

Modelagem matemática para descrever as competições entre espécies em recuperação de áreas degradadas e sua influência no clima local

Carlos F. L. Santos¹,

Depto. de Matemática, UEA - 69.050-010, Manaus/AM.

Resumo. A floresta amazônica corresponde aproximadamente a 53% das florestas tropicais existente no planeta, concentra uma biodiversidade com mais de 30000 espécies de vegetação, seu clima é equatorial quente e úmido com temperatura variando entre $22^{\circ}C$ a $28^{\circ}C$, a umidade do ar ultrapassa 80% e apresenta índice de pluviosidade oscilando entre 1400 a 3500 *mm* anual. Essas características vêm se perdendo ao longo do tempo devido sua degradação por ações antrópicas. O desmatamento afeta diretamente o clima e as dinâmicas entre as espécies que ali convivem, colocando algumas delas em sérios riscos de extinção. Com isso, o objetivo desse estudo é desenvolver um modelo matemático que descreva a recuperação de área desmatada e a influência dessa regeneração no clima. O modelo matemático proposto é descrito na forma de um sistema não-linear de equações diferenciais parciais (EDP), considerando fenômenos de difusão de vegetação, decaimento, uma capacidade de suporte, dinâmicas vitais do tipo Verhulst e competições inter e intraespecíficas, descritas pela clássica modelagem do tipo Lotka-Volterra não-linear, acopladas às EDP de difusão-advecção. O modelo matemático e o domínio foram discretizados visando uma aproximação da solução pelos métodos numéricos de diferenças finitas centrais para o espaço combinado ao método de diferenças finitas de Crank-Nicolson no tempo. Os resultados numéricos, mostraram que as competições definiram a nova paisagem ecológica e que o reflorestamento interfere diretamente no comportamento padrão do clima, sendo a advecção responsável pela coexistência das espécies.

Palavras-chave: *Equações diferenciais; difusão-advecção; ecologia matemática.*

¹cfsantos@uea.edu.br

1. Introdução

Fenômenos como dispersão, mortalidade de espécies, competições entre espécies na busca por sobrevivência, desmatamento, impactos ambientais e mudanças climáticas vêm sendo estudados, analisados e discutidos por muitos estudiosos da modelagem matemática.

De acordo com Souza (2018), a importância da modelagem se faz necessária por ser uma ferramenta capaz de criar representações simplificadas dos sistemas ecológicos complexos com o objetivo de processar simulações e análises sobre os ecossistemas de interesse.

A modelagem matemática de fenômenos biológicos vem sendo estudada desde Thomas Malthus (1766 – 1834), que apresenta um modelo de crescimento exponencial de uma população (Malthus, 2012), passando pelo modelo logístico de Verhulst (1804 – 1849), mostrando que uma população não crescerá exponencialmente devido a um fator limitante o modelo de Lotka-Volterra (1925 – 1939), que descreve interações entre duas espécies (Batschelet, 1978).

Os modelos mencionados acima são descritos por equações diferenciais ordinárias que consideram apenas a variação temporal. Neste trabalho, o interesse principal são as equações diferenciais parciais não-lineares, clássico no contexto da modelagem de dispersão populacional, envolvendo equação de difusão-advecção acoplada com termos do tipo Lotka-Volterra e dinâmicas vitais do tipo Verhulst (Sossae, 1995), cuja dimensão espacial apresenta importância relevante.

Nas alterações ambientais, como mudança de áreas desmatadas para áreas reflorestadas, podem surgir efeitos ecológicos, climáticos e modificações nas características da vegetação, que afetam diretamente as dinâmicas entre espécies, a biodiversidade, o equilíbrio ecológico, a biota, entre outros. Esses efeitos trazem rigorosas implicações ecológicas e mudanças no microclima local (Nepstad et al., 1994).

Estudos anteriores mostram que uma alteração na paisagem afeta os fluxos de calor latente e de calor sensível, ou seja, modificam as características do microclima local, implicando na variação da precipitação e da temperatura (Lyra et al., 1994).

A proposta deste estudo é modelar matematicamente as competições pelos recursos naturais, como água, luz e nutrientes entre três espécies de vegetação (Cumaru, Ingá, Pau-prezinho) em uma área degradada em processo de recuperação, a fim de encontrar qual a futura paisagem ecológica e sua in-

fluência no microclima dessa região, considerando os conceitos de calor latente e calor sensível na modelagem.

O modelo proposto neste trabalho é resolvido numericamente, aproximando-se a variável espacial pelo método de Diferenças Finitas centrais de segunda ordem e a variável temporal pelo de diferenças finitas de Crank-Nicolson, aplicando a técnica de escalonamento com pivoteamento. Para isso, simulações computacionais foram realizadas resolvendo-se o modelo discretizado, com o intuito de visualizar a dinâmica espaço-temporal do processo de recuperação da área degradada, sob as influências climáticas locais expressas pelos fatores, como calor latente e calor sensível.

Propõe-se uma aplicação no estudo e avaliação de uma das áreas de empréstimo da Usina Hidrelétrica de Balbina (UHE-Balbina), localizada no município de Presidente Figueiredo à 170 *km* de Manaus, AM (1°55'99"S e 59°24'65"W). A área possui 432 m² é uma região plana de fronteira suficientemente regular.

Em relação aos cenários resultantes das competições é importante modelar, aproximar as soluções numericamente e simular computacionalmente os efeitos dos fenômenos considerados no modelo sobre as espécies envolvidas e se há alguma espécie com melhor estratégia de captação dos recursos naturais disponíveis no meio e mais adaptada ao ambiente para predominar e determinar a futura paisagem ecológica e sua influência no microclima local.

2. Materiais e métodos

2.1. Modelo matemático

O sistema de equações diferenciais parciais que descreve a recuperação da área degradada pelas espécies Cumaru (P_1), Ingá (P_2), Pau-pretinho (P_3) e sua influência no microclima local expressa pelo calor latente (L) e calor sensível (H) em cada ponto (x, y) do domínio retangular $\Omega = (a; b) \times (a; c) \subset \mathbb{R}^2$, aberto, não vazio em cada instante de tempo $t \in (0, T]$, sendo T o tempo final,

é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial t} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right) - u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} - \mu_1 P_1 + \dots \\ \quad + \lambda_1 P_1 \left[1 - \frac{P_1 + \gamma_1 P_2 + \sigma_1 P_3}{K} \right] \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) - u_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} - \mu_2 P_2 + \dots \\ \quad + \lambda_2 P_2 \left[1 - \frac{P_2 + \gamma_2 P_1 + \sigma_2 P_3}{K} \right] \\ \frac{\partial P_3}{\partial t} = \alpha_3 \left(\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} \right) - u_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} - v_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} - \mu_3 P_3 + \dots \\ \quad + \lambda_3 P_3 \left[1 - \frac{P_3 + \gamma_3 P_2 + \sigma_3 P_1}{K} \right] \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \alpha_4 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) - \mu_4 L + \dots \\ \quad + \lambda_4 L \left[\frac{\beta_1 P_1}{\beta_1 P_1 + K} + \frac{\beta_2 P_2}{\beta_2 P_2 + K} + \frac{\beta_3 P_3}{\beta_3 P_3 + K} \right] \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \alpha_5 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) - \mu_5 H - \dots \\ \quad + \lambda_5 H \left[\frac{\delta_1 P_1}{\delta_1 P_1 + K} + \frac{\delta_2 P_2}{\delta_2 P_2 + K} + \frac{\delta_3 P_3}{\delta_3 P_3 + K} \right] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Na modelagem por EDP em (2.1), consideram-se ainda os seguintes fenômenos:

Difusão: será considerada a difusão efetiva (Marchuk, 1986; Okubo, 1980; Skellam, 1951, cf.), e descrita por $\alpha_i = \alpha_i(x, y)$;

Advecção: considera-se o vento como um campo advectivo, cuja direção e magnitude são representadas, respectivamente, por $V_i = (u, v)$ com $u_i = u_i(x, y), v_i = v_i(x, y), \text{div}(V_i) = 0$;

Mortalidade: representada por $\mu_i = \mu_i(x, y)$;

Crescimento: descrito por λ_i (equação logística), sendo K a capacidade de suporte.

Os termos $-\frac{\lambda_i \gamma_i}{K} P_i P_j$ e $-\frac{\lambda_i \sigma_i}{K} P_i P_j$, $i, j = 1, 2, 3$, representam os coeficientes de competições interespecíficas nas primeira, segunda e terceira equações, respectivamente, em quanto que $-\frac{\lambda_i}{K} P_i P_i$, $i = 1, 2, 3$, representam os coeficientes de competições intraespecíficas nas primeira, segunda e terceira equações,

respectivamente, os parâmetros β_i e $\delta_i, i = 1, 2, 3$, são as velocidades de respostas de P_1, P_2 e P_3 ao calor latente e sensível, respectivamente, do sistema (2.1).

2.2. Condições de contorno e condição inicial

As condições de fronteiras são do tipo Robin para o modelo (2.1), dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -c_j P_1, \\ \frac{\partial P_2}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -d_j P_2, \\ \frac{\partial P_3}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -g_j P_3, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -n_j L, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -m_j H, \end{cases}$$

η é um vetor normal exterior à superfície; $c_j, d_j, g_j, n_j, m_j, j = 1, \dots, 4$ são as constantes de proporcionalidades adequadas às condições de contorno do tipo Robin em cada parte Γ_i da fronteira (Santos, 2013). Entende-se assim que há variação de densidade de vegetação na fronteira.

O domínio computacional bidimensional considera, inicialmente, uma população com 48 indivíduos (plantas), sendo 16 de cada espécie (P_1, P_2, P_3), a uma distância de 3 metros entre os indivíduos, distribuídos de forma alternada dispostos em 6 linhas e 8 colunas em todo domínio Ω da aplicação, como mostra a figura 1.

P_2	P_1	P_3	P_2	P_1	P_3
P_1	P_3	P_2	P_1	P_3	P_2
P_3	P_2	P_1	P_3	P_2	P_1
P_2	P_1	P_3	P_2	P_1	P_3
P_1	P_3	P_2	P_1	P_3	P_2
P_3	P_2	P_1	P_3	P_2	P_1
P_2	P_1	P_3	P_2	P_1	P_3
P_1	P_3	P_2	P_1	P_3	P_2

Figura 1: Distribuição inicial de P_1, P_2, P_3 no domínio computacional Ω .

3. Esquemas numéricos

O modelo (2.1) e o domínio foram discretizados visando uma aproximação numérica das soluções pelo método de diferenças finitas de Crank–Nicolson no tempo (Sossae, 1995), e diferenças finitas centrais na dimensão espacial (Santos, 2013).

4. Discretização do domínio e do modelo matemático

Considera-se o domínio retangular $\Omega = (a, b) \times (a, c) \subset \mathbb{R}^2$ aberto, não vazio e fronteira suficientemente regular que contém em seu interior a área degradada de aproximadamente 432 m^2 , na região da hidrelétrica de Balbina/AM, afetada pelo desmatamento. Considera-se Ω uma região plana com dimensões $18\text{m} \times 24\text{m}$ (ver figura 2).

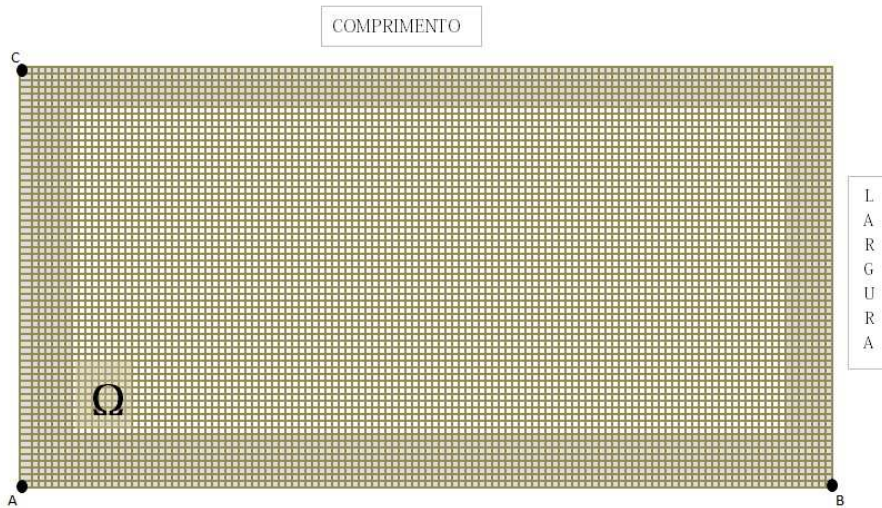


Figura 2: Distribuição inicial de P_1, P_2, P_3 no domínio computacional Ω .

O processo de discretização do domínio visando o uso do método de diferenças finitas centrais para a variável espacial é feito da seguinte forma: considere os intervalos (a, b) e (a, c) particionados em m_x e m_y subintervalos de espaçamentos $\Delta x = 0.0125$ e $\Delta y = 0.0125$, respectivamente.

Os nós da malha são enumerados, considerando-se $nnx = mx + 1$ e $nn y = my + 1$ como sendo o número de nós nos eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente.

O sistema (2.1) foi resolvido aplicando os mesmos procedimentos adotados por Sossae (1995); Douglas Jr. et al. (1979); Meyer (1988).

5. Dados do modelo

Para as simulações computacionais, consideram-se os parâmetros na tabela 1 em um domínio bidimensional Ω e o tempo $T = 5000$ dias.

Tabela 1: Valores dos parâmetros usados nas simulações computacionais.

Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores	Unidade
α_1	$0.0149e^{-2}$	α_2	$0.022e^{-2}$	α_3	$0.0127e^{-2}$	α_4	0.011	área/tempo
μ_1	0.002	μ_2	0.001	μ_3	0.004	μ_4	0.001	h^{-1}
u_1	0.011	u_2	0.01	u_3	0.013	α_5	0.021	área/tempo
v_1	0.05	v_2	0.07	v_3	0.072			área/tempo
λ_1	0.31	λ_2	0.58	λ_3	0.22	λ_4	0.021	n real
K	16	ny	8	dx	0.0125	nx	6	n real
γ_1	0.003	γ_2	0.02	γ_3	0.005			área/ind. t^2
σ_1	$0.011e^{-3}$	σ_2	$0.010e^{-3}$	σ_3	$0.0015e^{-3}$			área/ind. t^2
β_1	0.001	β_2	0.003	β_3	0.005	λ_5	0.013	n real
δ_1	0.002	δ_2	0.004	δ_3	0.001			n real
dt	0.01	dy	0.0125					n real
						μ_5	0.002	h^{-1}

5.1. Pontos de equilíbrio

Esta seção apresenta a obtenção dos pontos de equilíbrio do modelo temporal 5.2, obtido desprezando-se os termos difusivo e advectivo das equações P_1 , P_2 e P_3 do modelo (2.1). O principal intuito é entender a priori como se dá a convergência dos resultados das simulações computacionais ao longo do tempo. Espera-se que os resultados aqui encontrados possam servir de base de entendimento para as simulações envolvendo a modelagem do problema em EDPs.

Desprezando-se os termos de difusão-advvecção das equações P_1 , P_2 e P_3 em (2.1), o modelo resultante fica descrito por um sistema não-linear de

equações diferenciais ordinárias acopladas (5.2), conforme dado abaixo.

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \lambda_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + \gamma_1 P_2 + \sigma_1 P_3}{K} \right) - \mu_1 P_1; \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2 + \gamma_2 P_1 + \sigma_2 P_3}{K} \right) - \mu_2 P_2; \\ \frac{dP_3}{dt} = \lambda_3 P_3 \left(1 - \frac{P_3 + \gamma_3 P_2 + \sigma_3 P_1}{K} \right) - \mu_3 P_3. \end{cases} \quad (5.2)$$

Os parâmetros $\frac{\lambda_i}{K} P_i P_i$, $i = 1, 2, 3$; são os coeficientes de competições intraespecíficas de P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente;

Os parâmetros $\frac{\lambda_i \gamma_i}{K} P_i P_j$, $\frac{\lambda_i \sigma_i}{K} P_i P_j$, $i, j = 1, 2, 3$, são os coeficientes de competições interespecíficas entre as espécies P_i e P_j , $i \neq j$.

O sistema (5.2) admite 8 pontos de equilíbrio, na forma $M_i = (P_1^*, P_2^*, P_3^*)$, $i = 1, \dots, 8$, a saber:

$$M_1 = (0; 0; 0), M_2 = (16; 0; 0), M_3 = (0; 16; 0), M_4 = (0; 0; 16), M_5 = (0; 15, 84; 15, 75), \\ M_6 = (15, 93; 15, 99; 0), M_7 = (15, 97; 0; 15, 96), M_8 = (15, 80; 15, 86; 15, 84).$$

O ponto M_8 representa a coexistência das três espécies e M_1 a total inexistência de qualquer espécie na dinâmica temporal. Os demais pontos indicam a inexistência de ao menos uma espécie ao longo do tempo, nesse caso, expressa pela coordenada nula.

Como o interesse principal é investigar a recuperação de uma área degradada, com replantio de três espécies coexistindo no mesmo local, M_8 será, assim, analisado conforme descrito por Bassanezi (2011).

Calculando-se a matriz jacobiana nas coordenadas do ponto M_8 , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.165815176560588e^{-2} \\ -0.173320725224458e^{-1} \\ -0.172919437809484e^{-1} \end{bmatrix}$$

sendo w_i os autovalores dessa matriz, $i = 1, 2, 3$, com $0 < |w_i| < 1$, então M_8 é localmente assintoticamente estável.

Para estudos mais detalhados sobre análise de estabilidades e ponto de equilíbrio consultar Strogatz (2018); Bessa (2011); Marino et al. (2008).

O sistema (5.2) é resolvido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de tempo $\Delta t = 0.01$, considerando o tempo

máximo T igual a 5000 dias. O método foi implementado computacionalmente na linguagem de programação Python, em um notebook modelo HP 240 G3, processador Intel CORE i3, RAM 4 GB, com tempo médio aproximado de processamento de 18 minutos.

Com intuito de avaliar a convergência das soluções, considerou-se diferentes condições iniciais para as simulações. Os resultados das simulações para P_1 , P_2 e P_3 pode ser visualizada na Figura 3 seguinte.

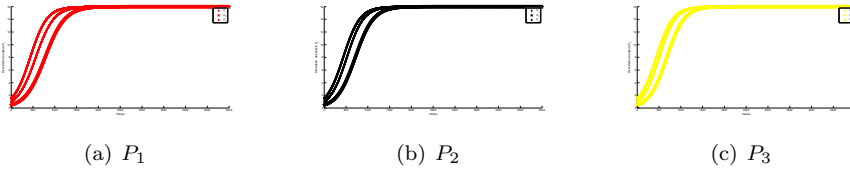


Figura 3: Dinâmicas das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0.5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1.5$ e $T = 5000$ dias.

Observa-se, na figura 3(a), que a dinâmica temporal de P_1 convergiu para a coordenada $P_1^* = 15.80$ do ponto M_8 ;

A figura 3(b) exhibe os resultados para P_2 , em que se pode notar a convergência para a coordenada $P_2^* = 15.86$ do ponto M_8 ;

Na figura 3(c), é possível notar a convergência das soluções para a coordenada $P_3^* = 15.84$ de M_8 .

Com esses resultados, cujos parâmetros de competições intra e interespecíficas e capacidade de suporte K estão sendo considerados no modelo temporal, mas desprezando os efeitos difusivo-advectivo no modelo (2.1). Assim, se conclui que as espécies P_1 , P_2 e P_3 convergiram, respectivamente, para as coordenadas do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies, $M_8 = (15.80; 15.86; 15.84)$, considerando as condições iniciais distintas.

Observa-se ainda, nas figuras 3(a), 3(b) e 3(c), a similaridade entre os resultados, devido aos efeitos dos termos logísticos nas equações do modelo, bem como na convergência para coordenadas muito próximas numericamente, nesse caso, devido a uma mesma capacidade de suporte K ter sido estabelecida para as três espécies.

Em resumo, com base nas simulações realizadas, observou-se que as aproximações numéricas não dependem das condições iniciais tomadas e, dessa

forma, foi possível mostrar numericamente a convergência e a estabilidade do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies consideradas no modelo.

6. Análise de sensibilidade

Uma amostragem baseada na análise de sensibilidade é aquela em que o modelo é executado repetidas vezes, testando-se várias combinações dos valores amostrados a partir da distribuição dos fatores de entrada, conforme descrito em Santos Camelo et al. (2017).

Neste estudo, a análise de sensibilidade foi realizada baseada em Scarpore (2011); Garcia et al. (2014), adotando os seguintes procedimentos:

1. Altera-se o valor de uma única variável, enquanto se mantinham as demais inalteradas;
2. Executa-se as simulações numéricas do modelo (2.1) repetidamente, variando o valor do parâmetro escolhido a cada execução.

Na tabela 2 apresentam-se os intervalos de correlações e suas respectivas interpretações nas análises dos gráficos descritos na Figura 4.

Tabela 2: Intervalo de correlação, segundo Rumsey (2011).

Valores dos parâmetros	Interpretações
0.00 , ± 0.19	Correlação bem fraca
± 0.20 , ± 0.39	Correlação fraca
± 0.40 , ± 0.69	Correlação moderada
± 0.70 , ± 0.89	Correlação forte
± 0.90 , ± 1.00	Correlação bem forte

Assim, por exemplo, pode-se medir como uma espécie de vegetação reage à alteração dos valores assumidos por cada parâmetro, ou seja, a sensibilidade da saída do modelo, como densidade populacional, para cada um de seus parâmetros, conforme o que descrevem Saltelli et al. (2004) e Scarpore (2011). A associação entre os valores de entrada do modelo e a saída é dada pelo modelo matemático (2.1).

Para cada conjunto de parâmetros, foram realizadas 30 simulações. Esse processo foi repetido cuidadosamente para cada parâmetro, para que todos mantivessem a mesma escala, a fim de se evitar resultados enviesados.

6.1. Intervalo de confiança

Neste trabalho, primeiramente foram calculados a média amostral \bar{x} e o desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para cada parâmetro da amostra de tamanho n . Em seguida foi considerado o nível de significância $\alpha = 0.05$, resultando em $\frac{\alpha}{2} = Z_{0.025} = 1.96$ e nível de confiança de 95% (Vieira, 2011). Portanto, o intervalo de confiança adotado aqui é dado por:

$$\left[\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \tag{6.3}$$

Com valores dos parâmetros dispostos na tabela 1 aplicados em 6.3 constrói-se a Tabela 3, apontando o intervalo de confiança de cada parâmetro adotado para P_1 , P_2 e P_3 , no modelo matemático (2.1).

Tabela 3: Intervalo dos parâmetros para análise de sensibilidade.

Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores
α_1	$[1.49e^{-5}; 1.49e^{-3}]$	α_2	$[2.2e^{-5}; 2.2e^{-3}]$	α_3	$[1.27e^{-5}; 1.27e^{-3}]$
α_4	$[0.01; 0.05]$	α_5	$[0.01; 0.08]$		
u_1	$[0.01; 0.07]$	u_2	$[0.01; 0.08]$	u_3	$[0.01; 0.07]$
v_1	$[0.02; 0.08]$	v_2	$[0.04; 0.09]$	v_3	$[0.04; 0.09]$
μ_1	$[0.001; 0.0005]$	μ_2	$[0.001; 0.006]$	μ_3	$[0.004; 0.008]$
μ_4	$[0.001; 0.007]$	μ_5	$[0.002; 0.008]$		
λ_1	$[0.2; 0.6]$	λ_2	$[0.2; 0.8]$	λ_3	$[0.1; 0.7]$
λ_4	$[0.01; 0.6]$	λ_5	$[0.01; 0.08]$		
γ_1	$[0.001; 0.006]$	γ_2	$[0.01; 0.06]$	γ_3	$[0.002; 0.007]$
σ_1	$[1.1e^{-5}; 1.1e^{-3}]$	σ_2	$[1.0e^{-5}; 1.0e^{-3}]$	σ_3	$[1.5e^{-5}; 1.5e^{-3}]$
β_1	$[0.001; 0.005]$	β_2	$[0.001; 0.007]$	β_3	$[0.002; 0.008]$
δ_1	$[0.001; 0.006]$	δ_2	$[0.002; 0.007]$	δ_3	$[0.001; 0.005]$

Com base nos valores dos parâmetros e nas amplitudes dos intervalos descritos na tabela 3, apresentam-se na figura 4 os resultados das simulações computacionais da análise de sensibilidade dos parâmetros de P_1 , P_2 e P_3 do modelo (2.1).

A figura 4 mostra a influência de cada parâmetro na dinâmica da população (convívio das três espécies juntas).

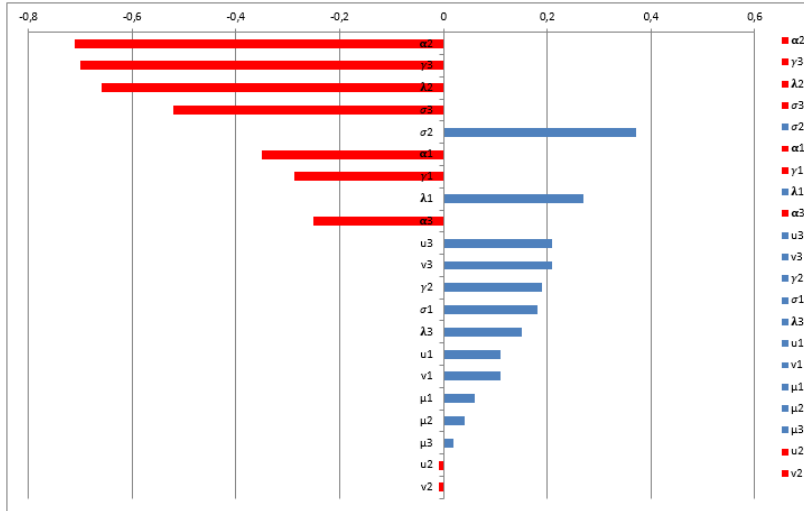


Figura 4: Sensibilidade para as três espécies de vegetação.

Os parâmetros de difusão $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, atuam no sistema ecológico com fortes influências negativas, visto que o fenômeno difusivo provoca a sobreposição de nicho, que causam as competições, tendo como consequência, a lentidão no crescimento ou mortalidade das espécies;

As competições interespecíficas representadas pelos parâmetros $\gamma_i, \sigma_i, i = 1, 2, 3$, apresentaram resultados similares aos obtidos da difusão, visto que as competições são consequências do fenômeno difusivo. As variáveis de entrada, γ_2, σ_1 e σ_2 atuam de forma positiva, apenas retardando o crescimento das espécies. γ_1, γ_3 e σ_3 atuam de forma negativa, provocando mortalidade ou redução na densidade das espécies;

O crescimento das espécies são descritos pelos parâmetros $\lambda_i, i = 1, 2, 3$. A variável de entrada λ_2 apresentou forte influência negativa no sistema ecológico, devido a elevado poder de competição, enquanto que λ_1 e λ_3 têm moderadas influências positivas, apenas com retardo no crescimento, sem causar mortalidade das espécies;

O fenômeno advectivo é representado pelos parâmetros u_i e $v_i, i = 1, 2, 3$. As entradas u_2 e v_2 atuam de forma fraca e negativa no sistema por contribuírem com espalhamento da espécie e provocam as competições.

Enquanto u_1 , v_1 , u_3 e v_3 atuam de forma moderada e positiva, visto que a advecção contribui para coexistência dessas espécies;

O decaimento descrito pelos parâmetros $\mu_i, i = 1, 2, 3$, atuam de forma fraca e positiva no sistema ecológico.

De modo geral, verificou-se que entre os parâmetros analisados para as dinâmicas envolvendo as três espécies P_1 , P_2 e P_3 , o modelo apresentou maior sensibilidade aos parâmetros de difusão, α_2 , de competições, γ_3 e σ_3 , e de crescimento λ_2 . Confalonieri et al. (2006) afirmam que os parâmetros que compõem modelos complexos de crescimento de plantas estão organizados de forma hierárquica, ou seja, existe certa dominância de uns parâmetros em relação a outros.

Dessa forma constata-se, neste estudo, que os parâmetros ligados diretamente à difusão e à competição atuam no topo da hierarquia para a definição de uma nova paisagem ecológica, para mais informações ver Santos (2022).

7. Resultados

Nesta seção, apresentam-se os resultados numéricos das simulações computacionais do modelo (2.1) para as três espécies de vegetação, com o intuito de visualizar a recuperação da área degradada e também a influência dessa regeneração no microclima local amazônico.

7.1. Resultados: dinâmica temporal

A figura 5 seguinte descreve as dinâmicas temporais de P_1 , P_2 e P_3 e suas influências no microclima local.

Pode-se notar, na figura 5, que há uma estabilidade entre as espécies em aproximadamente 13 anos. No tempo final, a simulação mostra que a área antes degradada estará recuperada com a predominância da espécie P_2 , definindo a nova paisagem ecológica no meio antes desmatado. Nota-se também a coexistência entre as três espécies.

Os resultados mostram ainda que, em áreas desmatadas, H é predominante em relação a L . Constata-se que à medida que a densidade de vegetação vai aumentando na região desmatada, ocorre uma inversão de fluxo de calor,

ou seja, H , que era predominante, reduziu, e L , que era menos intenso, passou a predominar na região que antes era dominado por H . Isso é uma clara manifestação da influência da vegetação no microclima.

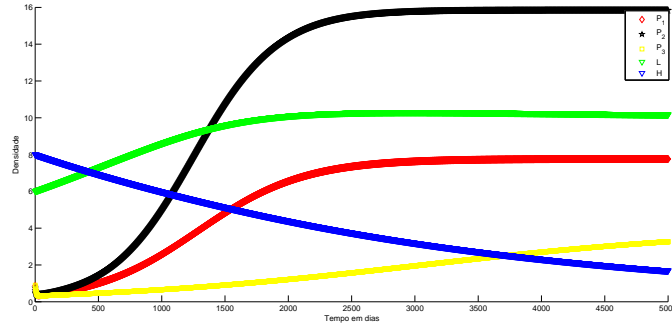


Figura 5: Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais de P_1 , P_2 , P_3 , L e H , $\Delta t = 0.01$ e $T = 5000$ dias.

7.2. Resultados: dinâmica espacial

A sequência de figuras 6(a) a 6(e) descrevem, a partir das condições iniciais, as dinâmicas espaciais de cada espécie de vegetação e o comportamento espacial de L e H , conforme descritos pelo modelo (2.1).

A figura 6(a) descreve os efeitos dos fenômenos considerados no modelo (2.1) sobre a espécie P_1 . Pode-se observar o espalhamento natural de P_1 por todo o domínio, devido aos efeitos da difusão e da advecção, provocaram a sobreposição de nicho e acarretaram as competições que inibiram o crescimento natural de espécies com baixo poder de competição. Ainda nessa figura é possível notar uma região do domínio em que a densidade de P_1 é menor que em outra. Isso pode ser explicado pela intensificação das competições entre as três espécies, retardando o crescimento;

A figura 6(b) mostra a dinâmica espacial da espécie P_2 . Pode-se notar que as competições não provocaram inibição de crescimento nessa espécie. Uma explicação que pode ser dada é que a espécie P_2 , na sobreposição de nicho, pode ter desenvolvido melhor estratégia de competição, dificultando acesso das demais espécies aos recursos disponíveis, inibindo o crescimento de P_1 e P_3 ;

A figura 6(c) exibe a dinâmica espacial da espécie P_3 . Nota-se, nesse resultado, os efeitos mais evidentes das competições provocadas pela sobreposição de nicho (devido difusão e advecção), inibindo o crescimento dessa espécie. A baixa densidade de P_3 poderia ser explicada por ter alguma desvantagem na competição com as demais espécies, obtendo menos recursos para o seu desenvolvimento. Em regiões distintas de Ω , esta espécie teve densidades diferentes. A região de maior densidade ocorreu exatamente onde P_1 e P_2 tiveram menor densidades, devido às competições terem sido favoráveis à P_3 nessa região;

A figura 6(d) descreve o comportamento do calor latente, L , que se manteve estável e teve densidade mais alta na região onde a floresta tornou-se mais densa. Na região em que a floresta apresentou densidade mais baixa, L também teve densidade mais baixa. Isso ocorreu devido à influência da vegetação;

A figura 6(e) descreve o comportamento do calor sensível, H . Aqui é possível observar uma intensidade maior de H na parte em que as espécies P_1 e P_2 tiveram densidades mais baixas e o calor latente, L , teve menor densidade. Como antes a região era desmatada, isso contribuiu para o grande aumento da densidade de H nessa região. Essa alta densidade foi amenizada ao longo do domínio, devido à influência da vegetação, que está se recuperando, aumentando a densidade do calor latente, L , na região.

Em síntese, nesse conjunto de simulações, as densidades finais encontradas para cada espécie foram: $P_1 = 7.85$, $P_2 = 15.84$, $P_3 = 4.4$, $L = 10.4$ e $H = 2.9$. Nas figuras 6(a) a 6(e), observou-se que a espécie P_2 predominou em todo domínio Ω , definindo a nova paisagem ecológica, corroborando com os resultados das dinâmicas temporais seção 7.1.

O tempo de competição pode gerar prejuízos no crescimento e no desenvolvimento das espécies, e isso pode ser um fator determinante na estrutura e composição futura do ecossistema (Gustafson et al., 2004).

Wilson (1988) declara que competição é uma interação entre indivíduos provocada por uma exigência compartilhada para um recurso de previsão limitada, conduzindo à redução no crescimento e na sobrevivência da espécie menos adaptada, verificando se tais competições são prejudiciais ou não às espécies,

destacando as principais ações mútuas (competições intra e interespecíficas) numa comunidade biológica.

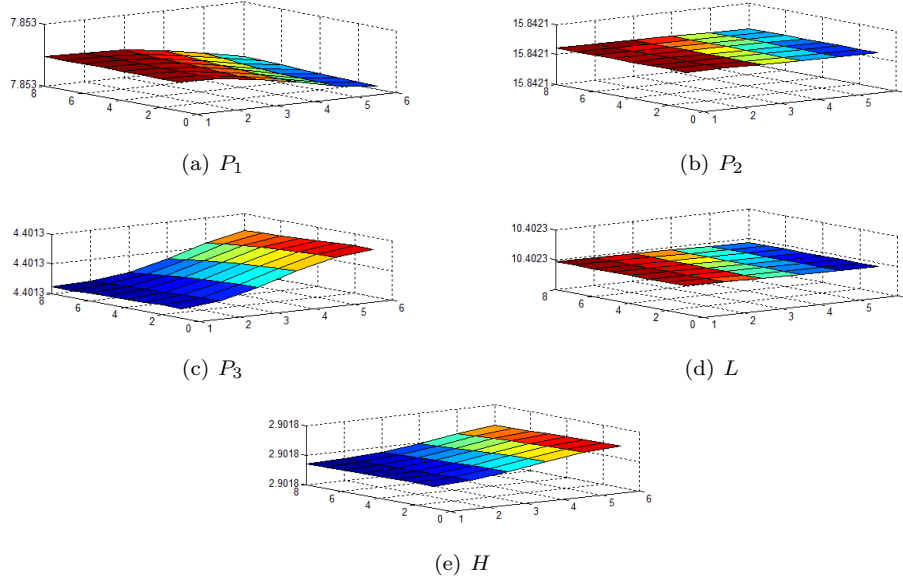


Figura 6: Resultados numéricos computacionais das dinâmicas bidimensionais de P_1 , P_2 , P_3 , L , H ; $\Delta x = \Delta y = 0.0125$; $\Delta t = 0.01$ e $T = 5000$ dias. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.

7.3. Conclusões

Há evidências de resultados extremamente prejudiciais à vida e à biodiversidade a curto, médio e longo prazos, decorrentes de uma larga gama de efeitos de impactos ambientais. Dentre eles, o desmatamento, a redução da precipitação e o aumento da temperatura afetam de modo irreversível o delicado e instável equilíbrio do convívio de espécies que se inter-relacionam ambientalmente.

Neste trabalho, um modelo matemático não-linear descrito por equações diferenciais parciais foi desenvolvido com os principais objetivos de descrever qualitativa e quantitativamente a recuperação da área desmatada, considerando competições entre três espécies de vegetação (Cumaru, Ingá e Pau-prezinho) elucidando a futura sucessão ecológica e sua influência no microclima local.

O modelo foi analisado matematicamente e resolvido numericamente. A partir dos resultados obtidos das simulações numéricas computacionais, concluiu-se o seguinte:

- A análise matemática do modelo (2.1), desprezando os fenômenos de difusão e advecção, possibilitou a obtenção do ponto de equilíbrio para coexistência das três espécies de vegetação, vindo a ser, em seguida, uma informação importante nas investigações numéricas dos modelos espaço-temporais;
- O aumento da difusão provoca forte influência na ocorrência das competições, que por sua vez definiu a nova paisagem ecológica;
- O fenômeno advectivo é um fator determinante na coexistências de algumas espécies e na formação de floresta mista;
- A formação da nova paisagem ecológica somente pode ser visualizada no domínio quando se considera os efeitos difusivo e advectivo na modelagem;
- A análise de sensibilidade do modelo (2.1) permitiu mostrar a correlação dos parâmetros com os resultados numéricos das simulações e como afetam a dinâmica ecológica;
- Neste estudo, a nova paisagem ecológica foi definida pela espécie Ingá, que desenvolveu melhor estratégia de competição na captação dos recursos naturais, do que as espécies Cumarú e Pau-prezinho;
- A cobertura vegetal em áreas desprovidas de vegetação pode provocar mudanças no fluxo de energia, ocasionando redução da temperatura e aumento na precipitação, reveladas devido considerar os fenômenos calor latente e calor sensível na modelagem matemática proposta.

Referências

- Bassanezi, R. C. (2011). *Equações diferenciais ordinárias – Um curso introdutório*. BC&T–UFABC Textos Didáticos, S. Paulo.
- Batschelet, E. (1978). *Introdução à matemática para biocientistas*. Interciência; EDUSP, S. Paulo.

- Bessa, G. R. (2011). Teoria de estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies. Dissertação de Mestrado, Univ.Est. Paulista Julio de Mesquita Filho (Unesp), Rio Claro/SP.
- Confalonieri, R., Acutis, M., Bellocchi, G., Cerrani, I., Tarantola, S., Donatelli, M., Genovese, G., et al. (2006). Exploratory sensitivity analysis of cropsyst, warm and wofost: a case-study with rice biomass simulations. *Rivista Italiana di Agrometeorologia*, 11(3):17–25.
- Douglas Jr., J., Dupont, T., e Ewing, R. E. (1979). Incomplete iteration for time-stepping a galerkin method for a quasilinear parabolic problem. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 16(3):503–522.
- Garcia, A., Consoli, F. L., Godoy, W. A. C., e Ferreira, C. P. (2014). A mathematical approach to simulate spatio-temporal patterns of an insect-pest, the corn rootworm *diabrotica speciosa* (coleoptera: Chrysomelidae) in intercropping systems. *Landscape ecology*, 29(9):1531–1540.
- Gustafson, D., Gibson, D., e Nickrent, D. (2004). Competitive relationships of *andropogon gerardii* (big bluestem) from remnant and restored native populations and select cultivated varieties. *Functional Ecology*, 18(3):451–457.
- Lyra, R., Nobre, C., Fisch, G., Rocha, E., Rocha, H., e Souza, S. (1994). Efeitos do desmatamento sobre a termodinâmica da baixa atmosfera. In *Anais do VIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, volume 1, páginas 81–84.
- Malthus, T. R. (2012). *Ensaio sobre o princípio da população*. Pub. Europa América, S. Paulo.
- Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems*, volume 16 of *Studies in Mathematical and its Applications*. North-Holland, Amsterdam.
- Marino, S., Hogue, I. B., Ray, C. J., e Kirschner, D. E. (2008). A methodology for performing global uncertainty and sensitivity analysis in systems biology. *J. of theoretical biology*, 254(1):178–196.
- Meyer, J. F. C. A. (1988). *Modelagem e simulação numérica do transiente térmico em meios compostos*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.

- Nepstad, D. C., de Carvalho, C. R., Davidson, E. A., Jipp, P. H., Lefebvre, P. A., Negreiros, G. H., da Silva, E. D., Stone, T. A., Trumbore, S. E., e Vieira, S. (1994). The role of deep roots in the hydrological and carbon cycles of amazonian forests and pastures. *Nature*, 372(6507):666–669.
- Okubo, A. (1980). *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, volume 1. Springer, Tokyo.
- Rumsey, D. J. (2011). *Statistics for dummies*. John Wiley & Sons, N. York, 2ª edição.
- Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F., e Ratto, M. (2004). *Sensitivity analysis in practice: a guide to assessing scientific models*. Wiley Online Library, Chichester, 1ª edição.
- Santos, C. F. L. (2013). Modelagem matemática do aumento de densidade de vegetação na amazônia e dinâmica populacional com competição intra e interespecífica. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Santos, C. F. L. (2022). *Modelagem matemática para descrever a recuperação de áreas degradadas na Amazônia*. Tese de Doutorado, Univ. Est. Paulista Julio de Mesquita Filho (Unesp), Botucatu/SP.
- Santos Camelo, M. C., Lucena, S., Alencar, J. R. B., e Melo, R. G. (2017). Análise de sensibilidade aplicada a um reator de redução catalítica seletiva (sensitivity analysis applied for a reactor of selective catalytic reduction). *Engevista*, 19(1):166–184.
- Scarpore, F. V. (2011). Simulação do crescimento da cana-de-açúcar pelo modelo agrohidrológico swap/wofost. Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba/SP.
- Skellam, J. G. (1951). Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*, 38(1/2):196–218.
- Sossae, R. C. (1995). Populational dynamic with density-dependence in dispersion and migration processes. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Souza, L. R. (2018). *Modelos matemáticos aplicados a restauração ecológica: caracterização, avaliação e valoração dos serviços ecossistêmicos promovidos*

- pela avifauna*. Tese de Doutorado, Engenharia Ambiental – UFPR, Curitiba/PR.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, N. York.
- Vieira, S. (2011). *Introdução à bioestatística recurso eletrônico. 4o edição*, volume 4. Elsevier, Rio de Janeiro.
- Wilson, J. B. (1988). Shoot competition and root competition. *J. of Applied Ecology*, 25(1):279–296.