

# Método das projeções de Chorin Teman aplicado a equação de Navier-Stokes: problema da cavidade

Gesivaldo S. Silva<sup>1</sup>,

Instituto Federal do Maranhão – IFMA, 65.980-000, Carolina/MA.

Andre Krindges<sup>2</sup>

DEMAT, ICET – UFMT, 78.060-900, Cuiabá/MT.

João Frederico C. A. Meyer<sup>3</sup>

DMA, IMECC – Unicamp, 13.098-320, Campinas/SP.

**Resumo.** Nesse trabalho propomos uma solução numérica para o problema da cavidade via equações de Navier-Stokes, utilizando o método das projeções de Chorin - Teman, que permite um desacoplamento do campo de velocidade e pressão e uma discretização semi implícita no tempo. Para a discretização espacial utilizamos o método de elementos finitos do tipo P1, com uma malha gerada pelo GMSH e bastante refinada. A implementação do código computacional foi realizada toda em paralelo. Fizemos análise dos gráficos para os campos de velocidades, na qual avaliamos o comportamento de estabilidade do método.

**Palavras-chave:** EDP; elementos finitos; paralelização; Matlab

## 1. Introdução

O presente artigo é parte de uma pesquisa de doutorado, defendida em 2022 no Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação da Unicamp. Segundo Silva (2022), o trabalho propôs uma solução numérica para

---

<sup>1</sup>gesivaldo.silva@ifma.edu.br

<sup>2</sup>krindges@gmail.com

<sup>3</sup>joni@ime.unicamp.br

a equação de difusão, advecção e reação, utilizando o método dos elementos finitos na discretização espacial, com vista a tratar o campo de velocidade com a equação de Navier-Stokes, via método das projeções de Chorin-Teman. O método de Chorin-Teman é um método que se mostrou eficiente e que permite o desacoplamento do campo de velocidade e pressão e uma discretização semi implícita no tempo.

A equação de Navier-Stokes para fluido incompressível, é uma formulação por via de um modelo matemático descrito por equações diferenciais parciais não lineares, que possibilitam um tratamento para campos de velocidade e pressão em um escoamento de fluido laminar, transição ou turbulento.

Uma das possibilidades de validação de um experimento numérico, é a adaptação do código computacional aos arranjos de um problema clássico da literatura, já discutido e aceito na academia. Quando tratamos um fenômeno de mecânica dos fluidos via equações de Navier - Stokes, com tratamento computacional, os problemas que são clássicos e que surgem inicialmente como testes, são os problemas do duto cilíndrico ou da cavidade, pois são exemplos muito bem aceitos pela comunidade científica.

A proposta que implementamos e testamos, trata de um escoamento bidimensional no interior de uma cavidade com tampa deslizante. Em que estamos tratando a cavidade (quadrada) com lado  $L = 1 m$ . Pelas condições de contorno sugeridas para o problema, adotamos uma velocidade  $u_x = 1m/s$  na parte superior da cavidade. Para efeito de contexto, o movimento do fluido no interior da cavidade será provocado pelo movimento da fronteira na qual ocorrerá o deslize da tampa. O deslocamento da tampa provocará movimentos no interior da cavidade que será passivo de formações de vórtices a depender do grau do número de Reynolds que será adotado no experimento. A implementação do código foi feita em paralelo, com uma discretização espacial via teoria de elementos finitos do tipo P1, e uma malha bem refinada. Utilizamos o método de Galerkin, via teoria de elementos finitos e aplicado ao Método das Projeções de Chorin-Teman.

A paralelização foi um dos diferenciais dessa pesquisa. Segundo Antunes (2008), a paralelização é uma forma pela qual a demanda computacional é suprida através do uso simultâneo de recursos computacionais como processadores para a solução do problema, ou seja, o código em paralelo nos permite fazer escolhas dos processadores, que possibilita posteriormente, resolver problemas com altas demandas computacionais usando apenas uma CPU.

A implementação em paralelo executam tarefas independentes nos núcleos físicos da Central Processing Unit (CPU), em que as operações são executadas implicitamente por funções padrão do software Matlab. A paralelização é realizada em Matlab através da função Parallel Computing Toolbox. É um comando que fornece uma maneira eficiente para acelerar códigos na linguagem Matlab, executados em uma CPU.

O objetivo da implementação em paralelo é proporcionar um desempenho computacional eficiente na solução de problemas diversos de grande impacto computacional, ou seja, grande escala, proporcionando uma redução significativa do tempo computacional em níveis de processamento.

Os testes realizados, foram executados por 12 núcleos físicos, sendo por padrão, cada processador executa uma tarefa. Em linhas gerais, os cálculos realizados em cada elemento não são contas difíceis, portanto, realizamos testes em que cada núcleo físico, se comportou como 4 threads, que são processadores virtuais capazes de executarem uma tarefa independente, o que nos possibilitou trabalharmos com 48 processadores virtuais independentes na execução das tarefas.

Os testes foram realizados em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso, *campus* Cuiabá. No laboratório de Matemática Aplicada e Computacional da Universidade.

## 2. Equação de Navier Stokes

A evolução do fluxo de fluido viscoso e incompressível em um domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é governado pela formulação a seguir.

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \nu \nabla^2 \vec{v} = \vec{f}, & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in (0, T] \subset \mathbb{R} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

com  $\Omega \times (0, T)$ ,  $v(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$  é a velocidade do fluido,  $(x, y) \in \Omega$  e  $t \in (0, T)$  com  $T > 0$ . Esta equação é vista dentro da dinâmica dos fluidos, como responsável por descrever o comportamento geral dos fluidos. Outros parâmetros essenciais no modelo apresentados em 2.1, são:  $p(x, y, t)$  é a pressão, o  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade do fluido, número de Reynolds (constante adimensional)  $Re = \frac{1}{\nu}$  e  $f(x, y, t)$  um campo de força externa.

### 2.1. Condições de contorno para o problema da cavidade

As condições de contorno para o problema da cavidade, além da condição inicial que o caso requer, será descrita na figura 1.

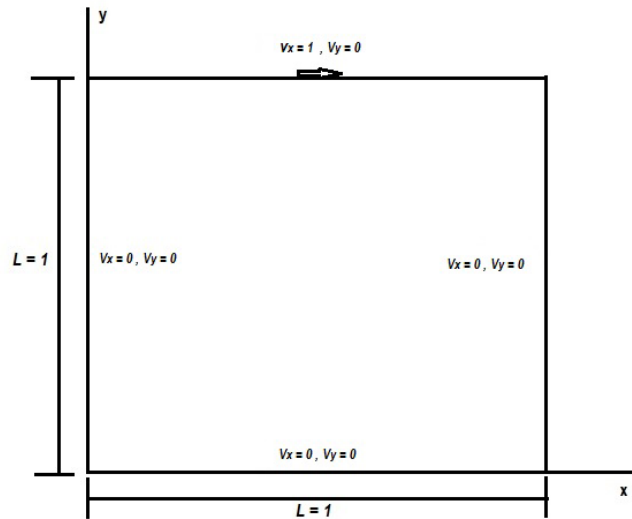


Figura 1: Cavidade com tampa deslizante.

## 3. Método das projeções: formulação variacional e discretização das equações

A formulação variacional para a equação de Navier-Stokes, é via uma técnica creditada a Chorin (1968) e Temam (1977), conhecido como método das projeções (ou método dos passos fracionados). Segundo Trales (1995), esse método muito rapidamente se mostrou como prático para resolver problemas evolutivos numericamente em formulação velocidade-pressão.

O método tem sido bastante utilizado em aproximações numéricas em problemas de dinâmicas dos fluídos, pois permite o desacoplamento do campo de velocidade e pressão. Um tratamento parecido com o aqui proposto, pode ser encontrado no trabalho de Krindges (2011) e Ruas e Goldberg (1999), ambos para o caso tridimensional.

Ainda segundo Trales (1995), a técnica das projeções consiste em decompor a cada passo de tempo, a resolução do problema de Navier-Stokes em

uma etapa de convecção e uma etapa de projeção.

Os passos seguintes consistem em realizarmos uma discretização temporal para a equação (2.1) em cada passo de tempo. Para um dado passo de tempo  $\Delta t$  e uma velocidade inicial  $v_0 = v(0, x, y)$ , uma discretização semi-implícita no tempo consiste em aproximar  $v(\cdot, n\Delta t)$  e  $p(\cdot, n\Delta t)$  para  $n = 1, 2, \dots$  pela solução  $(v^n, p^n)$  do sistema (3.2).

$$\begin{cases} \frac{v^n - v^{n-1}}{\Delta t} - \nu \Delta v^n + (v^{n-1} \cdot \nabla)v^n + \nabla p^n = \vec{f} \\ \nabla \cdot v^n = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Em uma apresentação inicial, o algoritmo pode ser expresso por:

Dado  $v_0$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , calcular  $v^n$  e  $p_*^n$

$$\begin{cases} \frac{v^n - v_*^n}{\Delta t} + \nabla p_*^n = 0 \\ \nabla \cdot v^n = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

em que a velocidade  $v_*^n$  de (3.3) é uma aproximação de  $v^n$ , a velocidade corrigida no passo  $n$ .

Aplicando o operador divergência na equação (3.3), e considerando que  $\nabla \cdot v^n = 0$ , chegamos na equação (3.4) a seguir.

$$\Delta p_*^n = \frac{\nabla \cdot v_*^n}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Assumindo a condição proposta por Chorin (1968), temos que  $(v^n - v_*^n) \cdot \eta = 0$  em todo o contorno  $\partial\Omega$ , o que nos permite aplicar uma condição de contorno do tipo  $\frac{\partial p_*^n}{\partial \eta} = 0$  para a pressão.

O algoritmo limita-se a resolver, sucessivamente, mediante as condições iniciais e as condições de contorno dadas, sendo  $v_*^n$  a solução de (3.5) aproximada no passo atual. O que, em seguida, permite o desacoplamento do campo de velocidade e pressão.

$$\frac{v_*^n - v^{n-1}}{\Delta t} - \nu \Delta v_*^n + (v^{n-1} \cdot \nabla)v_*^n = \vec{f}. \quad (3.5)$$

$$\Delta p_*^n = \frac{\nabla \cdot v_*^n}{\Delta t} \quad (3.6)$$

$$v^n = v_*^n - \Delta t \nabla p_*^n \quad (3.7)$$

A formulação variacional do problema para as equações (3.5), (3.6) e (3.7), ajustadas as condições de fronteiras e tomando  $u \in H_0^1(\Omega)$ , prosseguimos.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{v_*^n - v_*^{n-1}}{\Delta t} \cdot u \, d\mu - \nu \int_{\Omega} \Delta v_*^n \cdot u \, d\mu + \int_{\Omega} (v_*^{n-1} \cdot \nabla) v_*^n \cdot u \, d\mu \\ = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot u \, d\mu, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} \Delta p_*^n \cdot q \, d\mu = \int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot v_*^n}{\Delta t} \cdot q \, d\mu, \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} v^n \cdot u \, d\mu = \int_{\Omega} v_* \cdot u \, d\mu - \Delta t \int_{\Omega} \nabla p_*^n \cdot u \, d\mu, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^2 \quad (3.10)$$

Fazendo uso da identidade de Green e usando as condições de fronteiras para o problema em estudo e usando os resultados das equações (3.8), (3.9), (3.10), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{v_*^n - v_*^{n-1}}{\Delta t} \cdot u \, d\mu + \nu \int_{\Omega} \nabla v_*^n \cdot \nabla u \, d\mu + \int_{\Omega} (v_*^{n-1} \cdot \nabla) v_*^n \cdot u \, d\mu \\ = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot u \, d\mu, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p_*^n \cdot \nabla q \, d\mu = - \int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot v_*^n}{\Delta t} \cdot q \, d\mu, \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} v^n \cdot u \, d\mu = \int_{\Omega} v_* \cdot u \, d\mu - \Delta t \int_{\Omega} \nabla p_*^n \cdot u \, d\mu, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^2. \quad (3.13)$$

Feita a formulação variacional para o método das projeções, a existência e unicidade das soluções das equações (3.11), (3.12) e (3.13) podem ser encontradas em Ruas e Goldberg (1999) para o caso em três dimensões e em Trales (1995), para um caso bidimensional com os seus devidos arranjos.

### 3.1. Discretização espacial

Tomando a formulação varicacional e definindo o subespaço  $U_h \subset H_1(\Omega)$  de dimensão finita gerado pela base  $\mathfrak{B} = \{\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n_h}\}$ , a solução das Equações (3.11), (3.8) e (3.9) pode ser escrita como uma combinação linear dos elementos da base  $\mathfrak{B}$  como posto em (3.14);

$$v_h = \sum_{j=1}^{n_h} u_j(t) \varphi_j(x_i, y_i). \quad (3.14)$$

Como uma das possibilidades do método de *Galerkin* é via Elementos Finitos, as funções da Base  $\mathfrak{B}$  são escolhidas do tipo linear satisfazendo as condições do delta de Kronecker. Tais que  $\varphi_j(p_i) = \delta_{ji}$ ;  $i; j = 1 : ntn$ , em que o  $ntn$  é o número total de nós e  $p_i$  é o  $i$ -ésimo nó da malha.

A discretização para a equação (2.1) após sua formulação variacional (3.11), (3.8) e (3.9), em que usaremos a notação que Krindges (2011) usou em sua tese de doutorado. Assim, os passos seguintes foram: tomando os subespaços vetoriais de dimensões finitas  $V_\gamma^{(h)}$  e  $V_p^{(h)}$ , gerado pelas bases  $B_\gamma = \{\phi_1^\gamma, \phi_2^\gamma, \dots, \phi_{n_h}^\gamma\}$  e  $B_p = \{\phi_1^p, \phi_2^p, \dots, \phi_{n_h}^p\}$ . Vamos considerar ainda o subespaço  $V_{\widehat{xy}}^{(h)}$  de dimensão finita de  $H^1(\Omega)$ , gerado pela base  $B_{\widehat{xy}} = \{\phi_1^{\widehat{xy}}, \phi_2^{\widehat{xy}}, \dots, \phi_{n_h}^{\widehat{xy}}\}$ . Frente a esta construção podemos obter as  $v^n$  e  $v_*^n$  e escrevê-las como funções do espaço  $V_{\widehat{xy}}^{(h)} \times V_{\widehat{xy}}^{(h)}$  com  $p_*^n$  tomado no espaço  $V_p^h$ . Escrevendo cada uma das coordenadas das velocidades em termos das bases que foram definidas anteriormente, obtemos:

$$v^n = (v_1, v_2) = \left( \sum_{i=1}^{n_h^{\widehat{xy}}} v_{1i}^n \phi_i^{\widehat{xy}}(x, y), \sum_{j=1}^{n_h^{\widehat{xy}}} v_{2j}^n \phi_j^{\widehat{xy}}(x, y) \right), \quad (3.15)$$

$$v_*^n = (v_{1*}, v_{2*}) = \left( \sum_{i=1}^{n_h^{\widehat{xy}}} v_{1*i}^n \phi_i^{\widehat{xy}}(x, y), \sum_{j=1}^{n_h^{\widehat{xy}}} v_{2*j}^n \phi_j^{\widehat{xy}}(x, y) \right), \quad (3.16)$$

$$p_*^n = \left( \sum_{i=1}^{n_h^p} p_{*i}^n \phi_i^p(x, y) \right). \quad (3.17)$$

O próximo passo será substituir as equações (3.15), (3.16) e (3.17) nas equações (3.11), (3.8) e (3.9) e desenvolver as operações necessárias, o que permite obtermos a cadeia de sistema lineares (3.18) e, assim, as matrizes e

vetores da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (A_1 + C_1^{n-1}) v_{1*}^n = b_{1*}^{n-1} \\ (A_2 + C_2^{n-1}) v_{2*}^n = b_{2*}^{n-1} \\ D \cdot p_*^n = d^n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} F_1 v_1^n = b_1^n \\ F_2 v_2^n = b_2^n \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Podemos representar os elementos da cadeia de sistemas (3.18) pelos elementos em sua forma discretizada.

$$(A_1)_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \left( \phi_j^{\hat{x}y}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega + \nu \left( \nabla \phi_j^{\hat{x}y} \cdot \nabla \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^{\hat{x}y} \times n_h^\gamma$$

$$(C_1)_{ij} = \left( v^{n-1} \cdot \nabla \phi_j^{\hat{x}y}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^{\hat{x}y} \times n_h^\gamma$$

$$(b_{1*}^{n-1})_j = \frac{1}{\Delta t} (v_1^{n-1}, \phi_j^\gamma), \quad n_h^\gamma \times 1$$

$$(A_2)_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \left( \phi_j^{\hat{x}y}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega + \nu \left( \nabla \phi_j^{\hat{x}y} \cdot \nabla \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^{\hat{x}y} \times n_h^\gamma$$

$$(C_2)_{ij} = \left( v^{n-1} \cdot \nabla \phi_j^{\hat{x}y}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^{\hat{x}y} \times n_h^\gamma$$

$$(b_{2*}^{n-1})_j = \frac{1}{\Delta t} (v_2^{n-1}, \phi_j^\gamma)_\Omega, \quad n_h^\gamma \times 1$$

$$(D)_{ij} = \left( \nabla \phi_j^p \cdot \nabla \phi_i \right)_\Omega, \quad n_h^p \times n_h^p$$

$$(d^n)_i = -\frac{1}{\Delta t} \left( \nabla \cdot v_*^n, \phi_i \right)_\Omega, \quad n_h^p \times 1$$

$$(F_1)_{ij} = \left( \phi_j^{\hat{x}y}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^{\hat{x}y} \times n_h^\gamma$$

$$(F_2)_{ij} = \left( \phi_j^{\hat{x}y}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^{\hat{x}y} \times n_h^\gamma$$

$$(b_1^n)_i = (v_{1*}^n, \phi_i^\gamma)_\Omega - \Delta t \left( \frac{\partial p_*^n}{\partial x}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^\gamma \times 1$$

$$(b_2^n)_i = (v_{2*}^n, \phi_i^\gamma)_\Omega - \Delta t \left( \frac{\partial p_*^n}{\partial x}, \phi_i^\gamma \right)_\Omega, \quad n_h^\gamma \times 1$$



Feita a formulação variacional e a discretização, seguiremos à próxima seção para a apresentação da discretização do domínio.

## 4. Discretização do domínio

O (MEF) baseado em Becker et al. (1988) e Hughes (2000) é uma técnica geral que garante o suporte para a construção de aproximações da solução numérica de problemas a valores de contorno e condições iniciais. A malha usada no trabalho foram elementos triangulares do tipo P1 não estruturada.

Uma definição apresentada por Silva (2022), é a seguinte:

**Definição 1** *Uma subdivisão de um domínio  $\Omega$  é uma coleção finita de elemento do domínio  $K_i$ , tal que:*

1.  $K_i \cap K_j = \emptyset$  se  $i \neq j$

2.  $\bigcup_{i=1}^{nte} K_i = \bar{\Omega}$

A triangulação do domínio é o que chamaremos de malha. Ou seja, construiremos uma malha sobre  $\Omega$  do tipo P1 e esta consistirá de nte (número total de elementos) elementos finitos.  $(E_1, E_2, \dots, E_{nte})$ , que por sua vez serão disjuntos dois a dois e terão em comum uma aresta ou um vértice (os vértices de um elemento nunca ocorre no lado de outro elemento) conforme definição.

A discretização do domínio, foi realizada tal que a malha fosse lida no sentido anti-horário. Destacamos que após a confecção da malha, criamos uma rotina para varrer todos os elementos e conferir a ordem de construção da malha.

A construção da malha, foi feita via software GMSH. Em que destacamos que Geuzane e Remacle e Geuzaine (2009) afirmam que o GMSH é um gerador de malha de elementos finitos de código aberto com um mecanismo CAD integrado e pós-processador. Seu objetivo de design é fornecer uma ferramenta de malha rápida, leve e fácil de usar com entrada paramétrica e recursos de visualização avançados. O GMSH é construído em torno de quatro módulos: geometria, malha, solucionador e pós-processamento.

Para Krindges (2011) uma particularidade muito útil do GMSH é a organização dos pontos: no arquivo de saída, primeiro são colocados os pontos de fronteira e depois os internos. Essa organização facilita na implementação do método de elementos finitos.

Para o domínio em estudo, a malha gerada segue apresentada na figura 2 foi obtida para os dados apresentados abaixo:

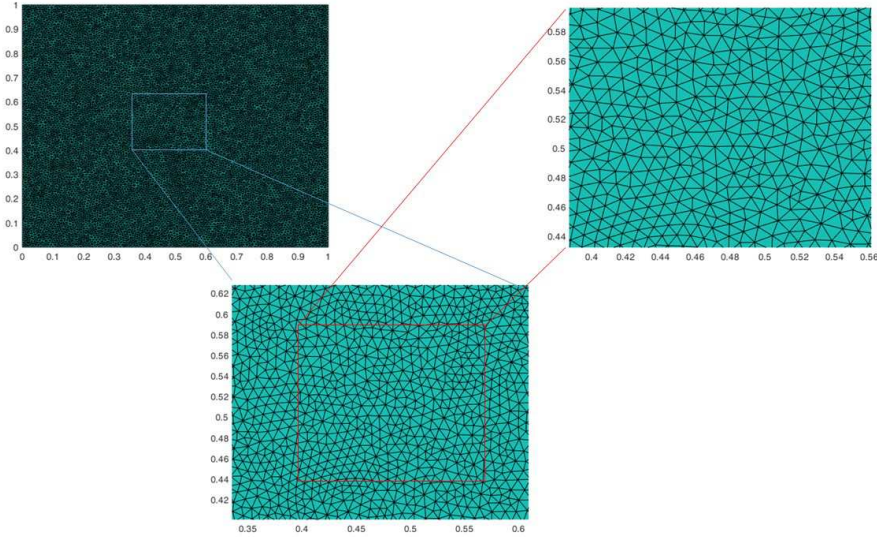


Figura 2: Malha cavidade.

$n_{te} = 26.460$  (Número total de elementos)

$n_{tn} = 13031$  (Número total de nós)

$n_f = 400$  (Número de nós da fronteira)

Uma das coisas fundamentais que foram observadas na construção da malha, foi a localização dos entes geométricos. Com eles foi possível identificar os nós locais e globais da malha, além de identificar com muita precisão os elementos de fronteira e a estatística da malha. Para a poligonal que estamos trabalhando, foram gerados 404 elementos de fronteira.

## 5 Resultados numéricos

Para as simulações realizadas, foram feitos 4 testes com diferentes números de Reynolds. Na tabela 1 abaixo apresentamos os dados que foram usados nas simulações.

Tabela 1: Dados das simulações para o problema da cavidade.

| Velocidade | Passo de Tempo | N de Reynolds | Iteração |
|------------|----------------|---------------|----------|
| 1          | 0.03           | 100           | 5000     |
| 1          | 0.03           | 5000          | 5000     |
| 1          | 0.03           | 7500          | 5000     |
| 1          | 0.03           | 10000         | 5000     |

Uma discussão sobre uma possível classificação para número de Reynolds em relação ao problema da cavidade, é feita por (Aidun et al., 1991, – *apud* Pinho (2006)) e (Chiang et al., 1996, – *apud* Pinho (2006)), que afirmam:

Até  $\mathbf{Re} = 1.300$  o regime é permanente, quando ocorre a transição para o transiente.

$\mathbf{Re}$  entre 6.000 e 8.000 o escoamento se mantém laminar, quando se inicia a transição para turbulento em regiões distintas da cavidade

Com  $\mathbf{Re} = 10.000$  o regime é completamente turbulento.

Na tabela 1, mostramos os dados dos 4 experimentos que foram realizados. A seguir, nas figuras 3, 4, 5, 6 mostramos o comportamento da velocidade para os nós 13115, localizado na geometria como sendo o nó em  $x = 0,5$  e  $y = 0,5$  e o nó 11284 que fica localizado nas coordenadas da geometria  $x = 0,7$  e  $y = 0,3$ . A escolha do segundo nó (11284), de acordo com Pinho (2006), é que esse ponto fica situado na região em que ocorre as maiores oscilações.

### 5.1. Análise das figuras para as velocidades

Na figura 3, temos o gráfico para o campo de velocidade para um número de Reynolds  $\mathbf{Re} = 100$ . Conforme apresentado na seção anterior, os pontos que selecionamos foram 13115 e 11284, levando em consideração as definições apresentadas por Pinho (2006), que conclui que o regime é permante para os dados da simulações, isto é, com poucas oscilações, atingindo o estado estacionário com poucas iterações.

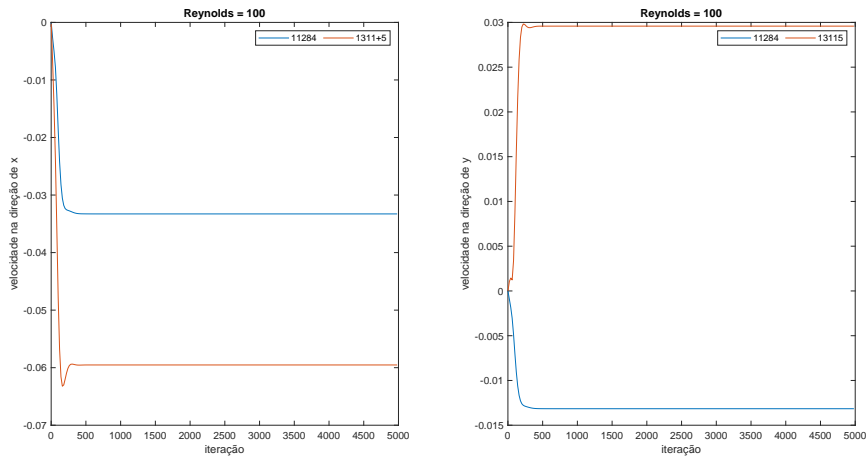


Figura 3: Velocidade em  $x$  e  $y$  para  $Re=100$

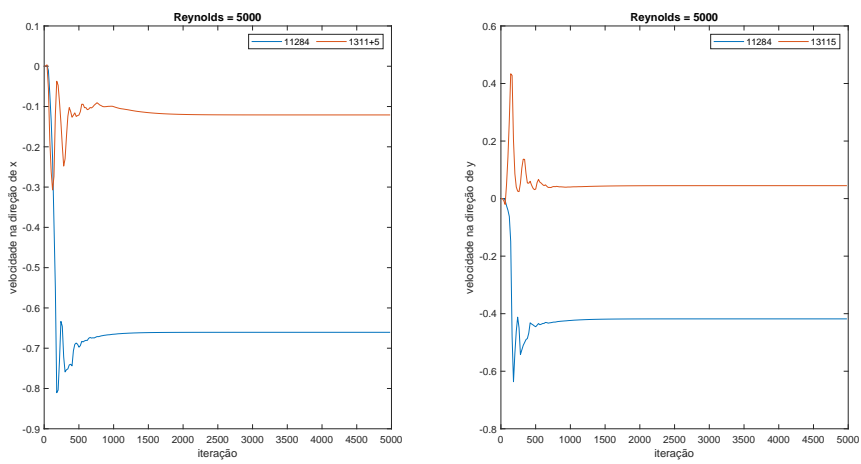


Figura 4: Velocidade em  $x$  e  $y$  para  $Re=5000$ .

Na figura 4, temos um número de Reynolds  $Re = 5000$ . Para os pontos que foram selecionados e as definições apresentadas por Pinho (2006), o regime é laminar. Apresentando poucas oscilações nas primeiras iterações, mas atingindo o estado estacionário com um número pequeno de iterações.

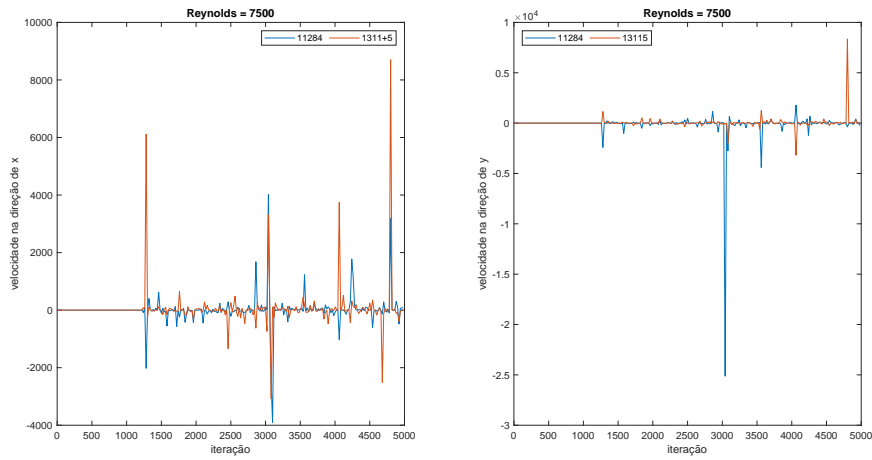


Figura 5: Velocidade em  $x$  e  $y$  para  $\mathbf{Re} = 7500$ .

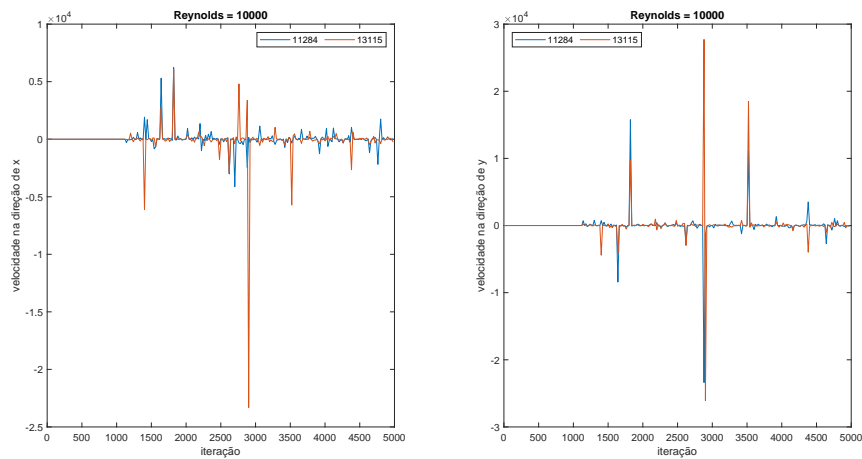


Figura 6: Velocidade em  $x$  e  $y$  para  $\mathbf{Re}=10000$ .

Na figura 5, temos um número de Reynolds  $\mathbf{Re} = 7500$ . Para esse caso, conforme vimos, o sistema pode está em fase de transição para turbulento, de acordo com Pinho (2006). Nessas condições se percebe uma oscilação para os pontos selecionados e um estado estacionário oscilatório.

Na figura 6, observa-se os resultados para  $\mathbf{Re} = 10000$ , que segundo a definição apresentada por Pinho (2006) o sistema entra em regime turbu-

lento, o que provoca um regime de oscilações no gráfico até atingir seu estado estacionário, que é oscilatório, devido as características do fenômeno.

## 5.2. Campos vetoriais para o problema da cavidade

Nas figuras 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14, mostramos a ampliação pela função *quiver* do Matlab, os campos vetoriais de velocidades para os respectivos números de Reynolds. Evidenciamos regiões de maiores intensidades e de formações de vórtices.

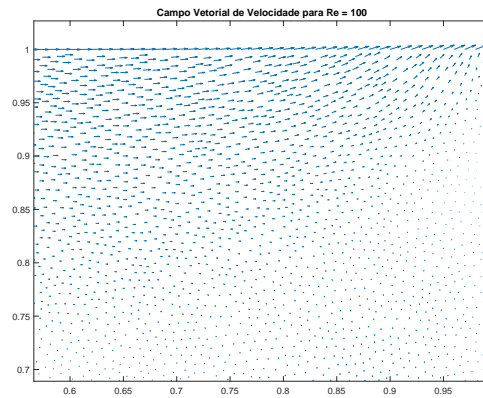


Figura 7: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=100$ .

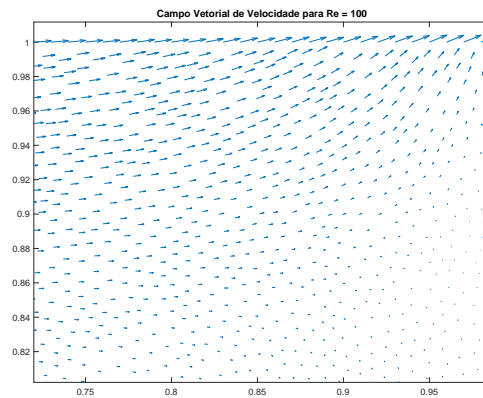


Figura 8: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=100$ .

As figuras 7, 8, são simulações para um número de Reynolds equivalente a 100, nessas imagens observamos o comportamento do fluido em um regime permanente sem formação de vórtices, como descrito pelas análises gráficas das velocidades em suas respectivas direções.

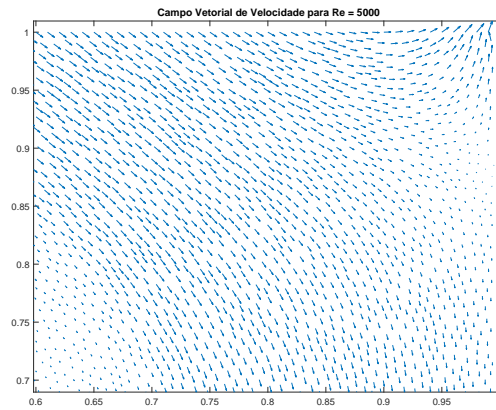


Figura 9: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=5000$ .

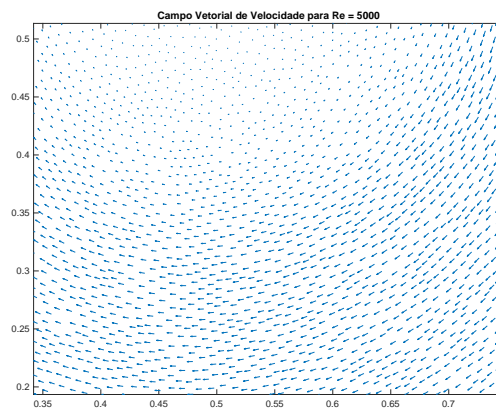


Figura 10: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=5000$ .

As figuras 9 e 10, são simulações para um número de Reynolds equivalente a 5000, nessas imagens observamos o comportamento do fluido em um intervalo de regime laminar conforme descrito por Pinho (2006), e mostrado

pelas análises gráficas das velocidades em suas respectivas direções.

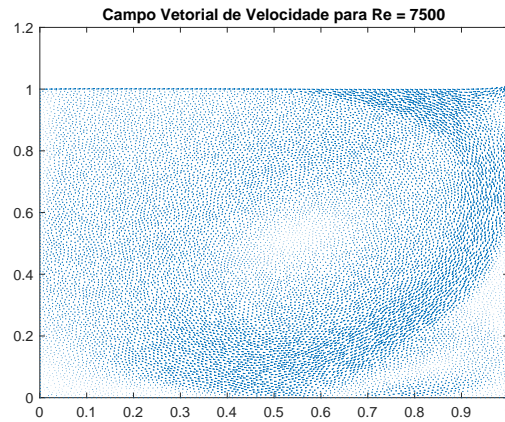


Figura 11: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=7500$ .

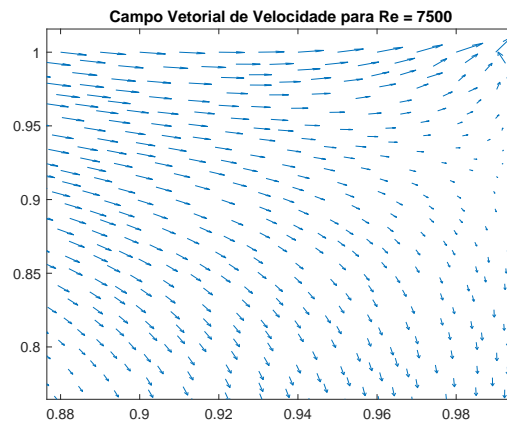
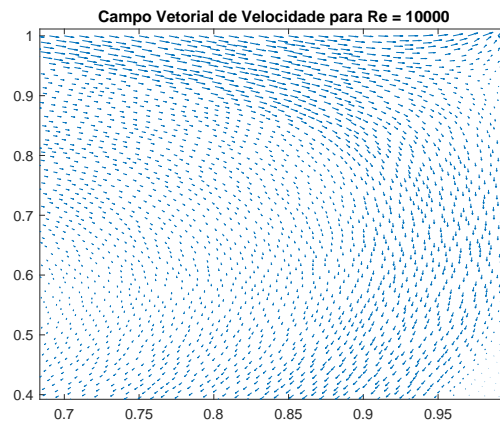
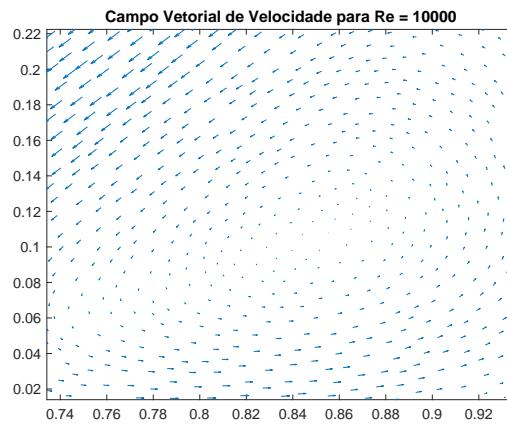


Figura 12: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=7500$ .

As figuras 11 e 12, são simulações para um número de Reynolds equivalente a 7500, nessas imagens observamos o comportamento do fluido em um movimento turbulento com formação de vórtices e uma região de fluxo intenso. O comportamento vetorial do campo, mostra um bom comportamento do código implementado.



Figura 13: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=10000$ .Figura 14: Campo vetorial da velocidade para  $\mathbf{Re}=10000$ .

Nas figuras 13 e 14 temos as simulações para um número de Reynolds equivalente a 10000, em regime completamente turbulento, conforme descrito por Pinho (2006). O campo vetorial de velocidade é visto como um campo admite formação de vórtices devido ao valor do número de Reynolds e, consequentemente, um número baixo na viscosidade do fluido, o que permite um elevado índice de turbulência conforme mostrado na figura 6.

## 6. Análise dos resultado

Neste artigo mostramos uma abordagem para a solução do problema da cavidade com tampa deslizante, como é conhecido na literatura. Utilizamos as equações de Navier-Stokes com condições de contorno adequadas para o problema que estávamos trabalhando. As equações de Navier-Stokes, foram trabalhadas via métodos das projeções de Chorin Teman, esse método se mostrou muito bem comportado, quando analisamos a estabilidade do mesmo.

A discretização do domínio foi feita via teoria de elementos finitos do tipo P1. Utilizamos uma malha bem refinada para que pudéssemos obter resultados numéricos satisfatórios. Os resultados das simulações numéricas foram mostrados através dos gráficos de velocidade e gráficos do comportamento vetorial da velocidade no interior da cavidade.

## Referências

- Aidun, C. K., Triantafillopoulos, N. G., e Benson, J. D. (1991). Global stability of a lid-driven cavity with throughflow: Flow visualization studies. *Physics and Fluids A*, 3:2081–2091.
- Antunes, A. R. E. (2008). *Um Sistema Computacional Utilizando uma Formulação de Passo Fracionado e o Método dos Elementos Finitos por Arestas para a Análise de escoamentos Incompressíveis Tridimensionais usando Computação Paralela*. Tese de Doutorado, CTG-UFPE, Recife/PE.
- Becker, E. B., Carey, G. F., e Oden, J. T. (1988). *Finite Elements-An Introduction*. Texas: University, Texas.
- Chiang, T. P., Sheu, W. H., e Huang, R. R. (1996). Finite volume analysis of spiral motion in a rectangular lid-driven cavity. *Physics and Fluids A*, 23:325–346.
- Chorin, A. J. (1968). Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation. *Mathematics of Computation*, 22(104):745–762.
- Hughes, T. (2000). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, volume 2 ed. University of Stanford.

- Krindges, A. (2011). *Modelagem e Simulação Computacional de um Problema Tridimensional de Difusão-Advecção com Uso de Navier-Stokes*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP.
- Pinho, F. A. A. (2006). *Simulação Numérica de Grandes Escalas em Cavidades Tridimensionais com Tampa Deslizante Utilizando Modelagem Dinâmica*. Tese de Doutorado, FEMEC-UFU, Uberlândia/MG.
- Remacle, J. e Geuzaine, C. (2009). Gmsh: um gerador de malha tridimensional de elementos finitos com recursos de pré e pós-processamento integrados. *Jornal Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia*, 79:1309–1331.
- Ruas, V. e Goldberg, D. (1999). A numerical study of projection algorithms in the finite element simulation of three-dimensional viscous incompressible flow. *International Journal for Numerical Methods in fluids*, 22(30):233–256.
- Silva, G. S. (2022). *Modelagem, Aproximação Numérica e Simulação Computacional de Impacto Ambiental em Meio Fluvial: o Rio Tocantins no Município de Imperatriz (MA)*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP.
- Temam, R. (1977). *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam.
- Trales, P. R. (1995). *Resolução das Equações de Navier-Stokes pelo Método das Projeções via Elementos finitos com Aceleração pelas Técnicas Multigrid*. Tese de Doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro/RJ.

