Biomatemática ***31*** *(2021), 15–22* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Resolução do modelo SIR através de Runge-Kutta de 2a ordem

José L. Menezes Neto[1], Teodomiro J. Santos Neto[2],
Depto de Ciências Exatas, CCAE – UFPB, 58.297-000, Rio Tinto/PB.

Resumo. Neste trabalho apresentamos um método de resolução do modelo SIR, um sistema de equações diferenciais, que estima a quantidade futura de uma infecção em uma determinada população. Fazemos uma revisão do modelo SIR e de como resolvê-lo através do Método de Runge-Kutta de 2a ordem, algoritmo utilizado na solução de sistemas de equações diferenciais. Aplicamos o método SIR para estimar a quantidade de infectados pelo coronavírus, SARS-CoV-2, no Estado da Paraíba e fazemos um comparativo das estimativas com os casos reais.

Palavras-chave*: Estimativa; coronavírus.*

1. Introdução

A pandemia de coronavírus, SARS-CoV-2, começou no início do ano de 2020, trazendo a tona um antigo modelo, chamado SIR, de previsão de casos de pessoas infectadas por uma doença, em uma determinada população. A expectativa era a de prever o término da pandemia, bem como estimar a quantidade de doentes, com o intuito de evitar um colapso no sistema de saúde.

Neste trabalho apresentamos o modelo SIR, seus componentes e um método de resolução via algoritmo de Runge-Kutta de 2a ordem. Antes, descreveremos como obter estimativas para valores utilizados no SIR, denominados de fator de recuperação e taxa de contágio. Feito isso, iremos aplicar o método SIR para estimar, a partir de dados reais, casos futuros de coronavírus no estado da Paraíba. Nosso intuito é o de analisar se essas estimativas são satisfatórias.

[1]laudelino@dcx.ufpb.br
[2]teodomiro.santos@academico.ufpb.br

2. Modelo SIR

Vamos considerar uma população com quantidade de habitantes constante e igual ao valor inteiro positivo N, e utilizaremos o modelo SIR, dado pelo sistema de equações diferenciais abaixo (Brauer e Castillo-Chavez, 2012), para estimar a quantidade de infectados de uma epidemia ao longo do tempo t:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= -\beta \dfrac{I(t)}{N} S(t) \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} &= \beta \dfrac{I(t)}{N} S(t) - \gamma I(t) \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} &= \gamma I(t). \end{cases}$$

O valor β é a taxa de contágio da doença, γ o fator de recuperação da doença, $S(t)$ a função que representa as pessoas suscetíveis a se contaminar ao longo do tempo, $I(t)$ a função que representa as pessoas infectadas ao longo do tempo, e $R(t)$ a função que representa as pessoas recuperadas ao longo do tempo.

Consideramos a marcação do tempo t em dias e que a chance de contato entre qualquer habitante é a mesma, independente da distância ou qualquer outro tipo de relação. Além disso, sendo a quantidade de habitantes N constante para todo tempo t, temos que

$$N = S(t) + I(t) + R(t), \ \forall t.$$

2.1. Fator de recuperação e taxa de contágio

O cálculo do fator de recuperação γ de uma determinada doença consiste em analisar o tempo que uma pessoa infectada leva para se recuperar da enfermidade. Como medimos o tempo t em dias e levando em conta que determinada doença leva ℓ dias para que uma pessoa infectada se recupere, então uma estimativa para o fator de recuperação é dada por (Tavares, 2017)

$$\gamma = \frac{1}{\ell}. \tag{2.1}$$

Para estimar a taxa de contágio β para o início de uma pandemia, observamos a equação relacionada aos infectados do modelo SIR

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - \gamma I(t). \tag{2.2}$$

Consideremos que a epidemia iniciou num certo tempo t_0, então, neste caso, $S(t)$ é aproximadamente o valor N, para valores de t próximos de t_0. Ou seja, podemos assumir que $S(t) = N$ quando t está em uma vizinhança de t_0. Assim, reescrevemos (2.2) como

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I(t). \tag{2.3}$$

Uma solução para equação diferencial (2.3) é a função

$$I(t) = I(t_0)e^{(\beta-\gamma)t}, \tag{2.4}$$

onde $I(t_0)$ é a quantidade inicial de infectados.

Após certo tempo, no tempo t_d, suponhamos que o número de infectados dobrou em relação ao tempo inicial t_0, ou seja, $I(t_d) = 2I(t_0)$.

Substituindo o valor de $I(t_d)$ na equação (2.4), obtemos

$$2I(t_0) = I(t_0)e^{(\beta-\gamma)t_d},$$

e aplicamos a função logaritmo natural, para obtermos uma estimativa para a taxa de contágio (Dietz, 1993)

$$\beta = \gamma + \frac{\ln 2}{t_d}. \tag{2.5}$$

Lembrando que t_d é o tempo que levou para dobrar o número de infectados em relação ao tempo inicial t_0 e que esta estimativa de β é para o início da pandemia.

3. Algoritmo de Runge-Kutta de 2ª ordem

Obter explicitamente a expressão de uma função $y(t)$ que satisfaz uma equação diferencial do tipo $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$ nem sempre é uma tarefa fácil. Entretanto, caso o problema seja um Problema de Valor Inicial (PVI), do tipo

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \text{ com } y(t_0) = y_0, \tag{3.6}$$

então é possível obter numericamente uma solução aproximada para a função $y(t)$ tal que $y(t_0) = y_0$. Esta solução aproximada do PVI (3.6) consiste de uma tabela de valores que inicia no ponto (t_0, y_0) e passa próximo do gráfico da função que é a solução exata da equação.

Para resolver o PVI (3.6) utilizando o algoritmo de Runge-Kutta, definimos um valor h positivo e próximo de zero, e calculamos a sequência de valores

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $k_1 = hF(t_n, y_n)$ e $k_2 = hF(t_n + h/2, y_n + k_1/2)$. Repetindo essa sequência de cálculos até chegar no valor desejado de $y_n = y(t_n)$ (de Andrade, 2016).

3.1. Aplicando Runge-Kutta de 2ª ordem no SIR

No modelo SIR temos de resolver um sistema de equações diferenciais, que podemos reescrever na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} & = & F(t, S, I, R) \\ \dfrac{dI}{dt} & = & G(t, S, I, R) \\ \dfrac{dR}{dt} & = & H(t, S, I, R), \end{cases}$$

sendo dados os valores iniciais no tempo $t = t_0, S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0$ e $R(t_0) = R_0$, e as funções $F(t, S, I, R), G(t, S, I, R)$ e $H(t, S, I, R)$ são dadas por

$$F(t, S, I, R) = -\beta \frac{I(t)}{N} S(t), \quad G(t, S, I, R) = \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - \gamma I(t),$$
$$H(t, S, I, R) = \gamma I(t).$$

Definido o valor h positivo e próximo de zero, para calcular as iterações das sequências t_n, S_n, I_n e R_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, procedemos do seguinte modo $t_{n+1} = t_n + h$ e

$$S_{n+1} = S_n + \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad I_{n+1} = I_n + \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad R_{n+1} = R_n + \frac{m_1 + m_2}{2},$$

com

$$k_1 = hF(t_n, S_n, I_n, R_n), \quad k_2 = hF\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_1}{2}, I_n + \frac{l_1}{2}, R_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$l_1 = hG(t_n, S_n, I_n, R_n), \quad l_2 = hG\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_1}{2}, I_n + \frac{l_1}{2}, R_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$m_1 = hH(t_n, S_n, I_n, R_n), \quad m_2 = hH\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_1}{2}, I_n + \frac{l_1}{2}, R_n + \frac{m_1}{2}\right).$$

4. Infectados pelo coronavírus na Paraíba

Aplicaremos os resultados obtidos para análise de casos futuros de infectados pelo coronavírus no estado da Paraíba. Consideremos o tempo t medido em dias. Em média, uma pessoa infectada pelo coronavírus leva treze dias para se recuperar, sendo assim, assumimos $\ell = 13$ e, utilizaremos o fator de recuperação, $\gamma = 1/13 \approx 0,07692$. A população considerada é de $N = 3.944.000$.

Faremos a estimativa de casos, utilizando o SIR, via resolução pelo algoritmo de Runge-Kutta de 2ª ordem, para dois períodos distintos 27/07/2020 e 30/04/2021. Utilizamos o valor de $h = 0,1$, então a cada dez iterações do algoritmo, temos a passagem de um dia. Os números de casos foram obtidos através do portal intitulado Dados Epidemiológicos Covid-19 Paraíba, na aba microdados (ver: Governo do Estado da Paraíba, 2021)

No dia 21/03/2020, foi registrado o primeiro caso de coronavírus na Paraíba. O primeiro período analisado, de 27/07/2020, corresponde a 126 dias corridos após o primeiro caso registrado. O segundo período analisado, de 30/04/2021, corresponde a 403 dias corridos após o primeiro caso registrado.

4.1. Período situado em 27/07/2020

No dia 27/07/2020 a Paraíba registrou no total 76.693 casos de Coronavírus. Observamos que no dia 21/06/2020 a Paraíba havia registrado no total 36.784 casos. Então, de 21/06/2020 para 27/07/2020, o número de casos dobrou, e isso ocorreu num tempo de 32 dias. Sendo assim, consideraremos $t_0 = 0$ na data de 21/06/2020 e $t_d = 32$ na data de 27/07/2020. Portanto, podemos estimar a taxa de contágio para o dia 27/07/2020 no valor de

$$\beta = 0,07692 + \frac{\ln 2}{32} = 0,09858.$$

Utilizando os valores de $\gamma = 0,07692, \beta = 0,09858$,

$$I(t_0) = 76.693,\ R(t_0) = 0,\ S(t_0) = N - I(t_0) - R(t_0)$$

e aplicando Runge-Kutta de 2ª ordem no SIR, obtemos a Tabela 1 com as estimativas do número de infectados para dez dias posteriores a 27/07/2020.

Tabela 1: Estimativas para dez dias posteriores a 27/07/2021.

Data	n	Estimativa	Dado Real	Erro
27/07/2020	0	76693	76693	0
28/07/2020	10	781175	78215	40
29/07/2020	20	79898	79751	147
30/07/2020	30	81108	81303	195
31/07/2020	40	82794	82868	74
01/08/2020	50	83461	84447	986
02/08/2020	60	84008	86038	2030
03/08/2020	70	84211	87642	3431
04/08/2020	80	87071	89257	2186
05/08/2020	90	87867	90882	3015
06/08/2020	100	89117	92517	3400

Na Tabela 1:

"Data" se refere ao dia.

n é o valor da iteração feita pelo método de Runge-Kutta de 2$\underline{\text{a}}$ ordem.

"Estimativa" corresponde ao valor de $I(t_n)$, que é a estimativa de casos de infectados de coronavírus obtido pelo método de Runge-Kutta de 2$\underline{\text{a}}$ ordem.

"Dado Real" é o número de casos reais de infectados de coronavírus obtidos na consulta ao portal Dados Epidemiológicos Covid-19 Paraíba

"Erro" é o valor absoluto da diferença do valor da estimativa pelo valor do dado real do número de casos de coronavírus.

4.2. Período situado em 30/04/2021

No dia 30/04/2021 a Paraíba registrou no total 292.669 casos de Coronavírus. Observamos que no dia 02/12/2020 a Paraíba havia registrado no total 146.528 casos. Então, de 02/12/2020 para 30/04/2021, o número de casos dobrou, e isso ocorreu num tempo de 147 dias. Sendo assim, consideraremos $t_0 = 0$ na data de 02/12/2020 e $t_d = 147$ na data de 30/04/2021. Portanto, podemos estimar a taxa de contágio para o dia 30/04/2021 no valor de

$$\beta = 0,07692 + \frac{\ln 2}{147} = 0,08163.$$

Utilizando os valores de $\gamma = 0,07692, \beta = 0,08163$,

$$I(t_0) = 292.669,\ R(t_0) = 0,\ S(t_0) = N - I(t_0) - R(t_0)$$

e aplicando Runge-Kutta de 2a ordem no SIR, obtemos a Tabela 2 com as estimativas do número de infectados para cinco dias posteriores a 30/04/2021.

Tabela 2: Estimativas para cinco dias posteriores a 30/04/2021.

Data	n	Estimativa	Dado Real	Erro
30/04/2021	0	292669	292669	0
01/05/2021	10	292211	293717	1506
02/05/2021	20	291620	294672	3052
03/05/2021	30	290900	295458	4558
04/05/2021	40	290052	296587	6535
05/05/2021	50	289078	297586	8508

5. Conclusão

O primeiro período analisado, de 27/07/2020 a 06/08/2020, as estimativas foram satisfatória até o quinto dia, 01/08/2020, após esta data o erro obtido só fez aumentar com o tempo. Tendo em vista que a epidemia estava em estágio inicial, o valor da taxa de contágio β foi condizente com a situação da época.

Para o caso das estimativas do segundo período analisado, transcorrido de 30/04/2021 a 05/05/2021, tendo em vista que passaram 406 dias corridos desde a contagem do primeiro caso, ou seja, não condiz mais com um estágio inicial da pandemia, a estimativa da taxa de contágio β não foi satisfatória. A quantidade de casos elevada, leva-se muito tempo para dobrar o número de casos, isso fez com que as estimativas indicassem uma queda na contagem do número total de infectados, o que não foi condizente com os dados reais.

Portanto, a estimativa da taxa de contágio β, foi satisfatória para estimar os infectados em um estágio inicial de uma pandemia, com uma baixa contagem de pessoas contaminadas. Para outros estágios de uma pandemia, com número elevado de casos de infectados, devemos procurar outros métodos para calcular o valor de β.

Referências

Brauer, F. e Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology.* Springer.

de Andrade, L. N. (2016). Cálculo numérico - introdução à matemática computacional. Disponível em http://mat.ufpb.br/lenimar/textos/numerv2.pdf Acesso em: 09/05/2021.

Dietz, K. (1993). The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases. *Statistical Methods in Medical Research*, 2(1):23–41.

Governo do Estado da Paraíba (2021). Dados Epidemiológicos Covid-19 Paraíba. Disponível em https://superset.plataformatarget.com.br/superset/dashboard/microdados Acesso em: 09/05/2021.

Tavares, J. N. (2017). Modelo sir em epidemiologia. *Rev. Ciência Elem.*, 5(2).