do modelo de Malthus via aritmética  $+_{0.5}$  está sempre limitada aos diâmetros da solução via  $+_0$  e soma usual. Mais que isso, pode-se mostrar que a solução via  $+_{0.5}$  possui diâmetro constante, já que

$$\begin{aligned} [\underline{X}_{n+1}, \overline{X}_{n+1}] &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] +_{0.5} \lambda h [\underline{X}_n, \overline{X}_n] \\ &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] +_{0.5} 0.5(\lambda h \underline{X}_n + \lambda h \overline{X}_n), \end{aligned}$$

já que  $\text{diam}(\lambda h [\underline{X}_n, \overline{X}_n]) \leq \text{diam}([\underline{X}_n, \overline{X}_n])$ . Isso significa que

$$\begin{aligned} \text{diam}(X_{n+1}) &= \overline{X}_{n+1} - \underline{X}_{n+1} \\ &= \overline{X}_n + 0.5(\lambda h \underline{X}_n + \lambda h \overline{X}_n) - (\underline{X}_n + 0.5(\lambda h \underline{X}_n + \lambda h \overline{X}_n)) \\ &= \overline{X}_n - \underline{X}_n \\ &= \text{diam}(X_n), \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é, o diâmetro da solução intervalar é constante.

Por outro lado, as soluções do problema de decaimento terão cálculo semelhante às soluções numéricas (5.3), (5.4) e (5.5), tendo como única diferença a oposição do sinal. O resultado pode ser conferido na figura 3, novamente com respectivos diâmetros expostos à direita.

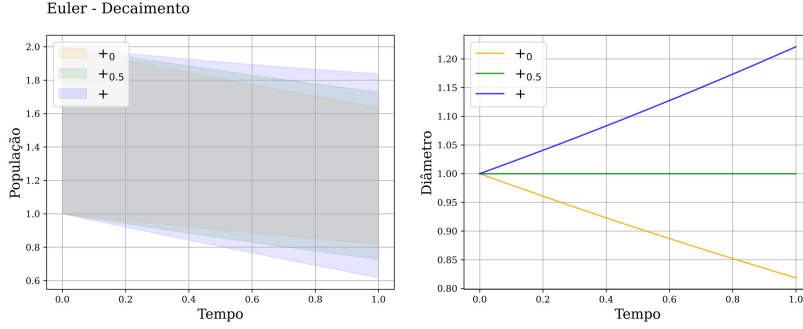


Figura 3: Solução numérica para o modelo de decaimento (à esquerda). Diâmetro da solução em cada instante de tempo (à direita). Os parâmetros da simulação foram  $h = 0.01$ ,  $\lambda = 0.2$  e  $x_0 = [1, 2]$ .

De modo similar ao caso de Malthus, podemos concluir que a solução via  $+_0$  está contida na solução via  $+_{0.5}$  que está contida na solução via soma usual. Além disso, também pode-se mostrar que a solução possui diâmetro constante na aritmética  $+_{0.5}$ . De fato,

$$\begin{aligned} [\underline{X}_{n+1}, \overline{X}_{n+1}] &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] +_{0.5} (-\lambda)h[\underline{X}_n, \overline{X}_n] \\ &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] +_{0.5} 0.5((-\lambda)h\underline{X}_n + (-\lambda)h\overline{X}_n), \end{aligned}$$

já que  $diam(-\lambda h[\underline{X}_n, \overline{X}_n]) \leq diam([\underline{X}_n, \overline{X}_n])$ . Isso significa que

$$\begin{aligned} diam(X_{n+1}) &= \overline{X}_{n+1} - \underline{X}_{n+1} \\ &= \overline{X}_n + 0.5((-\lambda h)\underline{X}_n + (-\lambda h)\overline{X}_n) \\ &\quad - (\underline{X}_n + 0.5((-\lambda h)\underline{X}_n + (-\lambda h)\overline{X}_n)) \\ &= \overline{X}_n - \underline{X}_n \\ &= diam(X_n), \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

É importante observar que ambas as soluções numéricas são consistentes em termos da propriedade associativa, uma vez que cada elemento  $X_{n+1}$  foi obtido de forma única, já que a ordem das operações aritméticas é independente.

Assim como o método de Euler, o método de Runge-Kutta forneceu soluções numéricas qualitativamente semelhantes à solução determinística. Para o método de Runge-Kutta, fica claro o quanto é possível ter um controle maior

da incerteza ao longo do fenômeno ao comparar as amplitudes das soluções intervalares vistas na figura 5.

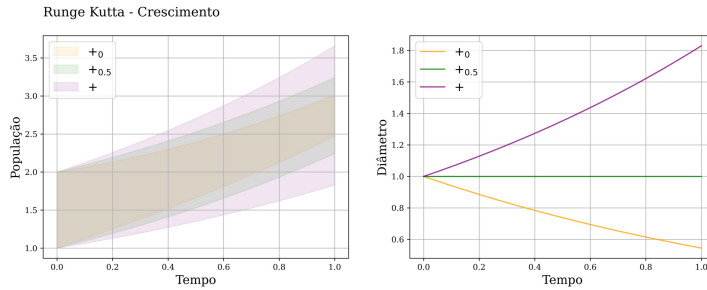


Figura 4: Para o modelo malthusiano de crescimento, é possível observar a solução numérica pelo método de Runge-Kutta à esquerda, em que as sombras indicam a solução numérica intervalar. Na direita, é possível ver o comportamento do diâmetro dos intervalos. O problema teve como solução inicial 1.5, com  $h = 0.01$ ,  $\lambda = 0.2$  e  $x_0 = [1, 2]$ .

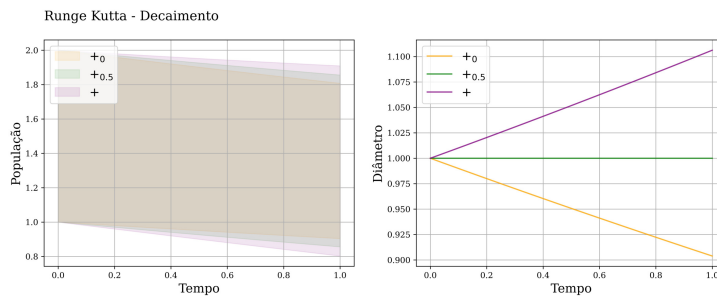


Figura 5: Para o modelo malthusiano de decaimento, é possível observar a solução numérica pelo método de Runge-Kutta à esquerda, em que as sombras indicam a solução numérica intervalar. Na direita, é possível ver o comportamento do diâmetro dos intervalos. O problema teve como solução inicial 1.5, com  $h = 0.01$ ,  $\lambda = 0.2$  e  $x_0 = [1, 2]$ .

De modo similar ao que foi feito para o método de Euler em ambos os modelos de Malthus e decaimento, pode-se mostrar que as soluções intervalares via aritmética  $+0.5$  possuem diâmetro constante, como pode ser constatado na tabela 1.

Tabela 1: Informações das soluções numéricas para o método de Euler e Runge-Kutta no problema de decaimento para  $+_{0.5}$ .

Método	Tempo (s)	Inferior (m)	Superior (m)	Diâmetro (m)
Euler	0.5	0.86	1.86	1.0
	1	0.73	1.73	1.0
Runge	0.5	0.93	1.93	1.0
	1	0.86	1.86	1.0

## 7. Comentários finais

Este trabalho estudou o problema de Malthus e de decaimento a partir de condição inicial incerta do tipo intervalar. O artigo forneceu um estudo numérico deste tipo de problema considerando a extensão de dois métodos numéricos, o de Euler e de Runge-Kutta. Como a condição inicial para o problema é do tipo intervalar, então a aritmética envolvida no método numérico foi adaptada para este caso. Aqui foram consideradas três aritméticas, a soma  $+_0$ , a soma  $+_{0.5}$  (ambas vindas de uma família de distribuições de possibilidade conjunta) e a soma usual entre intervalos, sendo que o presente trabalho se dedicou ao estudo mais detalhado sobre  $+_{0.5}$ .

A seção 4 apresentou uma comparação entre as soluções numéricas via métodos de Euler e Runge-Kutta. As simulações corroboraram os resultados teóricos de que a aritmética padrão propaga incerteza, enquanto na aritmética interativa há um melhor controle dessa propagação. De fato, este artigo constatou que a solução numérica via soma interativa  $+_{0.5}$  possui largura constante em ambos os métodos numéricos, para os dois modelos propostos. Isso significa que a incerteza permanece constante ao longo do tempo. Para trabalhos futuros, pretendemos investigar as propriedades algébricas da operação aritmética  $+_{0.5}$  para problemas populacionais mais gerais como o de Verhulst e Gompertz.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM). Em particular, o segundo autor agradece o apoio financeiro da agência FAPESP sob processo nº 2023/03927-0.

## Referências

- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2017). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. 347. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1 edition.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Esmi, E., Barroso, G., Barros, L. C., e Sussner, P. (2015). A family of joint possibility distributions for adding interactive fuzzy numbers inspired by biomathematical models. In *Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, páginas 1318–1323.
- Esmi, E., Sacilotto, C., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2022). Numerical solution for interval initial value problems based on interactive arithmetic. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19:1–12.
- Esmi, E., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2021). Addition and subtraction of interactive fuzzy numbers via family of joint possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 424:105–131.
- Fullér, R. e Majlender, P. (2004). On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(3):355 – 369.
- Moore, R. E., Kearfott, R. B., e Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1<sup>a</sup> edition.
- Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. R. (2000). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Pearson Universidades, S. Paulo, 2<sup>a</sup> edition.
- Wasques, V. F., Andrade, A. E. R., e Zanineli, P. H. M. (2023). Associative property of interactive addition for intervals: Application in the malthusian model. *Fuzzy Information Processing*.

