

Modelagem do peso–idade de fêmeas da raça zebuína via conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar

Rosana S. M. Jafelice¹,

FAMAT – UFU, 38.400-902, Uberlândia/MG.

Flávio A. Falcão Nascimento²,

FAFIDAM – UECE, 62.930-000, Limoeiro do Norte/CE.

Fernando A. Freitas³Ana Maria A. Bertone⁴

FAMAT – UFU, 38.400-902, Uberlândia/MG.

Resumo A conhecida equação de von Bertalanffy é muito utilizada na literatura para modelar a curva de crescimento do peso animal em função do tempo. Dos parâmetros que contribuem para a modelagem, encontram-se as taxas de anabolismo e catabolismo, relacionadas com o expoente da equação de von Bertalanffy, os quais são estimados sob diversas abordagens. Em alguns casos, o expoente é o foco de discussão e, em outros, deixa-se o expoente mais aplicado, de valor $2/3$, é fixado e as estimativas relativas a capacidade de suporte do peso assim como o ponto de inflexão do crescimento do animal são o centro da modelagem. Esta segunda alternativa, no sentido de fixar o valor do expoente, é o enfoque desse estudo, com o objetivo de explorar as vantagens da lógica dos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. A modelagem é aplicada a um conjunto de dados referida ao peso de fêmeas da raça zebuína, coletados durante onze anos pela Associação Brasileira de Zebu-MG (ABCZ), cedido de forma exclusiva para essa investigação. Como resultado da modelagem, é obtida uma faixa de valores crescimento do peso normalizado em função do tempo com grau lógico de verdade um.

Palavras–chave: Modelagem matemática; equação de von Bertalanffy; método de gradiente descendente.

¹rmotta@ufu.br

²flavio.falcao@uece.br

³fernandoaugusto.mat@gmail.br

⁴amabertone@ufu.br

1. Introdução

A equação de crescimento de von Bertalanffy (Bertalanffy, 1957) foi inicialmente aplicada ao crescimento do peixe, área em que se encontram uma grande variedade de parâmetros estimados para essa equação. Na equação destaca-se o expoente γ igual a $\frac{2}{3}$. O modelo de von Bertalanffy tem sido estendido para outras espécies animais (Bassanezi, 2002) de várias maneiras: considerando outros valores do expoente γ , ou, no caso de fixado o valor de γ , utilizando metodologias diversas para obter a capacidade de suporte do peso com respeito ao tempo e também o ponto de inflexão do crescimento do animal.

O foco deste estudo é a modificação de dois parâmetros da solução da equação, cruciais para modelar o crescimento animal: as taxas de anabolismo e catabolismo. Essas taxas desempenham o papel importante na determinação da capacidade de suporte do peso do animal estudado.

A metodologia desenvolvida neste estudo é aplicada a um conjunto de dados da raça Zebuína, composta por fêmeas Nelore. Os dados coletados durante o período de 2/10/2005 até 17/08/2016 foram cedidos de forma exclusiva pela Associação Brasileira de Zebu (ABCZ) - Minas Gerais, que tem a missão de promover o aumento sustentável da produção mundial de carne e leite, por meio do registro genealógico, melhoramento genético e promoção de raças zebuínas.

O objetivo desse trabalho é desenvolver uma modelagem matemática do peso dessa raça bovina com respeito ao tempo, considerando as particularidades dos dados coletados. O fato de ser peculiar é que os dados fornecidos pela coleta dos pesquisadores da ABCZ, possui diferentes valores do peso em um mesmo dia com grau de confiabilidade 1.

Utiliza-se como base teórica o modelo de Bertalanffy em combinação com a teoria dos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. A motivação para a escolha desses conjuntos é a vantagem implícita na lógica que envolve a teoria. Este benefício provém de que, ao invés de obter uma curva que interpreta o conjunto de dados, o resultado da modelagem é uma pegada de incerteza, região no plano 2D que cobre os pontos (idade, peso) dos dados coletados normalizados.

Para ilustrar essa vantagem, imagine três especialistas na área da raça Zebuína, Especialista 1, Especialista 2 e Especialista 3, discutindo qual tem a melhor afirmação para o resultado do crescimento do peso em determinado tempo. A metodologia se fundamenta em atribuir um valor de pertinência a um peso P como sendo o seu valor normalizado. Na lógica dos conjuntos fuzzy do tipo 1, uma das seguintes afirmações pode ser proposta para a modelagem:

“Especialista 1 afirma que o peso do zebu no dia 360 é de 402kg e tem um valor de verdade de 0.37”;

“Especialista 2 afirma que o peso do zebu no dia 360 é de 476kg e tem um valor de verdade de 0.43”;

“Especialista 3 afirma que o peso do zebu no dia 360 é de 502kg e tem um valor de verdade de 0.47”.

Se apenas um especialista é consultado para realizar a modelagem, a escolha descarta as outras possibilidades. Caso que os três sejam abordados, uma alternativa da modelagem é determinar a média aritmética dos valores de verdade para o dia 360.

No entanto, as três afirmações podem ser compatíveis na seguinte proposição, aplicando a lógica de conjuntos fuzzy de tipo 2 intervalar:

$$\begin{aligned} & \text{“A proposição “especialista 1 afirma que o peso do zebu no dia 360 é} \\ & \text{402kg e tem um valor de verdade de 0.37” tem valor de verdade 1”;} \\ & \text{E} \\ & \text{“A proposição “especialista 2 afirma que o peso do zebu no dia 360 é} \\ & \text{de 476kg tem um valor de verdade de 0.43” tem valor de verdade 1”;} \\ & \text{E} \\ & \text{“A proposição “especialista 3 afirma que o peso do zebu no dia 360 é} \\ & \text{576kg tem um valor de verdade de 0.47” tem valor de verdade 1”}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

As simulações computacionais tem sido desenvolvidas em dois softwares livres, o R (Team, 2020) e o GeoGebra (Hohenwarter, 2021) que fornecem os cálculos e gráficos obtidos através da modelagem.

Este manuscrito está organizado em quatro seções: Seção 2 em três subseções em que: na primeira, a teoria dos conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar é revisada; na segunda, o modelo de von Bertalanffy é desenvolvido; na terceira subseção o método do gradiente descendente é sucintamente descrito. Na Seção 3, a metodologia é explanada e mostram-se os resultados obtidos. Finalmente, na Seção 4 é apresentada a conclusão final.

2. Fundamentos matemáticos

O fundamento matemático deste estudo está dividido em três tópicos: uma revisão da teoria dos conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar; o desenvolvimento

da equação de von Bertalanffy para ser aplicada na modelagem proposta; uma breve abordagem do método do gradiente descendente.

2.1. Conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar

Nessa seção, faz-se uma revisão sobre conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. Para mais detalhes, o leitor pode verificar (Mendel, 2017; Mendel et al., 2016; Jafelice e Bertone, 2020).

Um conjunto fuzzy do tipo 1 (A) é caracterizado por sua função de pertinência μ_A , tal que $\mu_A(x) \in [0, 1]$ e definida sobre um universo de discurso X (Zadeh, 1965). Em outras palavras, um conjunto fuzzy do tipo 1 pode ser interpretado pelo gráfico de sua função pertinência:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}.$$

O suporte de A é o fecho topológico do conjunto $\{\mu_A(x) > 0, x \in X\}$.

Um conjunto fuzzy do tipo 2 (\tilde{A}) é o gráfico da função $\mu_{\tilde{A}}$ definida em $X \times [0, 1]$ tomando valores em $[0, 1]$, a qual é chamada função de pertinência de \tilde{A} e representada por:

$$\tilde{A} = \{(x, u, \mu_{\tilde{A}}(x, u)) | (x, u) \in X \times [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) \in [0, 1]\}.$$

A pertinência secundária de \tilde{A} , denotada por $\mu_{\tilde{A}(x)}(u)$, é, por definição, a função de pertinência do conjunto fuzzy do tipo 1 $\tilde{A}(x)$, o qual é obtido geometricamente traçando um plano paralelo ao eixo u passando por x .

O suporte de $\tilde{A}(x)$, denotado por I_x , é dado por:

$$I_x = \overline{\{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}}. \quad (2.2)$$

Seja $x \in X$ fixado, definimos as funções de pertinência superior e inferior de x , denotadas, respectivamente por $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$, $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$, por:

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \sup\{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\} = \sup I_x, \quad (2.3)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \inf\{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\} = \inf I_x, \quad (2.4)$$

em que $\sup I_x$ é o supremo do conjunto I_x e $\inf I_x$ é o ínfimo do conjunto I_x .

Quando $I_x = [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]$ a pegada de incerteza (Footprint of Uncertainty em inglês) \tilde{A} , denotado por $FOU(\tilde{A})$, é o conjunto definido por:

$$FOU(\tilde{A}) = \{(x, u) | x \in X \text{ e } u \in I_x\}, \quad (2.5)$$

em que $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ e $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ são definidos em (2.3) e (2.4), respectivamente.

Um conjunto fuzzy do tipo 2 é chamado conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar se $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1$, para todo $(x, u) \in X \times [0, 1]$.

A modelagem proposta neste trabalho refere-se à pegada de incerteza construída através da composição de afirmações como as ilustradas em (1.1) considerando um período de tempo de 1650 dias, como mostrado na Seção 3.

2.2. O modelo de von Bertalanffy

O peso de um animal vivo a qualquer instante depende do resultado do processo de anabolismo e catabolismo. A taxa de anabolismo é considerada proporcional à superfície fisiológica do animal, enquanto a taxa de catabolismo é proporcional ao corpo do animal (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988; Bartholomew, 1981). Assim, assume-se que a área de superfície S e o peso P são proporcionais às potências de uma dimensão linear, uma relação conhecida como de alotropia e descrita como:

$$P = rl^3 \text{ e } S = sl^2, \quad (2.6)$$

em que l é o comprimento linear do organismo e r, s são constantes de proporcionalidade. Das relações alotrópicas do peso, (2.6), segue-se que $l^3 = \frac{P}{r}$, ou ainda, $(l^3)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{P}{r}\right)^{\frac{2}{3}}$ e $l^2 = \frac{P^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}}$. Substituindo essa expressão na segunda igualdade em (2.6), a superfície S é dada pela fórmula $S = \frac{s}{r^{\frac{2}{3}}}P^{\frac{2}{3}}$. Como a superfície e o peso de um animal mudam com o tempo, usando a bem conhecida equação de von Bertalanffy (Bertalanffy, 1957), dada por $\frac{dP}{dt} = h \cdot S(t) - \beta \cdot P(t)$, segue-se que

$$\frac{dP}{dt} = h \cdot \frac{s}{r^{\frac{2}{3}}} \cdot P(t)^{\frac{2}{3}} - \beta \cdot P(t). \quad (2.7)$$

Portanto, denotando-se por $\alpha = h \frac{s}{r^{\frac{2}{3}}}$ e $\gamma = \frac{2}{3}$, a expressão (2.7) torna-se

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t)^\gamma - \beta P(t). \quad (2.8)$$

Considerando $\tau = 1 - \gamma = \frac{1}{3}$ e observando que (2.8) é uma equação do tipo Bernoulli (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988) é obtida a solução:

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\tau}} \left[1 + C \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{-\beta\tau t}\right]^{\frac{1}{\tau}}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, uma vez que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + C \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{-\beta\tau t}\right)^{\frac{1}{\tau}} = 1$, resulta que,

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\tau}}, \quad (2.10)$$

conhecido como a capacidade de suporte do peso.

Tomando-se em (2.9), $t = 0$, o valor de C torna-se

$$C = \left[\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{\tau} - 1 \right] \cdot \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.11)$$

em que,

$$P_0 = P_{\infty} \left(1 + C \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Substituindo o valor de C dado em (2.11) em (2.9), segue-se que

$$P(t) = P_{\infty} \cdot \left[1 + \left(\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{\tau} - 1 \right) \cdot e^{-\beta\tau t} \right]^{\frac{1}{\tau}}. \quad (2.12)$$

Afirmção: $P(t)^{\tau}$ e $P(t+1)^{\tau}$ são linearmente relacionados.

De fato, primeiramente note que de (2.12) resulta que:

$$(P(t))^{\tau} - P_{\infty}^{\tau} = P_{\infty}^{\tau} \left[\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{\tau} - 1 \right] \cdot e^{-\beta\tau t}. \quad (2.13)$$

Substituindo t por $t+1$ em (2.12), segue-se que

$$P(t+1) = P_{\infty} \cdot \left[1 + \left(\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{\tau} - 1 \right) \cdot e^{-\beta\tau(t+1)} \right]^{\frac{1}{\tau}}.$$

Portanto, de (2.13), tem-se que:

$$\begin{aligned} [P(t+1)]^{\tau} &= P_{\infty}^{\tau} \cdot \left[1 + \left(\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{\tau} - 1 \right) \cdot e^{-\beta\tau(t+1)} \right] \\ &= P_{\infty}^{\tau} + P_{\infty}^{\tau} \left[\left(\frac{P_0}{P_{\infty}}\right)^{\tau} - 1 \right] \cdot e^{-\beta\tau t} e^{-\beta\tau} \\ &= P_{\infty}^{\tau} + [[P(t)]^{\tau} - P_{\infty}^{\tau}] \cdot e^{-\beta\tau} \\ &= [P(t)]^{\tau} \cdot e^{-\beta\tau} + P_{\infty}^{\tau} \cdot (1 - e^{-\beta\tau}) \\ &= a \cdot [P(t)]^{\tau} + b, \end{aligned}$$

em que

$$a = e^{-\beta\tau} \text{ e } b = P_{\infty}^{\tau} \cdot (1 - e^{-\beta\tau}). \quad (2.14)$$

Isto mostra que os pontos $(P(t)^\tau, P(t+1)^\tau)$ se relacionam linearmente, como afirmado.

Assim, encontrando os valores de a e b obtém-se os parâmetros α e β :

$$\beta = \frac{-\ln(a)}{\tau} \quad (2.15)$$

$$\alpha = \frac{-b\ln(a)}{(1-a)\tau}. \quad (2.16)$$

Finalmente, a capacidade de suporte do peso é calculada em função de a e b utilizando as equações (2.15)–(2.16), resultando na fórmula:

$$P_\infty = P_\infty(a, b) = \left(\frac{b}{1-a} \right)^{\frac{1}{\tau}}. \quad (2.17)$$

As fórmulas (2.15) – (2.17) são utilizadas para encontrar uma primeira curva solução do tipo (2.8), denotada por $p_m(t)$, construída a partir da média aritmética dos pesos normalizados, denominados $P_m(t)$, a cada dia t .

O algoritmo aplicado para encontrar a e b é o de retropropagação do erro. Este algoritmo é explanado na subseção a seguir.

2.3. Algoritmo de retropropagação do erro

Quando o erro para uma determinada amostra de pontos é dado pelo erro médio quadrático, entre o valor desejado y_d e o valor obtido y , tem-se $E = \frac{1}{2}(y - y_d)^2$.

Dessa forma, quando se trabalha com dois parâmetros a e b a serem corrigidos, sendo $y = ax + b$ o erro E é caracterizado por um gráfico de um parabolóide. Neste método, busca-se o ponto de mínimo deste parabolóide.

Tendo efetuado este cálculo de E , é possível aplicar uma correção sobre os parâmetros a e b obtidos em primeira instância. Assim, o erro é proporcional à derivada parcial, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

que representa os fatores de sensibilidade, que determinam a direção vetorial da busca da correção dos parâmetros a e b .

Assim, é possível definir correções a serem aplicadas em a e b , que são obtidas pelas derivadas parciais do erro retropropagado por $\partial E/\partial a$ e $\partial E/\partial b$,

respectivamente, em que estas correções são calculadas pelas equações (2.18) dadas por:

$$\begin{aligned} a &= a - \delta \frac{\partial E}{\partial a}, \\ b &= b - \delta \frac{\partial E}{\partial b}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que $\delta > 0$ é a taxa de aprendizagem do algoritmo de retropropagação, e seu sinal negativo em (2.18) e indica a descida do gradiente no espaço dos parâmetros, sendo denominado também por método do gradiente descendente.

Este método é utilizado na modelagem para determinar a reta que representa a relação linear dos pontos $(P_m^\tau(t), P_m^\tau(t+1))$. Tem sido formulado um código no software R (Team, 2020) para a realização do algoritmo de retropropagação.

3. Metodologia e resultados

A partir do conjunto de valores representando os pesos de fêmeas Nelore da raça zebuína em um dia, contendo 19.415 dados, realizou-se uma filtragem para simplificar a modelagem, mantendo os principais valores de pesos, máximo (1100kg) e mínimo (228kg), para preservar as propriedades qualitativas dos dados originais. O dado inicial é o valor fornecido pelo especialista da ABCZ que é de 39kg. Como resultado, 1.246 valores de pesos distribuídos em uma sequência crescente de dias tem sido filtrados, alguns dos quais são mostrados na tabela 1.

Tabela 1: Uma amostra dos dados filtrados.

Idade (dia)	Peso (kg)
360	415
360	402
360	476
360	502
361	429
361	460
361	493
361	480
362	428
362	530
362	463

O próximo passo tem sido normalizar os pesos P , fornecido pelos da-

dos coletados, de forma a definir um valor de pertinência a cada peso que é exatamente o valor $\frac{P}{1100}$. Calcula-se então a média aritmética dos pesos normalizados em cada dia, com o objetivo de determinar uma curva $p_m(t)$ que modela os pontos $(t, P_m(t))$.

Constrói-se a lista de pontos $(P_m^\tau(t), P_m^\tau(t+1))$ que são aproximados por uma função linear $y = ax + b$, obtida por meio do método do gradiente descendente. De fato, aplicando o algoritmo de retropropagação do erro com os valores iniciais de $a_0 = 1$ e $b_0 = 0.005$ e o valor de δ das equações em (2.19) igual a 0.001, após 5000 iterações obtém-se os valores otimizados de a e b dados por

$$a = 0.9964157 \quad \text{e} \quad b = 0.003125283. \quad (3.20)$$

Denotando por β_m e P_m^∞ , os valores correspondentes às fórmulas (2.15) e (2.17) substituí-se os valores de (3.20), para concluir que

$$\beta_m = 0.01077 \quad \text{e} \quad P_m^\infty = 0.66288. \quad (3.21)$$

A curva $p_m(t)$ é formulada, tomando $p_m(0) = \frac{39}{1100} = 0.03545$:

$$p_m(t) = P_m^\infty \left[1 + \left(-1 + \left(\frac{p_m(0)}{P_m^\infty} \right)^\tau \right) e^{-\beta_m t \tau} \right]^{\frac{1}{\tau}}. \quad (3.22)$$

Na figura 1 são mostrados os pontos $(t, P_N(t))$, sendo $P_N(t)$ os pesos normalizados dos dados coletados e a curva $p_m(t)$ obtida através do método do gradiente descendente.

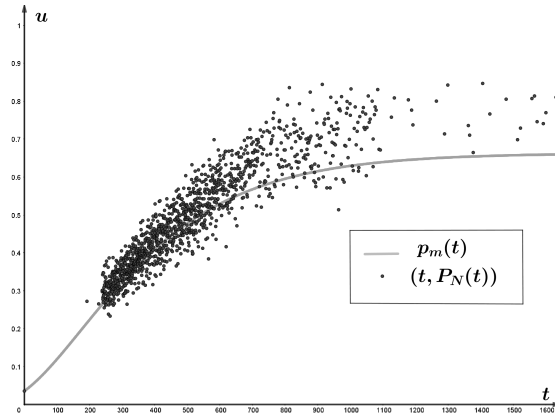


Figura 1: A curva $p_m(t)$, em cor cinza claro, e os pontos que representam os dados normalizados, em pontos de cor preta, representados no plano $t0u$.

A seguir, fixa-se o valor achado de a em (3.20) e experimentam-se valores de b por meio da ferramenta de controle deslizante do software GeoGebra (Hohenwarter, 2021), de forma a se obter curvas geradas a partir de $p_m(t)$ que formam uma faixa que cobre os pontos $(t, P_N(t))$. O controle deslizante percorre o intervalo discreto $[0.00282, 0.00357]$ com incremento igual a 0.000001 . Algumas das curvas obtidas e o controle deslizante b são mostradas na figura 2.

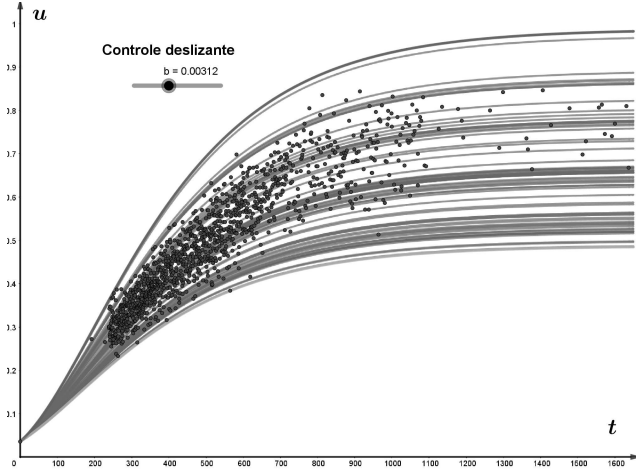


Figura 2: As curvas geradas a partir de $p_m(t)$ utilizando o controle deslizante.

Por meio desse procedimento, obtém-se as duas funções de pertinência, $\underline{\mu}_{\tilde{P}}$ e $\overline{\mu}_{\tilde{P}}$ dadas por

$$\underline{\mu}_{\tilde{P}}(t) = 0.48697 \left[1 + \left(-1 + \left(\frac{p_m(0)}{0.48697} \right)^\tau \right) e^{-\beta t \tau} \right]^{\frac{1}{\tau}} \quad (3.23)$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{P}}(t) = 0.98808 \left[1 + \left(-1 + \left(\frac{p_m(0)}{0.98808} \right)^\tau \right) e^{-\beta t \tau} \right]^{\frac{1}{\tau}}, \quad (3.24)$$

em que $\beta = \beta_m$ e $\overline{\mu}_{\tilde{P}}(0) = \underline{\mu}_{\tilde{P}}(0) = p_m(0)$. Essas funções determinam a FOU do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar \tilde{P} , caracterizado por:

$$\tilde{P} = \{((t, u), \mu_{\tilde{P}}(t, u)) | (t, u) \in [0, 1650] \times [0, 1], \mu_{\tilde{P}}(t, u) \in [0, 1]\}.$$

Na figura 3 são apresentados os pontos $(t, P_N(t))$ entre os gráficos das funções de pertinência $\underline{\mu}_{\tilde{P}}$ e $\overline{\mu}_{\tilde{P}}$.

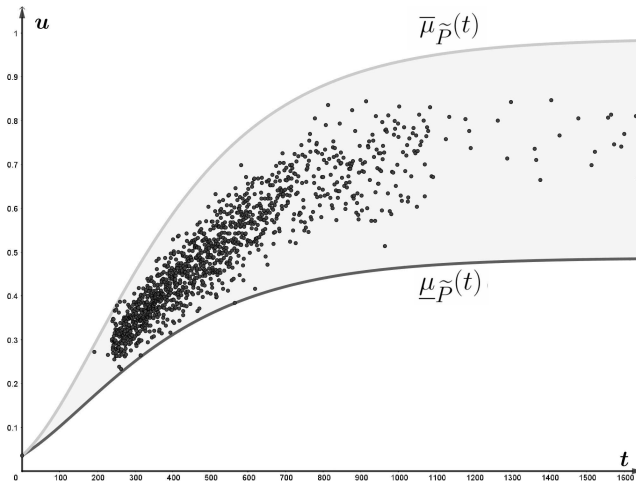


Figura 3: A FOU de \tilde{P} conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar que modela o crescimento do peso normalizado em função do tempo.

Como salientado na ilustração (1.1), a semântica da lógica proposicional da teoria dos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, interpreta a modelagem da figura 4 da seguinte forma:

“A afirmação “o peso da fêmea zebuína Nelore está entre $\underline{\mu}_{\tilde{P}}(t)$ e $\bar{\mu}_{\tilde{P}}(t)$, para cada $t \in [0, 1650]$ ” tem como valor de verdade 1.”

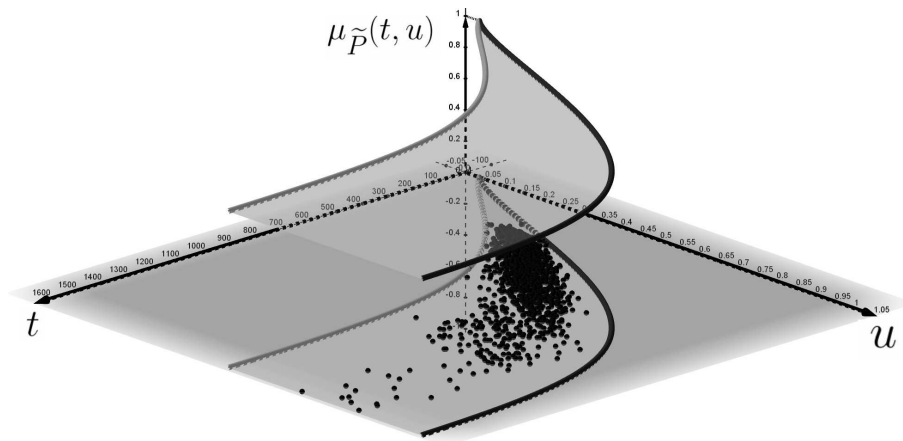


Figura 4: O conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar \tilde{P} .

4. Conclusão

Uma modelagem da relação crescimento idade–peso de fêmeas da raça zebuína é desenvolvido utilizando a equação de von Bertalanffy correspondente ao expoente $\frac{2}{3}$ e a lógica fuzzy do tipo 2 intervalar. A metodologia é aplicada a um conjunto de dados reais fornecido por uma acurada investigação da raça bovina Nelore, cujas particularidades desafiam as clássicas abordagens utilizadas na literatura para interpretar matematicamente a relação formulada pela equação de von Bertalanffy. A partir da existência de uma proporcionalidade das médias aritméticas dos pesos normalizados e utilizando o método do gradiente descendente, obtêm-se uma primeira curva solução que é a interpretação do comportamento das médias do conjunto de dados. A forma de estender a interpretação para todos os pesos é feita através da descoberta de um intervalo onde o coeficiente linear varia. Para os diferentes valores desse coeficiente são determinadas curvas solução da equação de von Bertalanffy que formam a pegada de incerteza do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, resultado da modelagem.

Agradecimentos

O terceiro autor agradece o apoio financeiro concedido pela Petrobras–Petróleo Brasileiro S. A. – R& D Center (CENPES), RJ, Brasil, CEP: 21.941-915.

Referências

- Bartholomew, G. A. (1981). A matter of size: An examination of endothermy in insects and terrestrial vertebrates. *Insect Thermoregulation*, páginas 45–78.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino–Aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto, São Paulo.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S.Paulo.
- Bertalanffy, L. V. (1957). Quantitative laws in metabolism and growth. *Quarterly Reviews of Biology*, 32:217–231.

- Hohenwarter, M. (2021). GeoGebra, Version 5.0. Disponível em <http://www.geogebra.org> Acesso em: 23/07/2021.
- Jafelice, R. e Bertone, A. (2020). *Biological Models via Interval Type-2 Fuzzy Sets*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing.
- Mendel, J. M. (2017). *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice-Hall, Upper - Saddle River, NJ, 2ª edição.
- Mendel, J. M., Rajati, M. R., e Sussner, P. (2016). On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets as well as some recommended changes. *Information Science*, 340-341:337–345.
- Team, R. C. (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.

