

Sistemas lineares fuzzy e problemas de mínimos quadrados aplicados a dados longitudinais

Nilmara J. B. Pinto¹, Vinícius F. Wasques², Estevão Esmi³, Laécio C. Barros⁴

^{1,3,4}DMA, IMECC – Unicamp, 13.083-859 - Campinas/SP

²Ilum Escola de Ciência, Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM), 13.083-100 - Campinas/SP, e

²Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 13.506-900 - Rio Claro/SP

Resumo. Este trabalho é dedicado ao estudo de sistemas lineares fuzzy, aqueles cuja matriz possui entradas reais, o vetor à direita contém entradas fuzzy triangulares e o vetor que se procura terá também entradas fuzzy triangulares. Através do uso do conceito de interatividade nas operações do sistema, é fornecido um algoritmo para busca dessa solução e alguns exemplos são dados para ilustrá-lo. Em particular, a interatividade utilizada será parametrizada, e o parâmetro escolhido será $\gamma = 0$. A motivação se dá pela procura de soluções para o problema de mínimos quadrados fuzzy. Os dados que se pretende aproximar são incertos e aqui modelados por números fuzzy triangulares. O algoritmo proposto para resolver sistemas lineares é usado para determinar quais são os coeficientes da reta que aproxima os dados. É feita também uma discussão sobre a unicidade e simetria das soluções. Os resultados são discutidos em termos da aproximação da incerteza dos dados longitudinais. Em particular, se aproxima um conjunto de dados de concentração de Ozônio na cidade de São Paulo/SP.

Palavras-chave: Sistema linear fuzzy; mínimos quadrados fuzzy; interatividade.

¹nilmarabiscaia@gmail.com

²vinicius.wasques@ilum.cnpem.br

³eelaureano@gmail.com

⁴laecioch@ime.unicamp.br

1. Introdução

A motivação do trabalho é o problema de mínimos quadrados fuzzy. Será considerado que os dados do problema são interativos segundo J_0 , que não possui as mesmas restrições da interatividade já considerada em trabalhos anteriores (Pinto et al., 2018, 2019). Tais trabalhos focaram em aproximar dados longitudinais de concentração de gases na atmosfera e de novos infectados por HIV. Os dados foram aproximados fazendo a extensão sup- J da solução clássica. Aqui a abordagem será diferente: resolver sistemas lineares.

Pretende-se encontrar solução para o sistema dois por dois $UX = V$, em que a matriz U tem entradas reais, o vetor V possui entradas dadas por números fuzzy triangulares, assim como o vetor X que se procura. As operações de soma são feitas considerando a interatividade dada pela distribuição de possibilidade conjunta J_γ (Esmi et al., 2018b).

Dado que um problema de mínimos quadrados pode ser solucionado pelo sistema $(U^tU)X = U^tV$. Se V possui n entradas – correspondentes aos dados do problema de mínimos quadrados –, então procurar a reta que aproxima os dados corresponde justamente a encontrar o vetor X de coeficientes, dado que a matriz U^tU é 2×2 .

Por fim, são aproximados dados longitudinais sobre a concentração de Ozônio na cidade de São Paulo. Os dados estatísticos são usados para produzir conjuntos fuzzy triangulares, que serão aproximados usando a solução de mínimos quadrados encontrada anteriormente.

O roteiro do trabalho é como segue. A seção 2 fornece as bases na teoria de interatividade fuzzy, a seção 3 propõe o algoritmo para solução do sistema linear fuzzy e a seção 4 usa tal algoritmo para produzir uma aproximação do tipo mínimos quadrados para um conjunto de dados longitudinais.

2. Interatividade fuzzy

Essa seção se dedica a introduzir notações de conceitos básicos da teoria de conjuntos fuzzy e adentra na noção de números fuzzy interativos juntamente com sua aritmética.

Um conjunto fuzzy A de um universo X é definido pela sua função de pertinência $A : X \rightarrow [0, 1]$, em que $A(x)$ representa o grau de pertinência de x em A (Zadeh, 1965). A classe de subconjuntos fuzzy sobre X é denotada por

$\mathcal{F}(X)$. Os subconjuntos clássicos são casos particulares de subconjuntos fuzzy.

Os α -cortes de um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$, denotados por $[A]^\alpha$ são definidos pelos seguintes conjuntos clássicos $[A]^\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$, $\forall \alpha \in (0, 1]$ (Barros et al., 2017) Além disso, se X é um espaço topológico, então o 0-corte de A é dado por $[A]^0 = cl\{x \in X : A(x) > 0\}$, sendo $cl Y$, $Y \subseteq X$, o fecho de Y .

A classe de números fuzzy, denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, estende o conjunto de números reais e o conjunto de intervalos fechados da reta real. Um conjunto fuzzy A de \mathbb{R} é chamado de número fuzzy se todos seus α -cortes são intervalos encaixantes fechados limitados não-vazios da reta para todos $\alpha \in [0, 1]$ (Barros et al., 2017). A partir disso é possível escrever os α -cortes do número fuzzy A como intervalos $[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$.

A classe de números fuzzy cujos extremos a_α^- e a_α^+ são contínuos com respeito à α é denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$. Todos os números fuzzy triangulares estão contidos em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$. Números fuzzy triangulares são dados por uma tripla $(a; b; c)$ para alguns $a \leq b \leq c$, e possuem α -cortes dados por $[A]^\alpha = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

O diâmetro de um número fuzzy A é dado por $diam(A) = a_0^+ - a_0^-$. Um número fuzzy é simétrico com respeito a $x \in \mathbb{R}$ se $A(x - y) = A(x + y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Se não há $x \in \mathbb{R}$ tal que essa propriedade é satisfeita, então A é chamado de não simétrico (Esmi et al., 2018a).

Uma relação fuzzy R entre dois universos X e Y é dada pela aplicação $R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, em que $R(x, y) \in [0, 1]$ é o grau pelo qual $x \in X$ e $y \in Y$ estão relacionados. Uma relação $X = X_1 \times \dots \times X_n$ nada mais é do que um (sub)conjunto fuzzy de X .

Uma relação fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta (DPC) entre os números fuzzy $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ se

$$A_i(y) = \bigvee_{x: x_i=y} J(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ (Dubois e Prade, 1981).

Um exemplo de DPC é aquela baseada em t -norma. Seja t uma t -norma, isto é, um operador $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ crescente, comutativo, associativo e que satisfaz $t(x, 1) = xt1 = x$ para todos $x \in [0, 1]$. Por exemplo a t -norma do mínimo, $t = \wedge$. A relação fuzzy J_t dada por

$$J_t(x_1, \dots, x_n) = A_1(x_1) t \dots t A_n(x_n) \quad (2)$$

é chamada de DPC de $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ baseada em t -norma.

Definição 1 *Os números fuzzy A_1, \dots, A_n são não interativos se a equação (1) é satisfeita para $J = J_{\wedge}$. Caso contrário, isto é, se J satisfaz (1) e $J \neq J_{\wedge}$, então A_1, \dots, A_n são ditos interativos.*

A definição 1 esclarece que a interatividade entre números fuzzy A_1, \dots, A_n é fruto do, e está atrelada ao, conceito de distribuições de possibilidade conjunta. O conceito de interatividade se assemelha à dependência no caso de variáveis aleatórias (Zadeh, 1975).

O princípio de extensão sup- J é uma ferramenta matemática para estender funções clássicas em funções fuzzy, além de incluir a interatividade entre os números fuzzy envolvidos.

Definição 2 (Princípio de extensão sup- J (Fullér e Majlender, 2004; Carlsson et al., 2004)) *Seja $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta de $(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. A extensão sup- J de f em $(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$, denotada por $f_J(A_1, \dots, A_n)$, é o conjunto fuzzy definido por:*

$$f_J(A_1, \dots, A_n)(y) = \bigvee_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} J(x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

em que $f^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ e $\bigvee \emptyset = 0$, por definição.

Note que, se os números fuzzy A_1, \dots, A_n são não interativos, então o princípio de extensão sup- J recai no princípio de extensão de Zadeh (Zadeh, 1975). Em outras palavras, o princípio de extensão sup- J se trata de uma generalização do princípio de extensão de Zadeh. Através do princípio de extensão sup- J é possível definir uma aritmética para números fuzzy interativos, considerando f como um operador aritmético.

Existem outros tipos de interatividade além daquelas obtidas através das DPCs baseadas em t -normas (Fullér e Majlender, 2004; Esmi et al., 2018b). Esmi et al. (2018b) empregaram uma família parametrizada de distribuições de possibilidade conjunta $\mathcal{J} = \{J_{\gamma} : \gamma \in [0, 1]\}$ com o propósito de definir adição entre números fuzzy interativos. O parâmetro $\gamma \in [0, 1]$ controla o grau de interatividade entre os números fuzzy considerados.

Sejam A_1 e A_2 números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ e g_{\wedge}^i, g_{\vee}^i e v^i definidas por

$$g_{\wedge}^i(z, \alpha) = \bigwedge_{w \in [A_{3-i}]^{\alpha}} |w + z|, \quad g_{\vee}^i(z, \alpha) = \bigvee_{w \in [A_{3-i}]^{\alpha}} |w + z| \quad (4)$$

e

$$v^i(z, \alpha, \gamma) = (1 - \gamma)g_{\wedge}^i(z, \alpha) + \gamma g_{\vee}^i(z, \alpha), \quad (5)$$

para todos $z \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, 1]$ e $i \in \{1, 2\}$. Note que a função $v^i(z, \alpha, \gamma)$, em z , é crescente em relação à γ .

Considere também os conjuntos R_{α}^i e $L^i(z, \alpha, \gamma)$ definidos por

$$R_{\alpha}^i = \begin{cases} \{a_{i_{\alpha}}^-, a_{i_{\alpha}}^+\} & \text{se } \alpha \in [0, 1) \\ [A_i]^1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e

$$L^i(z, \alpha, \gamma) = [A_{3-i}]^{\alpha} \cap [-v^i(z, \alpha, \gamma) - z, v^i(z, \alpha, \gamma) - z].$$

Note também que, para cada z , o intervalo $L^i(z, \alpha, \gamma)$ aumenta quando γ assume valores cada vez mais próximos de 1, devido a função $v^i(z, \alpha, \gamma)$ ser crescente em γ .

A função de pertinência de J_{γ} é, então definida, para cada $\gamma \in [0, 1]$, por

$$J_{\gamma}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in P(\gamma) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

com

$$P(\gamma) = \bigcup_{i=1}^2 \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} P^i(\gamma, \alpha),$$

sendo $P^i(\gamma, \alpha)$ definido para todo $i \in \{1, 2\}$, $\gamma \in [0, 1]$ e $\alpha \in [0, 1]$, por

$$P^i(\gamma, \alpha) = \{(x_1, x_2) : x_i \in R_{\alpha}^i \text{ e } x_{3-i} \in L^i(x_i, \alpha, \gamma)\}.$$

O conjunto P estabelece quais pares $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfazem $J_0(x_1, x_2) > 0$. Como P é um subconjunto próprio de \mathbb{R}^2 , é verdade que J_0 é um subconjunto próprio de J_{\wedge} (Wasques et al., 2020a).

Esmi et al. (2018b) provaram que a relação fuzzy J_{γ} é, de fato, uma DPC de A_1 e A_2 . Além disso, a DPC (6), por construção, não possui restrições, ou seja, é passível de ser considerada para qualquer par de números fuzzy.

Sussner et al. (2016) aplicaram translações nos números fuzzy para criar uma nova família de DPCs parametrizadas.

Definição 3 *Seja $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A translação de A por $k \in \mathbb{R}$ é definida pelo número fuzzy $\tilde{A}(x) = A(x + k)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1 (Sussner et al. (2016)) Dados $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Seja $\tilde{A}_i \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $\tilde{A}_i(x) = A_i(x + c_i)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2$. Seja \tilde{J}_{γ} a distribuição de possibilidade conjunta de $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida na Equação (6). A relação fuzzy J_{γ}^c dada por

$$J_{\gamma}^c(x_1, x_2) = \tilde{J}_{\gamma}(x_1 - c_1, x_2 - c_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (7)$$

é uma distribuição de possibilidade conjunta de A_1 e A_2 .

Doravante a distribuição de possibilidade conjunta usada nesse trabalho será a fornecida no teorema 1 com translações dadas pelos pontos médios dos α -cortes 1 de cada número fuzzy. Por simplicidade de notação a DPC J_{γ}^c será denotada por J_{γ} .

Através do princípio de extensão sup- J é possível estabelecer uma aritmética para números fuzzy interativos segundo uma DPC J . A adição e a subtração são dadas respectivamente por

$$(A_1 +_J A_2)(y) = \bigvee_{x_1+x_2=y} J(x_1, x_2) \quad (8)$$

e

$$(A_1 -_J A_2)(y) = \bigvee_{x_1-x_2=y} J(x_1, x_2), \quad (9)$$

em que J é uma DPC arbitrária de A_1 e A_2 .

Para o caso em que $J = J_{\gamma}$ as operações definidas em (8) e (9) são denotadas por $A_1 +_{\gamma} A_2$ e $A_1 -_{\gamma} A_2$, respectivamente. Os seguintes exemplos ilustram propriedades especiais que essas operações aritméticas possuem.

Exemplo 1 Sejam $A_1 = (1; 2; 3)$ e $A_2 = (2; 3; 4)$ números fuzzy triangulares. Então

$$A_1 +_0 A_2 = 5,$$

em que 5 representa o número fuzzy 5, cuja função de pertinência é dada pela função característica $\chi_{\{5\}}$.

Exemplo 2 Sejam $A_1 = (1; 2; 4)$ e $A_2 = (2; 3; 4)$ números fuzzy triangulares. Então

$$A_1 +_0 A_2 = (5; 5; 6).$$

Exemplo 3 Sejam $A_1 = (1; 2; 3)$ e $A_2 = (4; 6; 8)$ números fuzzy triangulares. Então

$$A_1 +_0 A_2 = (7; 8; 9).$$

O exemplo 1 mostra que pela soma interativa, via J_0 , é possível obter um número real como resultado da soma de dois números fuzzy, o que não ocorre com a soma usual. Também pode ocorrer, como se nota no exemplo 2, que o resultado da adição seja um número triangular da forma $(a; b; c)$ com $a = b$ ou $b = c$. Por fim, o exemplo 3 mostra que a soma também pode resultar em $(a; b; c)$ com $a < b < c$.

Exemplo 4 *Sejam $A_1 = (4; 5; 6)$ e $A_2 = (1; 2; 3)$ números fuzzy triangulares. Então*

$$A_1 -_0 A_2 = 3,$$

em que 3 representa o número fuzzy 3, dado pela função característica $\chi_{\{3\}}$.

Exemplo 5 *Sejam $A_1 = (4; 5; 7)$ e $A_2 = (1; 2; 3)$ números fuzzy triangulares. Então*

$$A_1 +_0 A_2 = (3; 3; 4).$$

Exemplo 6 *Sejam $A_1 = (4; 6; 8)$ e $A_2 = (1; 2; 3)$ números fuzzy triangulares. Então*

$$A_1 -_0 A_2 = (3; 4; 5).$$

Assim como ocorre com a soma, a diferença também pode resultar em um número real, em um número fuzzy triangular com $a = b$ ou $b = c$, ou ainda, em um número fuzzy triangular tal que $a < b < c$.

Note que nos exemplos 5 e 6 as seguintes igualdades são válidas

$$A_1 -_0 A_2 = A_1 -_g A_2 = A_1 -_{gH} A_2 = A_1 -_H A_2, \quad (10)$$

em que as diferenças $-_H$, $-_{gH}$ e $-_g$ representam, respectivamente, as diferenças de Hukuhara, Hukuhara generalizada e generalizada (Bede e Stefanini, 2013).

De fato, se existe a diferença de Hukuhara entre dois números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$, então as igualdades em (10) são sempre satisfeitas (Wasques et al., 2020a). Isto significa que a diferença de Hukuhara e suas generalizações são casos particulares da aritmética interativa.

3 Sistemas lineares fuzzy

Serão aqui considerados sistemas da forma

$$UX = V, \quad (11)$$

em que $U = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ com X_1 e X_2 números fuzzy triangulares $X_1 = (a; b; c)$ e $X_2 = (d; e; f)$, e $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ com V_1 e V_2 também números fuzzy triangulares $V_1 = (r; s; t)$ e $V_2 = (u; v; w)$. Além disso, as operações serão dadas pelo J_γ para $\gamma = 0$. Em termos de modelagem é mais coerente pedir que X_1 e X_2 satisfaçam $a < b < c$ e $d < e < f$.

Escrito por extenso o sistema fica

$$\begin{cases} \alpha_{11}(a; b; c) +_0 \alpha_{12}(d; e; f) = (r; s; t) \\ \alpha_{21}(a; b; c) +_0 \alpha_{22}(d; e; f) = (u; v; w) \end{cases}. \quad (12)$$

O algoritmo será feito com base no seguinte teorema, que explicita como se dá a soma para J_γ para $\gamma = 0$.

Teorema 2 (Wasques et al. (2020b)) *Sejam $A = (a; b; c)$ e $B = (d; e; f)$ números fuzzy triangulares. Seja J_0 a distribuição de possibilidade conjunta entre A e B dada por (7). Então a soma é dada por*

$$A+_0B = \begin{cases} ((a+f) \wedge (b+e); b+e; (b+e) \vee (c+d)), & \text{se } \text{diam}(A) \geq \text{diam}(B), \\ ((c+d) \wedge (b+e); b+e; (b+e) \vee (a+f)), & \text{se } \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B). \end{cases} \quad (13)$$

O algoritmo será separado conforme o sinal das entradas α_{ij} . Para cada caso a busca pela solução passa por resolver alguns sistemas lineares clássicos: um fixo e outros específicos de cada caso. Nem todas as soluções dos sistemas clássicos formarão uma solução para (11). Uma solução para (11) deve satisfazer $a < b < c$ e $d < e < f$.

Passo 1 Resolver o sistema

$$U \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Passo 2 Se $\alpha_{ij} \geq 0$, ou $\alpha_{ij} \leq 0$, ou $\alpha_{11}, \alpha_{12} \geq 0$ e $\alpha_{21}, \alpha_{22} \leq 0$, ou $\alpha_{11}, \alpha_{12} \leq 0$ e $\alpha_{21}, \alpha_{22} \geq 0$ resolver os sistemas $Ux_1 = b_1$ e $Ux_2 = b_2$, com x_1, x_2 e b_1, b_2 dados conforme a tabela 1.

Tabela 1: Sistemas a serem resolvidos conforme os sinais dos coeficientes da matriz U .

Sinal de α_{ij}	Sistemas a serem resolvidos
$\alpha_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2$ ou $\alpha_{ij} \leq 0, i, j = 1, 2$ ou $\alpha_{11}, \alpha_{12} \geq 0$ e $\alpha_{21}, \alpha_{22} \leq 0$ ou $\alpha_{21}, \alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{11}, \alpha_{12} \leq 0$	$U \begin{bmatrix} a \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix}$; e
	$U \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} a \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix}$; e
	$U \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} a \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$; e
	$U \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} a \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix}$
$\alpha_{11}, \alpha_{21} \geq 0$ e $\alpha_{12}, \alpha_{22} \leq 0$ ou $\alpha_{11}, \alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{12}, \alpha_{21} \leq 0$ ou $\alpha_{12}, \alpha_{21} \geq 0$ e $\alpha_{11}, \alpha_{22} \leq 0$ ou $\alpha_{12}, \alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{11}, \alpha_{21} \leq 0$	$U \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix}$; e
	$U \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$; e
	$U \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$; e
	$U \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$ e $U \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix}$

Passo 3 Se apenas um elemento α_{ij} tem sinal diferente dos demais, então devem ser resolvidos 4 sistemas lineares do tipo $Z_k x = z$, em que $x = [a, c, d, f]^t$, $z = [r, u, t, w]^t$ e a matriz Z_k é uma das quatro matrizes dadas na Tabela 2.

Tabela 2: Matrizes dos sistemas a serem resolvidos conforme os sinais dos coeficientes da matriz U .

Sinal de α_{ij}	Matrizes dos sistemas a serem resolvidos
$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21} \geq 0$ e $\alpha_{22} \leq 0$ ou $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{21} \leq 0$	$Z_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix},$
	$Z_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & 0 \end{bmatrix},$
	$Z_3 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix},$
	$Z_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} \\ \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & 0 \end{bmatrix}.$
$\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{12} \leq 0$ ou $\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{11} \leq 0$	$Z_5 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{22} \\ \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \end{bmatrix},$
	$Z_6 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix},$
	$Z_7 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{22} \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \end{bmatrix},$
	$Z_8 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$
$\alpha_{11} \geq 0$ e $\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \leq 0$	Z_5, Z_6, Z_7 e Z_8
$\alpha_{12} \geq 0$ e $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \leq 0$	
$\alpha_{21} \geq 0$ e $\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \leq 0$	Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4
$\alpha_{22} \geq 0$ e $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \leq 0$	

Passo 4 Se $a \leq b \leq c$ e $d \leq e \leq f$, então o vetor $[(a; b; c), (d; e; f)]^t$ é solução para (11). Caso contrário, as triplas $(a; b; c)$ e $(d; e; f)$ não representam uma solução para o sistema (11).

Se a matriz U é não-singular, então existe solução para a equação (11). No entanto, a priori, mesmo U sendo não singular pode ser que o sistema (11) tenha múltiplas soluções. Os exemplos a seguir são para ilustrar essa discussão.

Exemplo 7 *Seja o sistema*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1; 2; 3) \\ (3; 4; 5) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Primeiramente, encontram-se os valores b e e através do sistema da Equação (14). Os valores são $b = 0$ e $e = 2$. Como a matriz do sistema possui todas entradas positivas, então são resolvidos os quatro sistemas da primeira linha da tabela 1. Três das soluções encontradas não satisfazem $a \leq b \leq c$ e $d \leq e \leq f$, logo a única solução para este problema é dada por $X_1 = (-1; 0; 1)$ e $X_2 = (1; 2; 3)$.

Exemplo 8 *Seja o sistema*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/3; 2; 7) \\ (2/3; 1; 2) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Note que a matriz permanece a mesma de (15), apenas o vetor V está diferente. Resolvendo o sistema em (14) se obtém $b = 1$ e $e = 0$. Novamente, resolvendo os sistemas da primeira linha da tabela 1, encontram-se duas soluções válidas: $X = [(0; 1; 4), (-1; 0; 1/3)]^t$ e $X = [(4/9; 1; 40/9), (17/9; 0; 11/9)]^t$.

Comparando os Exemplos 7 e 8 se nota que embora a matriz fosse a mesma – e não singular – o sistema ora teve uma solução, ora teve duas. A unicidade de solução depende, portanto, também do vetor V à direita da equação.

Exemplo 9 *Seja o sistema*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1; 2; 3) \\ (-5; -4; -3) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Pela equação (14) se obtém $b = 0$ e $e = 0$. Como apenas $\alpha_{22} < 0$ e os demais α_{ij} são positivos, recai no caso da primeira linha da tabela 2. Resolvendo os quatro sistemas $Z_k x = z$ é encontrada apenas uma solução válida, dada por $X_1 = (-1; 0; 1)$ e $X_2 = (1; 2; 3)$. As demais soluções são satisfazem $a \leq b \leq c$ e $d \leq e \leq f$.

Exemplo 10 *Seja o sistema*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/3; 2; 23/3) \\ (2/3; 1; 10/3) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Nesse caso $b = 2$ e $e = 1$. Resolvendo os quatro sistemas da primeira linha da Tabela 2 se obtém duas soluções válidas. São elas: $X = [(0; 1; 4), (-1/3; 0; 1/3)]^t$ e $X = [(8/9; 1; 44/9), (-19/9; 0; 19/9)]^t$.

Note que, mais uma vez, a matriz dos Exemplos 9 e 10 é a mesma e é não singular, porém pode levar a unicidade, ou não, de soluções. Novamente se percebe a dependência do vetor à direita V .

Observando a Tabela 1 é possível notar que nos casos da primeira linha e satisfazendo as condições $a \leq b \leq c$ e $d \leq e \leq f$, apenas quatro dos sistemas levarão a uma solução fuzzy para a Equação (11), isso significa que há no máximo duas soluções para o sistema.

Outro comentário pertinente é sobre a simetria dos números fuzzy X_1 e X_2 . Nota-se que as distâncias $b - a$ e $c - b$ estão ora relacionadas com $f - e$, ora com $e - d$. Em outras palavras, o uso da aritmética por J_0 sempre implica na simetria dos números fuzzy encontrados.

4. Mínimos quadrados fuzzy

Essa seção apresenta uma aplicação do sistema linear estudado.

Seja o conjunto de dados $D = \{(x_1, Y_1), \dots, (x_m, Y_m)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, em que os dados Y_1, \dots, Y_m são números fuzzy triangulares relacionados segundo a distribuição de possibilidade conjunta J_0 . O objetivo é encontrar uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ de modo que $\phi(x_i)$ seja uma aproximação para Y_i . Aqui supõe-se que tal função ϕ é linear, ou seja,

$$\phi(x) = C_1 x + C_2,$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, sendo denotados por $C_1 = (a; b; c)$ e $C_2 = (d; e; f)$.

Como procura-se que $\phi(x_i) = Y_i$, obtém-se, então o sistema

$$WC = Y,$$

em que $W = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}$.

Procedendo analogamente ao que é feito no caso clássico, pode-se multiplicar ambos os lados por W^t , obtendo então o sistema

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + \dots + x_m^2 & x_1 + \dots + x_m \\ x_1 + \dots + x_m & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 Y_1 + 0 \dots + 0 x_m Y_m \\ Y_1 + 0 \dots + 0 Y_m \end{bmatrix}. \quad (19)$$

O novo sistema em (19), está na forma $UC = V$, em que $U = W^t W$ e $V = W^t y$ e pode ser resolvido pelo algoritmo sugerido.

Em particular, usando os dados de poluição do ar por ozônio na cidade de São Paulo entre os anos 1994 e 1997 (Conceição et al., 2001), como em (Pinto et al., 2018), tem-se os dados como na Tabela 3.

Tabela 3: Conjunto de dados fuzzy.

x :	1	2	3	4
Y :	(17, 6; 57; 96, 4)	(25, 3; 60, 7; 96, 1)	(34, 8; 76, 3; 117, 8)	(29, 5; 63; 96, 5)

Nesse caso a matriz o sistema encontrado é da forma

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (618, 4; 659, 3; 700, 2) \\ (253; 257; 261) \end{bmatrix} \quad (20)$$

e se enquadra no caso da primeira linha da Tabela 1.

Os valores de b e e são, respectivamente, 3,36 e 55,85. Através da solução dos 4 primeiros sistema da Tabela 1 se obtém duas soluções C . São os vetores $C^1 = \begin{bmatrix} (-2, 82; 3, 36; 9, 54) \\ (41, 4; 55, 85; 70, 3) \end{bmatrix}$ e $C^2 = \begin{bmatrix} (-6, 82; 3, 36; 13, 54) \\ (29, 4; 55, 85; 82, 3) \end{bmatrix}$.

Em outras palavras, são encontradas duas funções ϕ_1 e ϕ_2 que aproximam os dados fornecidos. São elas:

$$\phi_1 = (-2, 82; 3, 36; 9, 54)x + (41, 4; 55, 85; 70, 3),$$

$$\phi_2 = (-6, 82; 3, 36; 13, 54)x + (29, 4; 55, 85; 82, 3).$$

Aplicando os dados nas funções ϕ_1 e ϕ_2 obtemos os resultados constantes na Tabela 4. Nota-se que para $x = 3$ as funções ϕ_1 e ϕ_2 obtiveram o mesmo resultado. Nos demais casos o que se percebe é que a função ϕ_1 possui *diam* menor que *diam* ϕ_2 , dessa forma ϕ_2 consegue refletir melhor os *diam* dos dados Y .

Tabela 4: Conjunto de dados e resultados fuzzy.

x	Y	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$
1	(17, 6; 57; 96, 4)	(50, 94; 59, 21; 67, 48)	(42, 94; 59, 21; 75, 48)
2	(25, 3; 60, 7; 96, 1)	(60, 48; 62, 57; 64, 66)	(56, 48; 62, 57; 68, 66)
3	(34, 8; 76, 3; 117, 8)	(61, 84; 65, 93; 70, 02)	(61, 84; 65, 93; 70, 02)
4	(29, 5; 63; 96, 5)	(59, 02; 69, 29; 79, 56)	(55, 02; 69, 29; 83, 56)

Nas Figuras 1 e 2 pode-se observar as curvas ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente. Observa-se que o diâmetro das funções é bem menor que o diâmetro dos dados, fenômeno esse observado em equações diferenciais fuzzy (Wasques et al., 2019).

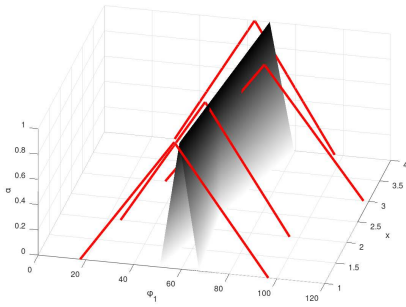


Figura 1: Aproximação $\phi_1(x)$

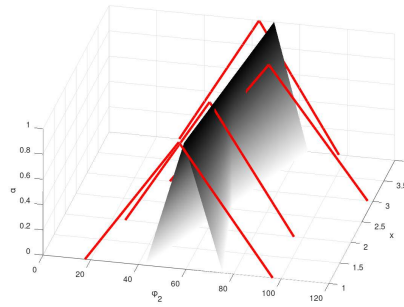


Figura 2: Aproximação $\phi_2(x)$

Em vermelho são os dados referentes à tabela 3. As superfícies em tons de cinza representam as soluções geradas a partir do algoritmo para solucionar sistemas lineares.

O achatamento do diâmetro nas simulações de equações diferenciais é encarado como vantajoso, porém no caso de aproximação dos dados por uma curva leva à perda de informações sobre a incerteza dos dados. Esse resultado sugere que outros valores de $\gamma \in (0, 1]$ podem levar a aproximações que capturem

melhor a incerteza dos dados de saída.

5. Considerações finais

Considerando a aritmética para números fuzzy interativos, foi fornecido um algoritmo para busca de soluções para um sistema linear 2×2 com coeficientes reais, vetor de incógnitas e vetor à direita compostos por números fuzzy triangulares. Foi feita uma discussão sobre a unicidade de soluções, bem como a simetria das soluções. Tais resultados foram utilizados para simular a aproximação afim para um conjunto de dados fuzzy, reproduzindo o método de mínimos quadrados clássico.

A aritmética J_0 gerou um resultado com diâmetro menor que os dados aproximados e, por esse motivo, o próximo passo da pesquisa é reproduzir os mesmos resultados para outras aritméticas do tipo J_γ com valores de $\gamma \in (0, 1]$, e analisar para qual γ a aproximação obtida reflete a incerteza dos dados.

O passo seguinte é considerar adições associativas, para obter aproximações de ordem superior. Sobre os dados de concentração de Ozônio na cidade de São Paulo, pode-se concluir que o controle do diâmetro pela distribuição de possibilidade conjunta J_γ não gerou bons resultados.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro da CAPES 1691227, FAPESP 2016/26040-7 e CNPq 306546/2017-5.

Referências

- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2017). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin.
- Bede, B. e Stefanini, L. (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 230:119–141.
- Carlsson, C., Fullér, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *2004 IEEE International Conference on Fuzzy*

- Systems (IEEE Cat. No.04CH37542)*, volume 1, páginas 535–539, Budapest, Hungary. IEEE.
- Conceição, G. M. S., Miraglia, S. G. E. K., Kishi, H. S., Saldiva, P. H. N., e Singer, J. M. (2001). Air pollution and child mortality: A time-series study in São Paulo, Brazil. *Environmental Health Perspectives*, 109:347–350.
- Dubois, D. e Prade, H. (1981). Additions of interactive fuzzy numbers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):926–936.
- Esmi, E., Pedro, F. S., Barros, L. C., e Lodwick, W. (2018a). Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function. *Information Sciences*, 435:150–160.
- Esmi, E., Sussner, P., Ignácio, G. B. D., e de Barros, L. C. (2018b). A parametrized sum of fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 331:85–104.
- Fullér, R. e Majlender, P. (2004). On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(3):355–369.
- Pinto, N. J. B., Esmi, E., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2019). Least square method with quasi linearly interactive fuzzy data: Fitting an hiv dataset. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications. IFSA/NAFIPS 2019 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 1000, páginas 177–189. Springer, Cham.
- Pinto, N. J. B., Wasques, V. F., Esmi, E., e Barros, L. C. (2018). Least squares method with interactive fuzzy coefficient: Application on longitudinal data. In *Fuzzy Information Processing*, páginas 132–143. Springer.
- Sussner, P., Esmi, E. L., e Barros, L. C. (2016). Controlling the width of the sum of interactive fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, páginas 1453–1460.
- Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., e Bede, B. (2019). Comparison between numerical solutions of fuzzy initial-value problems via interactive and standard arithmetics. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications. IFSA/NAFIPS 2019 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 1000, páginas 704–715, Lafayette. Springer, Cham.

- Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., e Sussner, P. (2020a). The generalized fuzzy derivative is interactive. *Information Sciences*, 519:93–109.
- Wasques, V. F., Pinto, N. J. B., Esmi, E., e Barros, L. C. (2020b). Consistence of interactive fuzzy initial conditions. In *Fuzzy Information Processing, Proceedings of NAFIPS'2020*.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353.
- Zadeh, L. A. (1975). Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - i. *Information Sciences*, 8:199–249.

