Biomatemática **32** *(2022), 141–164* ***ISSN 1679-365X***
Uma publicação do grupo de Biomatemática IMECC – Unicamp

Tópicos sobre medidas e integrais *fuzzy*

Alberto Martins.[1], Rodney C. Bassanezi.[2]
DMA – IMECC – Unicamp, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Michio Sugeno em sua tese de doutorado (Sugeno, 1974), desenvolveu as integrais *fuzzy* com aplicações. Comparou essa integral com a de Lebesgue concluindo que a diferença entre ambas em valor absoluto não supera $\frac{1}{4}$. Desenvolveu propriedades, lemas, teoremas, corolários, contribuindo para a construção de um Cálculo Diferencial e Integral *Fuzzy*. Nesse artigo propomos algumas extensões desses resultados através de implementações das medidas: *fuzzy* (ou de Sugeno), *fuzzy* generalizada (sem a condição de continuidade), probabilidade (Cabral, 2016) e possibilidade (Gerônimo, 1988). Apresentamos a integral *fuzzy* como processo para obtenção de uma média (tipo ponderada), utilizada para desfuzificar conjuntos *fuzzy* no contexto da inferência de Mamdani (Barros e Bassanezi, 2010; Kandel, 1986). Definimos sua versão generalizada, comparando-as e introduzindo interpretações e formulações geométricas. Explicitamos a relação existente entre essas integrais e os pontos fixos das funções que medem α-níveis. Demonstramos que a medida do lado do maior quadrado subscrito ao gráfico da função "medida dos α-níveis", coincide com o valor da integral *fuzzy*, caracterizando uma interpretação geométrica para a mesma. Finalmente, apresentamos organograma que relaciona as medidas, exemplificando-as com funções e integrais específicas.

Palavras-chave: *Medida fuzzy, possibilidade, probabilidade, integral fuzzy.*

1. Conceito de medir

Uma ideia preliminar sobre "medir" grandezas, pode ser pensada em fixar um padrão de representação, em seguida buscar comparações, estabelecer propriedades relacionadas aos objetos a serem mensurados. Por exemplo, pode-se

[1]albertomar@uol.com.br
[2]rodneyb@unicamp.br

avaliar um subconjunto de números pela quantidade de elementos que possui ou pelo maior valor entre eles, dependendo do interesse a ser previamente fixado.

Demonstramos que se uma medida de possibilidade for *fuzzy* (Sugeno), sua distribuição de possibilidade será obrigatoriamente nula em todos os valores que for continua, fato que não ocorre para medida *fuzzy* generalizada.

Esse capítulo foi estabelecido como pré-requisito para os estudos das integrais e o Cálculo Diferencial e Integral no contexto *fuzzy*

Seguem as formalizações dos tópicos destacados.

Definição 1.1 *Seja* $X \neq \emptyset$ *um conjunto qualquer e* $\mathcal{F} \subset 2^X$*, uma família de sub-conjuntos de* X*, contida no conjunto das partes de* X*,* $\mathcal{F}$ *é chamada de* σ*-álgebra sobre* X*, ou* σ*-álgebra em* X*, se forem verificadas as condições:*

(a.1) $X \in \mathcal{F}$.

(a.2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \subset \mathcal{F}$, *em que* A^C *é o complemento de* A.

(a.3) $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

O par $(X, \mathcal{F})$ *é chamado de espaço* $\mathcal{F}$*-mensurável. Um elemento qualquer* $B \in \mathcal{F}$ *é chamado de conjunto* $\mathcal{F}$*-mensurável.*

2. Medidas *fuzzy*

Definição 2.1 *Seja* $X \neq \emptyset$ *um conjunto qualquer e* $F_i \subset X$*, para* $1 \leq i < +\infty$*, subconjuntos de* X *tais que:*

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \quad ou \quad F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots.$$

Denominamos $\{F_n\}, n \in \mathbb{N}^*$*, respectivamente de* ***sequência monótona não decrescente*** *(SMC), e de* ***sequência monótona não crescente*** *(SMD).*

Definição 2.2 *Seja* $\{F_n\}$ *uma SMC, diremos que* L *será o limite de* F_n *quando* $n \to +\infty$*, ou*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n = L$$

se e somente se: $F_n \subset L, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *e se existir um conjunto* A *tal que* $F_n \subset A, \forall n \in \mathbb{N}^*$*, então* $L \subset A$.

Seja $\{F_n\}$ uma SMD, diremos que M será o limite de F_n quando $n \to +\infty$, ou

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = M$$

se e somente se: $M \subset F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ e se existir um conjunto B tal que $B \subset F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, então $M \supset B$.

Em outras palavras:

Caso1: L é o "menor" conjunto que contém todos os F_n, ou ainda a união dos conjuntos.

Caso2: M é o "maior" conjunto que está contido em todos os F_n, ou ainda, a interesecção dos conjuntos.

Definição 2.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de sub-conjuntos de $X \neq \emptyset$. Diremos que, $\mathcal{F}$ é* ***monótona*** *se, e somente se,*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

(ii) *Se $\{F_n\}$ for SMC ou SMD e $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$, então $\lim_{n\to+\infty} F_n \in \mathcal{F}$.*

A definição de medida *fuzzy* tem sido usualmente apresentada sob os aspectos:

- De Sugeno, os axiomas são: o conjunto vazio e o espaço todo possuem medidas zero e hum respectivamente, e seja monótona, satisfazendo uma condição de continuidade (lateral).
- Outro, com as mesmas exigências, a menos da **continuidade**.

Ou seja, os axiomas comuns são:

- as medidas do conjunto vazio e do espaço sendo respectivamente 0 e 1;
- medida monótona.

Ressaltamos que Sugeno definiu sua medida sobre o espaço das "famílias monótonas $\mathcal{F}$", e facilmente pode ser provado que $\mathcal{F}$ equivale a uma σ-álgebra.

Seguem as formalizações.

Definição 2.4 *Seja $X \neq \emptyset$, e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra em X e seja g uma aplicação $g : \mathcal{F} \to [0, 1]$ com as propriedades:*

(a) $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$

(b) *Se* $A, B \in \mathcal{F}$ *e* $A \subset B$, *então* $g(A) \leq g(B)$

A aplicação g será chamada de ***medida fuzzy geral (MFG)****)sobre X.*

Definição 2.5 *Seja* $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$ *uma* σ*-álgebra em* X *e seja* g *uma aplicação* $g : \mathcal{F} \to [0,1]$ *com as propriedades:*

(a) $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$

(b) *Se* $A, B \in \mathcal{F}$ *e* $A \subset B$, *então* $g(A) \leq g(B)$

(c) *Se* $F_n \in \mathcal{F}$ *e* $\{F_n\}$ *é monótona, então*

$$\lim_{n \to +\infty} g(F_n) = g\left(\lim_{n \to +\infty} F_n\right).$$

A aplicação g será chamada de ***medida fuzzy (MF)****, ou de* ***(Sugeno)*** *sobre X.*

Definição 2.6 *A terna* $(X, \mathcal{F}, g)$ *nas condições descritas pelas definições anteriores será chamada de* ***espaço com medida fuzzy****.*

3. Medida de probabilidade

Definição 3.1 *Uma medida de probabilidade* $\mathcal{P}$ *em um conjunto não vazio X (****espaço amostral****), é definida em uma* σ*-álgebra* $\mathcal{F}$ *denominada de* ***espaço dos eventos*** *(Cabral, 2016; Kandel, 1986), ou seja,*
$\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ *que satisfaz:*

(i) $\mathcal{P}(X) = 1$

(ii) $\left[\{E_i\}_{i \in N^*} \subset \mathcal{F}, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j\right] \Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_i)$
(σ-aditividade)

4. Medida de possibilidade

Definição 4.1 *Seja* $X \neq \emptyset$ *com:*

- $\mathcal{A} \subset 2^X$, $\mathcal{A}$ *uma* σ*-álgebra sobre X.*

- *Para cada $A \in \mathcal{A}$, considere fixada uma função de pertinência φ_A, ou seja, (A, φ_A) um conjunto fuzzy em X e*

$$\begin{array}{rcl} \Pi : \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \Pi(A) = \sup\limits_{x \in A} \{\varphi_A(x)\}, \ \textit{com} \end{array}$$

  - $\star$ $\Pi(\emptyset) = 0$ *e* $\Pi(X) = 1$
  - $\star$ $\Pi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sup\{\Pi(A_i),\ i \in \mathbb{N}\}$ *com* $A_i \in \mathcal{A}$

Então Π *é denominada* ***medida de possibilidade****.*

4.1. Gerando medidas de possibilidade

Seja $X \neq \emptyset$ e $\varphi : X \to [0,1]$ uma aplicação qualquer com

$$\sup_{x \in X}, \{\varphi(x)\} = 1.$$

φ será denominada de **distribuição de possibilidades**.

Para cada $A \in 2^X$ considere a função:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_A : X & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \varphi_A(x) = \varphi(x) \end{array}$$

ou seja, φ_A é a restrição de φ em A e nula fora de A

Defina uma σ-álgebra sobre X, indicada por $\mathcal{A}$ e considere a medida:

$$\begin{array}{rcl} \Pi_\varphi : \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \Pi_\varphi(A) = \sup\limits_{x \in A}\{\varphi_A(x)\} \end{array}.$$

Proposição 4.1 Π_φ *é uma medida de possibilidade em $\mathcal{A}$.*

Demonstração 4.1

$$\Pi_\varphi(\emptyset) = \sup\{\varphi_\emptyset(x)\} = 0$$

$$\Pi_\varphi(X) = \sup\{\varphi(x)\} = 1.$$

Seja $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

$$\Pi_\varphi(\cup A_i) = \Pi_\varphi(A) = \sup_{x \in A}\{\varphi_A(x)\} =$$

$$= \sup_{x \in A}\{\varphi_{A_1}(x), \varphi_{A_2}(x), \ldots, \varphi_{A_n}(x), \ldots\} =$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{A}}\{\Pi_\varphi(A_i),\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Observação 4.1 Π_φ *é chamada de medida de possibilidade associada a* φ.

Proposição 4.2 *Dada uma medida de possibilidade*

$$\Pi : 2^X \to [0.1],$$

$X \neq \emptyset$, *então* Π *gera uma distribuição de possibilidade* φ_Π *em* X, *ou seja,*

$$\varphi_\Pi : X \to [0,1] \text{ com } \sup_{x \in X}\{\varphi_\Pi(x)\} = 1.$$

Demonstração 4.2 *Seja* $x \in X$, *defina:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\Pi : X & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \varphi_\Pi(x) = \Pi(\{x\}) \end{array}.$$

Como $\Pi(A) \in [0,1]$ *tem-se*

$$\varphi_\Pi(x) = \Pi(\{x\}) \in [0,1]$$

e sendo Π *medida de possibilidade* $\Pi(X) = 1$, *logo*

$$\sup_{x \in X}\{\varphi_\Pi(x)\} = 1.$$

Proposição 4.3 *Uma medida de possibilidade não é necessariamente uma medida fuzzy (Gerônimo, 1988).*

Demonstração 4.3 *Seja* $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{R}}$ *e*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \varphi(x) = 1 \end{array},$$

então a medida de possibilidade associada a distribuição φ *será:*

$$\begin{array}{rcl} \Pi_\varphi : \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \Pi_\varphi(A) = 1 \text{ (constante)}. \end{array}$$

Considere $A_i = \left(0, \frac{1}{i}\right)$, $i \in \mathbb{N}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *é SMD e* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, *logo* $\Pi_\varphi(\lim_{i \to +\infty}(A_i)) = \Pi_\varphi(\emptyset) = 0$ *e* $\lim_{i \to +\infty} \Pi_\varphi(A_i) = 1$.

Portanto, Π_φ *não satisfaz a condição (c) da definição de medida fuzzy.*

Entretanto, mostra-se facilmente que uma medida de possibilidade é uma medida fuzzy geral. Uma medida de probabilidade P *é uma medida fuzzy.*

Proposição 4.4 *Seja* $X \neq \emptyset$ *então toda medida de possibilidade definida em uma* σ*-álgebra finita* $\mathcal{A}$ *sobre* X *é uma medida fuzzy.*

Demonstração 4.4 *Seja* $\Pi : \mathcal{A} \to [0,1]$ *uma medida de possibilidade, logo* $\Pi(\emptyset) = 0$ *e* $\Pi(X) = 1$ *pela definição de* Π*. Sendo* $\mathcal{A}$ *finita, para sequencias SMC ou SMD,*

$$\{A_i\}_i \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^k,\ k \in N \Rightarrow$$

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^k A_i = \begin{cases} A_k \ se \ \{A_i\} \ SMC \\ A_1 \ se \ \{A_i\} \ SMD \end{cases}$$

logo

$$\Pi\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \begin{cases} \Pi(A_k) = \sup\{\Pi(A_i),\ i \in \mathbb{N}\} \\ \ ou \\ \Pi(A_1) = \sup\{\Pi(A_i),\ i \in \mathbb{N}\} \end{cases} \Rightarrow \Pi \text{ é medida fuzzy}$$

Proposição 4.5 *Seja* (M,d) *um espaço métrico não finito. Considere:*

- $\varphi : M \to [0,1]$ *uma distribuição de possibilidade*

- $$\begin{aligned} \Pi_\varphi : 2^M &\to [0,1] \\ A &\mapsto \Pi_\varphi(A) = \sup_{x\in A}\{\varphi(x)\} \end{aligned}$$

uma medida de possibilidade associada a φ *que seja medida fuzzy.*

Então, φ *será uma medida nula em todos os pontos que for contínua.*

Demonstração 4.5 *Seja* $\bar{x} \in M$ *e suponha que* φ *seja contínua em* $\bar{x}$*. Considerando a topologia usual em* M*, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $r(\bar{x}) > 0$ *tal que:*

$$[x \in B(\bar{x}, r(\bar{x})) \text{:(bola com centro em } \bar{x} \text{ e raio } r(\bar{x}))] \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(\bar{x})) < \epsilon.$$

Tome a sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*,*

$$A_n = \left\{x \in M :\ x \in B\left(x, \frac{1}{n}\right),\ x \neq \bar{x},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\{A_n\}$ *é SMD e como* Π_φ *é fuzzy,*

$$\lim_{n\in+\infty} \Pi_\varphi(A_n) = \Pi_\varphi\left(\lim_{n\in+\infty} A_n\right) = \Pi_\varphi(\{\emptyset\}) = 0.$$

Mas, por definição de Π_φ*,*

$$\Pi_\varphi(A_n) = \sup_{x\in A_n}\{\varphi\},$$

assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \Pi_\varphi(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A_n}\{\varphi(x)\} = \lim_{x\to\bar{x}} \varphi(x) \underset{em\ \bar{x}}{\overset{\varphi\ contínua}{=}} \varphi(\bar{x}) = 0.$$

Corolário 4.1 *Seja φ uma distribuição de possibilidade contínua, e Π_φ a medida de possibilidade associada a φ que seja também fuzzy. Então, para uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ não finita em X, Π_φ é nula ou seja,*

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi : \mathcal{A} &\rightarrow [0,1] \\ A &\mapsto \Pi_\varphi(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Demonstração 4.6 *(Imediata.)*

5. Integrais: *fuzzy* e *fuzzy* generalizada

Uma motivação para a criação da integral *fuzzy* (de Sugeno) foi estabelecer um processo de desfuzificação de um número *fuzzy* a partir de medidas que não fossem necessariamente σ-aditivas (Barros e Bassanezi, 2010). A ideia inicial sobre essa integral, foi estabelecer um valor que representasse uma espécie de média ponderada entre os níveis e as respectivas medidas dos α-níveis, utilizando a função grau de pertinência de um conjunto *fuzzy*.

A seguir, apresentamos a definição dada por Sugeno, e por intermédio do Teorema 5.1 (Sugeno, 1974), estabelecemos uma comparação entre essa definição e a concepção inicial descrita. Demonstramos o teorema que vincula o valor da integral *fuzzy* com o ponto fixo da função que mede os α-níveis. Desenvolvemos o teorema que explicita uma interpretação geométrica para integral *fuzzy*. Generalizamos o conceito da integral *fuzzy*, a partir da medida *fuzzy* generalizada. Apresentamos cálculos de várias integrais em situações diversas.

5.1. Integral *fuzzy*

Considere o triângulo isósceles de altura $h = 1$ u.m. (unidade de medida) e base $b = 1$ u.m. (ver figura 1(a)).

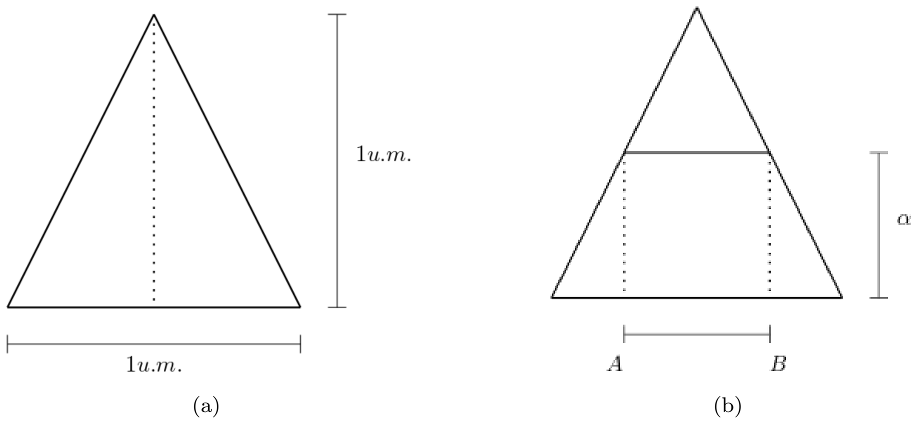


Figura 1: Triângulo isósceles em 1(a) e triângulo com α-nível em 1(b).

Construa sessões horizontais paralelas a base b do triângulo (veja figura 1(b)) e compare a altura α com a medida da seção (medida do segmento $\overline{AB}$) correspondente para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Identificando as simbologias:

F_α pelo segmento $\overline{AB}$
$g(F_\alpha)$ pela medida do segmento $\overline{AB}$

Essa comparação entre α e $g(F_\alpha)$ (medida da seção correspondente) será calculada por,

$$\alpha \wedge g(F_\alpha) : \text{ mínimo ou ínfimo entre eles.}$$

Note:

- para $\alpha = 0$, $g(F_\alpha) = 1$
- para $\alpha = 1$, $g(F_\alpha) = 0$.

Como α varia continuamente entre 0 e 1 percebe-se que para:

- $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, $\alpha < g(F_\alpha)$
- $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $\alpha > g(F_\alpha)$.

Assim, para $\alpha = \frac{1}{2}$, tem-se uma média entre a altura e a medida da seção, ou seja,

$$\alpha \wedge g(F_\alpha) = \frac{1}{2},$$

é o valor intermediário entre a altura e a medida da seção. Esse valor pode ser obtido, simplesmente tomando:

$$\max_{0\leq\alpha\leq 1}\{\alpha \wedge g(F_\alpha)\} \text{ (se } \alpha \text{ for finito) ou}$$
$$\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge g(F_\alpha)\}$$

Concluindo, reiteramos que

$$\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge g(F_\alpha)\}$$

representa uma média entre as medidas das sessões e das alturas correspondentes no triângulo isósceles. Esse conceito de média pode ser estendido mesmo que o triângulo não seja isósceles, ou ainda, a figura seja qualquer. A esse conceito de média denominamos de integral *fuzzy* referente a figura 1(b), sendo indicada por $\displaystyle{-\!\!\!\!\!\!\int} h \bullet g = \sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge g(F_\alpha)\}$.

Ainda, h pode ser dada por uma função de pertinência, g uma medida e a figura 1(b) sendo o gráfico de h com $h : [0,1] \to [0,1]$, $g : [0,1] \to [0,1]$. A função h pode representar um número *fuzzy* e a integral sendo sua desfuzificação.

Assim, o conceito de integral *fuzzy* representa uma alternativa de desfuzificação para um número *fuzzy*, completando a inferência de Mamdani.

No entanto, Sugeno em sua tese de doutorado, apresenta integral *fuzzy* através da seguinte definição.

Definição 5.1 *Seja $X \neq \emptyset$ e h uma aplicação definida no espaço fuzzy $(X, 2^X, g)$, tais que $h : X \to [0,1]$, $g : 2^X \to [0,1]$, g medida fuzzy, $2^X = \{\emptyset, X, A : A \subset X\}$: conjunto das partes de X. Indicamos por*

$$\int_A$$

a integral fuzzy sobre A, aplicada em $h(x)$ com medida fuzzy g, por:

$$\int_A h(x) \bullet g(\cdot) = \sup_{F\in 2^X}\left\{\left[\inf_{x\in F}\{h(x)\}\right] \wedge g(A\cap F)\right\}.$$

Teorema 5.1 *A integral fuzzy pode ser expressa da seguinte forma (Sugeno, 1974):*

$$\int_A h(x) \bullet g(\cdot) = \sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha \wedge g(A\cap F_\alpha)]$$

com $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$ (α-nível de h).

Demonstração 5.1 *Seja* $\alpha_F = \inf\limits_{x\in F} h(x)$, *então* $F \subset \{x : h(x) \geq \alpha_F\}$

$A \cap F \subset A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\}$

$\overset{g\ mon\acute{o}tona}{\Rightarrow} g(A \cap F) \leq g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})$

$\Rightarrow \left[\inf\limits_{X\in F} h(x)\right] \wedge g(A \cap F) \leq \left[\inf\limits_{X\in F} h(x)\right] \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})$

$$\Rightarrow \sup_{F\in 2^{\mathbb{R}}} \left\{\left[\inf_{X\in F} h(x)\right] \wedge g(A \cap F)\right\} \leq \sup_{F\in 2^{\mathbb{R}}} [\alpha_F \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})] \tag{5.1}$$

Mas, $\{\alpha_F\} \subset [0, 1]$ *e*

$$\begin{aligned} &\sup_{F\in 2^{\mathbb{R}}} [\alpha_F \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})] \\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha\})] \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha\})] \end{aligned}$$

Então,

$$\sup_{F\in 2^{\mathbb{R}}} [\alpha_F \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})] \leq \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha\})] \tag{5.2}$$

De (5.1) e (5.2) tem-se

$$\int h \bullet g(\cdot) \leq \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \tag{5.3}$$

Por outro lado, sendo $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$, *temos*

$$\alpha \leq \inf_{x\in F_\alpha} h(x),$$

logo

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \leq \sup_{\alpha\in[0,1]} \left[\left(\inf_{x\in F_\alpha} h(x)\right) \wedge g(A \cap F_\alpha)\right]. \tag{5.4}$$

Mas, $2^X \supset \{F_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$, *logo*

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \left[\left(\inf_{x\in F_\alpha} h(x)\right) \wedge g(A \cap F)\right] \leq \sup_{F\in 2^X} \left[\left(\inf_{x\in F_\alpha} h(x)\right) \wedge g(A \cap F)\right] =$$
$$= \int h \bullet g(\cdot).$$

Então,

$$\sup_{\alpha\in[0,1]}\left[\left(\inf_{x\in F_\alpha} h(x)\right)\wedge g(A\cap F)\right]\leq \int h\bullet g(\cdot). \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5) tem-se

$$\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge g(A\cap F_\alpha)]\leq \int h\bullet g(\cdot). \tag{5.6}$$

De (5.3) e (5.6) obtemos que

$$\int h\bullet g(\cdot)=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge g(A\cap F_\alpha)]. \tag{5.7}$$

Corolário 5.1 *Se $a\in[0,1]$ e $\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]<\sup_{\alpha\in(a,1]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]$, então*

$$\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]=a$$

Demonstração 5.2 *É claro que $\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]\leq a$.*

Vamos negar a tese e mostrar contradição.

Se $\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]\neq a$, então $\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]<a$. Assim, $a\wedge g(F_a)<a$, logo

$$a>g(F_a). \tag{5.8}$$

g é fuzzy $\Rightarrow$ g é monótona não crescente, e por (5.8) tem-se

$$[a\wedge g(F_a)]=g(F_a)\geq \sup_{\alpha\in(a,1]}[g(F_\alpha)]\geq \sup_{\alpha\in(a,1]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)].$$

mas

$$\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]\geq\ [a\wedge g(F_a)]\ \text{ e } [a\wedge g(F_a)]\geq \sup_{\alpha\in(a,1]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]$$

e concluímos que

$$\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]\geq \sup_{\alpha\in(a,1]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]\ \textit{absurdo!}$$

Portanto, $\sup_{\alpha\in[0,a]}[\alpha\wedge g(F_\alpha)]=a$.

Teorema 5.2 (Ponto fixo) *Seja $h:X\to[0,1]$ uma função grau de pertinência de um conjunto fuzzy e g uma medida fuzzy sobre X. Se,*

$$F_\alpha=\{x\in X:h(x)>\alpha\},\quad \alpha\in[0,1]$$

e

$$\begin{array}{rcl} H:[0,1] & \to & [0,1] \\ \alpha & \mapsto & H(\alpha)=g(F_\alpha) \end{array}$$

tiver um ponto fixo $\bar{\alpha} \in [0,1]$*, ou seja,*

$$H(\bar{\alpha}) = g(F_{\bar{\alpha}}) = \bar{\alpha},$$

então,

$$⨍ h \bullet g = \bar{\alpha}.$$

Demonstração 5.3

$$⨍ h \bullet g = \sup_{\alpha \in [0,\bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (\bar{\alpha},1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \qquad (5.9)$$

$$g(F_\alpha) \text{ é não crescente}$$

- *se* $\sup_{(\bar{\alpha},1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] > \sup_{[0,\bar{\alpha}])} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$*, então pelo Corolário 5.1, temos*

$$⨍ h \bullet g = \sup_{\alpha \in [0,\bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = \bar{\alpha}$$

- *caso contrário*

$$⨍ h \bullet g = \sup_{\alpha \in [0,\bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \geq \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}). \qquad (5.10)$$

Mas $\begin{array}{c} \alpha \in [0,\bar{\alpha}] \Rightarrow \alpha \wedge g(F_\alpha) \leq \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \wedge g(F_\alpha) \leq \bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}) \Rightarrow \\ \sup_{\alpha \in [0,\bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \leq \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}) \end{array}$

o que resulta em

$$⨍ h \bullet g \leq \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}). \qquad (5.11)$$

De (5.10) e (5.11) conclui-se

$$⨍ h \bullet g = \bar{\alpha}.$$

Teorema 5.3 *Seja* $(X, \mathcal{B}, g)$ *um espaço fuzzy,*

$$h : X \to [0,1], \quad F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in [0,1].$$

Se

$$\int_X h \bullet g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = M.$$

Então, M *é o lado do maior quadrado sob o gráfico:*

$$G = \{(\alpha, g(F_\alpha)) : \alpha \in [0,1]\}.$$

Demonstração 5.4 *Pela condição* ***c)*** *da Definição 2.5, se* $\mathcal{F}$ *é uma família monótona e* $\{F_n\}$ *é uma sequência monótona, então*

$$\lim_{n \to +\infty} g(F_n) = g\left(\lim_{n \to +\infty} F_n\right),$$

logo

$$\lim_{n \to +\infty} F_{M - \frac{1}{n}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{M - \frac{1}{n}} = F_M,$$

concluindo que

$$g(F_{M^-}) = \lim_{n \to +\infty} g\left(F_{M - \frac{1}{n}}\right) = g(F_M).$$

Note que

$$g(F_{M^+}) = g\left(\lim_{n \to +\infty} F_{M + \frac{1}{n}}\right) \neq g(F_M),$$

pois $\lim_{n \to +\infty} F_{M + \frac{1}{n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{M + \frac{1}{n}} \neq F_M$. *Mostraremos que* $M \in [g(F_{M^+}), g(F_M)]$. *De fato,*

$$M = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)],$$

e se $M > g(F_M)$, *existirá* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(F_M) < k$, *o que é absurdo pelo fato de* M *ser supremo de* $\alpha \wedge g(F_\alpha)$. *Logo* $g(F_M) \geq M$ *e consequentemente* M *é o lado de maior quadrado subscrito ao gráfico de* $g(F)$.

Supondo que a condição ***c)*** *da Definição 2.5 não fosse verificada, então*

$$M < \lim_{n \to +\infty} g\left(F_{M - \frac{1}{n}}\right) = g(F_{M^-}).$$

Nesse caso diremos que M *é o lado de maior quadrado subscrito no fecho do gráfico de* $g(F)$.

5.2. Integral *fuzzy* generalizada.

A integral *fuzzy* foi definida sobre uma medida *fuzzy* (Sugeno). Nessa definição se substituirmos a medida pela *fuzzy geral* obteremos o que denominamos de Integral *fuzzy* generalizada. Vimos que uma medida de possibilidade é *fuzzy geral*, tendo então sentido calcular a integral *fuzzy* geral para qualquer medida de possibilidade.

Pela proposição 4.4 temos que se a σ-álgebra for finita então a medida de possibilidade será *fuzzy* e, nesse caso, pode-se então calcular sua integral *fuzzy*. Facilmente se observa que a medida de probabilidade é *fuzzy*, podendo calcular a respectiva integral.

Na seção sobre medidas observamos que:

- Nem toda medida de possibilidade é *fuzzy*
- Se uma medida de possibilidade for *fuzzy* e tiver a distribuição contínua, será nula.

Entre outros esses resultados permitem elaborar o diagrama abaixo:

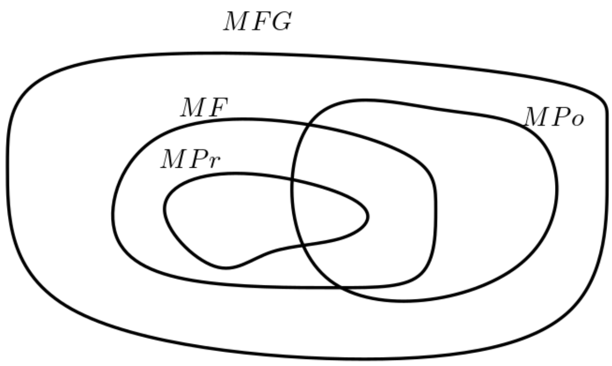


Figura 2: Diagrama de representação de medidas (Barros e Bassanezi, 2010).

As simbologias representam:

MFG: Medida *fuzzy* geral.

MF: Medida *fuzzy*.

MPo: Medida de possibilidade.

MPr: Medida de probabilidade.

E(X): Esperança clássica da variável aleatória X.

EF(X): Esperança *fuzzy* da variável aleatória X.

Apresentamos a seguir exemplos para os casos:

a) Integral com medida de possibilidade *fuzzy* (MF).

b) Integral com medida de possibilidade.

c) Da comparação entre a esperanças, clássica e *fuzzy*.

d) Em que a integral seja a medida do lado do maior quadrado inserido no fecho do sub-gráfico de $\Pi(F_\alpha)$.

e) Integrais para algumas funções específicas.

Considerando:

Caso a) A integral com medida de possibilidade fuzzy.

- $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subset 2^X$, uma σ-álgebra obrigatoriamente finita.
- $\varphi : X \to [0,1]$, distribuição de possibilidade
- $\Pi_\varphi : \mathcal{A} \to [0,1]$ medida de possibilidade *fuzzy*
- $h : X \to [0,1]$ uma aplicação, $\alpha \in [0,1]$,

$$F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Desejamos calcular:

$$⨍ h \bullet \Pi_\varphi$$

Assim,

$$⨍ h \bullet \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{x \in F_\alpha} [\varphi(x)]]$$

Assumiremos que h possui valor máximo em x_0 e que distribuição $\varphi(x)$ seja constante e igual a 1, obtendo

$$F_\alpha = \emptyset \text{ e } \Pi_\varphi(F_\alpha) = 0$$

para $\alpha \geq h(x_0)$.

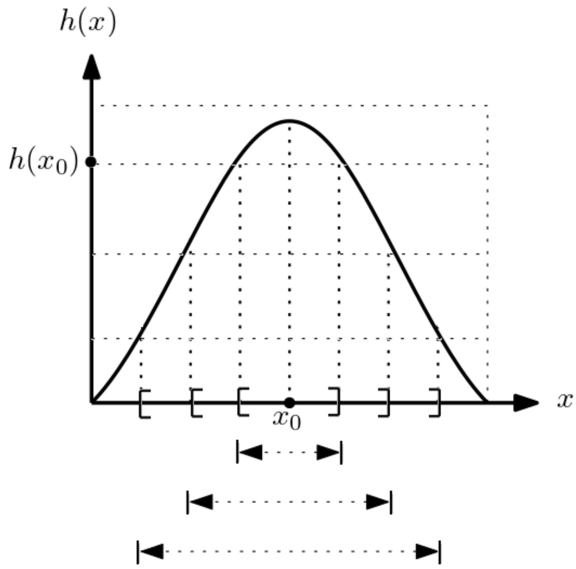


Figura 3: Sequência de α-níveis para a função Π_φ de possibilidade.

Logo,

$$\fint h \bullet \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0,h(x_0)]} [\alpha \wedge \Pi_\alpha(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,h(x_0)]} [\alpha \wedge 1] = h(x_0) = \sup_{x \in X} \{h(x)\}.$$

Caso b) Calcular $\fint h \bullet \Pi_\varphi$,

$$\fint h \bullet \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{x \in F_\alpha} [\varphi(x)]]$$

Assumindo que φ seja uma distribuição qualquer, porém o máximo de $h(x)$ e o supremo de $\varphi(x)$ ocorrem em x_0, novamente obtemos

$$F_\alpha = \emptyset \text{ e } \Pi_\varphi(F_\alpha) = 0 \text{ para } \alpha \geq h(x_0).$$

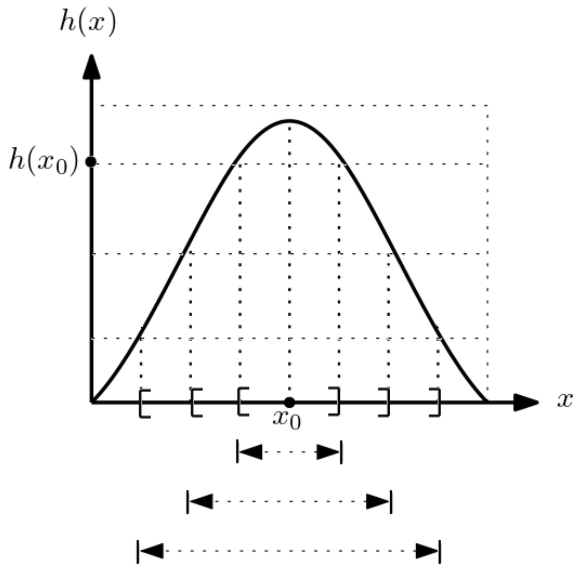


Figura 4: Sequência de α-níveis para a função h.

Logo,

$$⨍ h \bullet \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge 1] = h(x_0) = \sup_{x \in X} \{h(x)\}.$$

Caso c) Integral *fuzzy* com medida de probabilidade e as esperanças clássicas e *fuzzy*.

Pretendemos estabelecer a comparação entre as esperanças clássica e $fuzzy$. Consideremos,

- $\Omega \neq \emptyset$ um espaço qualquer (amostral)

- $$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : \mathcal{F} \subset 2^\Omega & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathcal{P}(A) \end{array}$$

  onde $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra (espaço de eventos).

Considere uma distribuição de probabilidade dada por $X : \Omega \to [0,1]$ (variável aleatória) então

$$⨍ X \bullet \mathcal{P} = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mathcal{P}(F_\alpha)],$$

onde $F_\alpha = \{x \in \Omega : X(x) \geq \alpha\}$. Assim,

$$\mathcal{P}(F_\alpha) = \mathcal{P}(\{x \in \Omega : X(x) \geq \alpha\}) = \mathcal{P}(X \geq \alpha).$$

Consequentemente

$$⨍ X.\mathcal{P} = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mathcal{P}(X \geq \alpha)]$$

Essa é a esperança $fuzzy$ para a variável aleatória considerada.

A esperança clássica da variável aleatória X é dada pela integral de Lebesgue:

$$E(X) = \int X d\mathcal{P},$$

enquanto a esperança *fuzzy* sobre essa mesma variável X, é:

$$E_F(X) = ⨍ X \bullet \mathcal{P}.$$

Pelo Teorema 5.3 tem-se

$$|E(X) - E_F(X)| \leq \frac{1}{4}.$$

Caso d) Sejam

- $\varphi : X \to [0,1], X \neq \emptyset$ (distribuição de possibilidade)

- $$\begin{array}{rcl} \Pi_\varphi : 2^X & \to & [0,1] : \text{ medida de possibilidade} \\ A & \mapsto & \Pi_\varphi(A) = \sup\limits_{x \in A} \{\varphi(x)\}. \end{array}$$

Consideraremos,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2x + 2 \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

e

$$h(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 \text{ se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

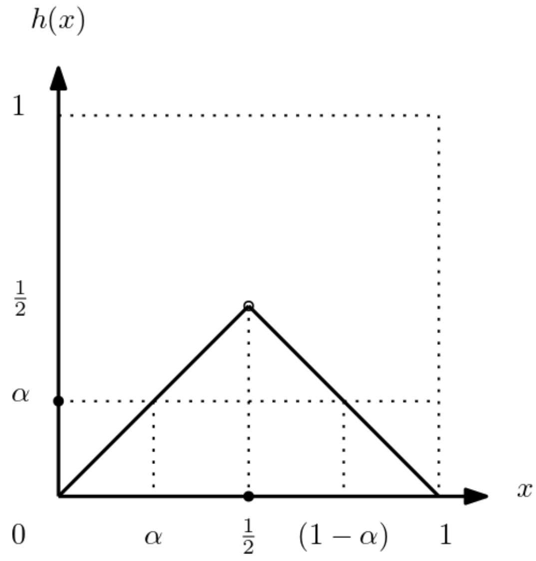


Figura 5: Representação da função $h(x)$ (caso d)

Note que:

- para $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $F_\alpha = \left[\alpha, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1-\alpha\right]$
- para $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $F_\alpha = \emptyset$
  Logo,
- para $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi_\varphi(F_\alpha) = \Pi_\varphi\left(\left[\alpha, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1-\alpha\right]\right) = 1 \Rightarrow \alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha) = \alpha$
- para $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\Pi_\varphi(F\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha) = 0$. É claro que $\Pi_\varphi\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$, logo

$$⨍ h \bullet \Pi_\varphi = \frac{1}{2}$$

pela definição de integral *fuzzy*

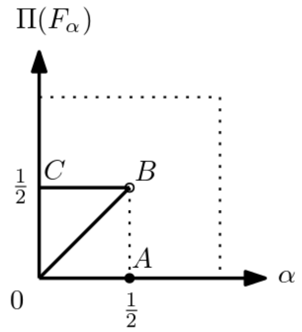


Figura 6: Função medida de possibilidade $\Pi_\varphi(F_\alpha)$ (caso d).

Observação 5.1 *A integral fuzzy representa a medida do lado do maior quadrado inserido no* ***fecho*** *do gráfico de* $\Pi(F_\alpha)$.

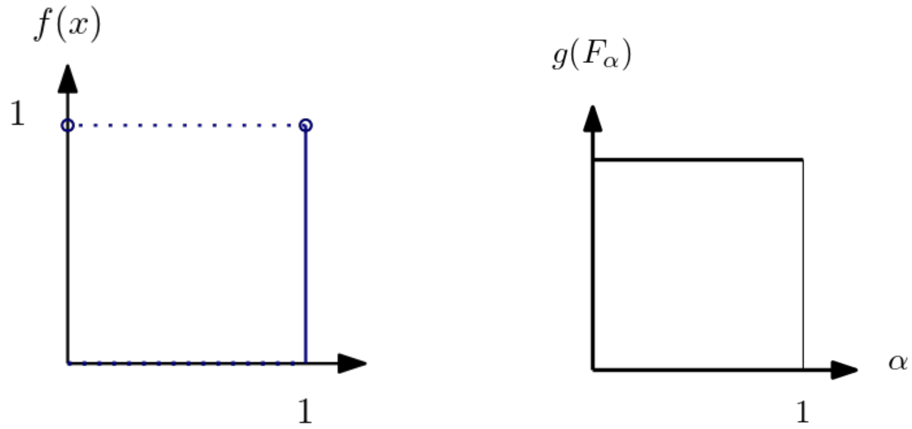
(Caso e) Integrais para funções específicas.

Considere:

- $X = [0,1]$
- $g : 2^X \to [0,1]$, medida usual
- $f : [0,1] \to [0,1]$ uma aplicação.
- $\varphi : X \to [0,1], X \neq \emptyset$ (distribuição de possibilidade) com $\varphi(x) = f(x)$.
- $\Pi_\varphi : 2^{[0,1]} \to [0,1]$ a medida de possibilidade (MFG).

  Se

  i) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in \mathbb{Q}: \text{ racionais} \\ 1 \text{ se } x \in \mathbb{I}: \text{ irracionais} \end{cases}$



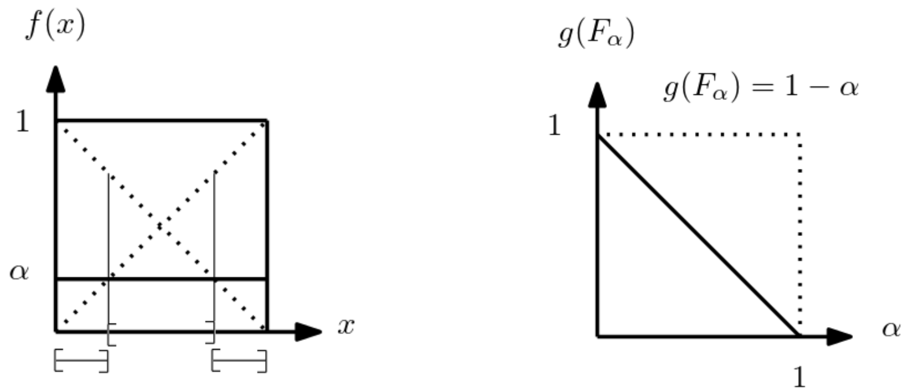
(a) Representação de $f(x)$. (b) Representação de $g(F_\alpha)$.

Figura 7: Representações de $f(x)$ em 7(a) e $g(F_\alpha)$ em 7(b) – (caso e).

Para $\alpha \in [0,1]$, $F_\alpha = \{x \in [0,1] : f(x) \geq \alpha\}$, temos $g(F_\alpha) = \Pi(F_\alpha) = 1$, logo

$$\int f \bullet g = \int f \bullet \Pi_\varphi = 1$$

ii) $f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$



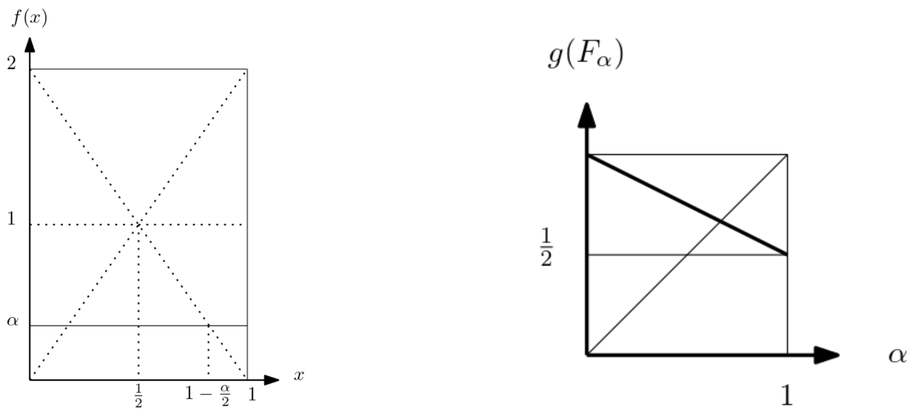
(a) Representação de $f(x)$. (b) Representação de $g(F_\alpha)$.

Figura 8: Representações de $f(x)$ em 8(a) e $g(F_\alpha)$ em 8(b) – (item ii).

logo, $\fint f \bullet g = \frac{1}{2}$.
Porém, $\Pi(F_\alpha) = 1$, qualquer $\alpha \in [0,1]$ e então,

$$\fint f \bullet \Pi_\varphi = 1$$

iii) $f(x) = \begin{cases} (2x) \wedge 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 2(1-x) \wedge 1 \text{ se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$



(a) Representação de $f(x)$. (b) Representação de $g(F_\alpha)$.

Figura 9: Representações de $f(x)$ em **??** e $g(F_\alpha)$ em 2006_fig10 – item iii.

$g(F_\alpha) = (1 - \frac{\alpha}{2})$ e $1 - \frac{\alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$.
Logo,

$$\fint f \bullet g = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \fint f \bullet \Pi_\varphi = 1.$$

Observe que para todos as funções em **i)**, **ii)** e **iii)** definidas, não existem as integrais usuais com a medida usual g, visto que são descontínuas em um conjunto não enumerável de pontos em $[0,1]$.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2010). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática.* Ed. Unicamp, Campinas/SP.

Cabral, M. A. P. (2016). *Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue.* DMA-IM-UFRJ, R. Janeiro-RJ, 3ª edição.

Gerônimo, J. R. (1988). Medidas fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP.

Kandel, A. (1986). *Fuzzy mathematical techniques with applications.* Addison-Wesley, New York.

Sugeno, M. (1974). *Theory of fuzzy integrals and its applications.* Phd thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo.