Biomatemática ***30*** *(2020), 159–176* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Sequências recorrentes lineares de primeira e segunda ordem de números fuzzy interativos

Vinícius F. Wasques[1],
IGCE – UNESP, 13.506-900, Rio Claro/SP.

Estevão Esmi[2], Laécio C. Barros[3],
DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Este trabalho se dedica a estudar sequências de números fuzzy que são obtidas em forma de recorrência, cujas condições iniciais são dadas por números fuzzy. Especificamente, o foco desse estudo é sobre sequências lineares de primeira e segunda ordem. A dependência entre o n-ésimo termo da sequência e os seus antecessores é descrita através da relação de interatividade, que surge de uma distribuição de possibilidade conjunta J. Uma discussão sobre o uso de interatividade nesse contexto é apresentada. A fim de ilustração, as sequências fuzzy de decaimento e de Fibonacci são fornecidas.

Palavras-chave: *Sequências fuzzy lineares; sequência de decaimento; sequência de Fibonacci.*

1. Introdução

Sequência de números reais podem ser utilizadas para descrever diversos problemas na ciência. Por exemplo, o crescimento populacional de certas espécies podem ser modeladas por sequências numéricas, assim como o matemático Leonardo Fibonacci fez.

A fim de modelar o crescimento populacional de coelhos, Fibonacci considerou a seguinte dinâmica: a população se dá a partir de um par de coelhos

[1] vwasques@outlook.com
[2] eelaureano@gmail.com
[3] laeciocb@ime.unicamp.br

imaturos, que após uma temporada reprodutiva concebem dois pares de coelhos imaturos. Cada casal dá origem a dois novos pares, após a temporada reprodutiva e os progenitores por sua vezes param de se reproduzir. Esse comportamento é repetido indefinidamente. Desconsiderando a mortalidade, o problema a ser estudado é determinar o número de pares de coelhos em cada período reprodutivo.

A sequência mencionada acima ficou conhecida como sequência de Fibonacci e é matematicamente descrita pela sequência recorrente linear de segunda ordem $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em que x_n representa o número de casais coelhos no instante n.

Para descrever os elementos desse tipo de sequência é necessário ter conhecimento das condições iniciais, no caso da sequência de Fibonacci x_1 e x_2. Isso significa ter conhecimento preciso da quantidade de casais de coelhos em um determinado tempo, para que uma estimativa após n meses seja feita. Desse modo, existe uma certa incerteza nas condições iniciais dessa sequência em termos de aplicações.

Uma possibilidade de descrever essa incerteza é através de variáveis linguísticas. Por exemplo, se inicialmente existe "em torno de" 3 casais de coelhos, então quantos casais se espera ter daqui a 6 meses? A incerteza sobre a condição inicial foi transferida para a expressão "em torno de". Sendo assim, a teoria de conjuntos fuzzy se torna útil para descrever a expressão "em torno de" em um modo matemático.

Para incorporar a incerteza no modelo, mas sem utilizar a expressão "em torno de", pode-se utilizar números fuzzy. Ainda mais, pelas características dessa dinâmica populacional pode-se perceber que a quantidade de casais no tempo n depende da quantidade de casais nos tempos anteriores. Essa dependência também pode ser modelada através de uma relação entre números fuzzy chamada interatividade.

Interatividade é uma relação entre números fuzzy que surge de uma distribuição de possibilidade conjunta. Esse conceito é bastante similar à noção de dependência no caso de variáveis aleatórias.

Aqui será apresentado um modo de descrever sequências numéricas que incorporam tanto a incerteza sobre suas condições iniciais, quanto a dependência entre seus elementos. Dentre todas as sequências, o foco será sobre as sequências lineares de primeira e segunda ordem. Por fim, as sequência de decaimento e de Fibonacci serão apresentadas, a fim de ilustração.

2. Preliminares

Esta seção fornece os conceitos básicos da teoria de conjuntos clássica e fuzzy que são necessários para a compreensão dos estudos realizados nesse artigo.

Uma sequência ou sucessão de números reais é definida por qualquer função na forma $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Uma sequência de recorrência é uma sucessão, que através de uma lei de associação, permite calcular qualquer termo a partir dos seus antecessores imediatos. Por exemplo, $x(n+1) = x(n)+1$ é uma sequência de recorrência.

É importante notar que só faz sentido estudar sequências de recorrência, se houverem condições iniciais. Isto é, partindo da condição inicial $x(0) = 1$, tem-se que a sequência $x(n+1) = x(n) + 1$ assume os seguintes valores $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Para simplificar a notação, é comum utilizar o símbolo x_n para se referir ao n-ésimo termo da sequência $x(n)$.

Uma sequência de recorrência linear de primeira ordem é definida da seguinte forma $x_{n+1} = f(n, x_n) = a_n x_n + b_n$, em que a_n e b_n são sequências pré-determinadas. Por exemplo, a sequência $x_{n+1} = nx_n + 1$ é uma sequência linear de primeira ordem. Uma outra sequência linear de primeira ordem que é bastante conhecida é a de decaimento $x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n$, com $0 < \lambda < 1$.

De modo similar, uma sequência linear de segunda ordem é definida da seguinte forma $x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n + c_n$, sendo a_n, b_n e c_n sequências pré-estabelecidas. A sequência de Fibonacci $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ é um exemplo desse tipo de sequência.

Perceba que tanto no caso de primeira ordem, quanto no de segunda ordem, só é possível determinar o elemento x_{n+1} a partir de x_n (e x_{n-1}). Isso significa que existe uma dependência entre os termos da sequência, que é descrita por sua lei de associação.

Note que no caso de sequências de segunda ordem, tem-se uma soma entre os elementos da própria sequência. No contexto da teoria clássica, essa sequência é obtida de uma única forma, uma vez que só há um modo de efetuar tal soma. O mesmo não ocorre no contexto da teoria de conjuntos fuzzy, como será apresentado a seguir.

Um subconjunto fuzzy A de um universo X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : X \to [0, 1]$ em que $\mu_A(x)$ indica o grau com que $x \in X$ pertence ao subconjunto A (Zadeh, 1965). Em particular, todo conjunto clássico A pode ser entendido como um subconjunto fuzzy em X em que sua função de pertinência é dada pela função característica $\chi_A : X \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Para simplificar a notação, as funções de pertinência $\mu_A(x)$ são denotadas por $A(x)$ para todo $x \in X$. A classe dos subconjuntos fuzzy de X é denotada por $\mathcal{F}(X)$. Um subconjunto fuzzy A está contido em um subconjunto fuzzy B se, e somente se, $A(x) \leq B(x)$. Nesse caso, denota-se $A \subseteq B$. Portanto, $A = B$ se, e somente se $A(x) = B(x)$ para todo $x \in X$.

É possível caracterizar conjuntos fuzzy através de conjuntos clássicos chamados de α-níveis. Os α-níveis de um subconjunto fuzzy A de X são definidos por

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{x \in X : A(x) > 0\}}, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

em que X é um espaço topológico e $\overline{Y}$ representa o fecho do subconjunto $Y \subseteq X$.

Os números fuzzy são subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$ cujos α-níveis são intervalos limitados, fechados, encaixantes e não vazios para todo $\alpha \in [0,1]$, e são denotados por $[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ (Barros et al., 2017). A classe de números fuzzy é denotada por $\mathbb{R}_\mathcal{F}$. Dentro dessa classe, pode-se considerar os números fuzzy que possuem extremos $a_{(\cdot)}^-$ e $a_{(\cdot)}^+$ contínuos com respeito à α. A subclasse formada por tais números fuzzy é denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\mathcal{C}}$. Por exemplo os números fuzzy triangulares, denotados por $(a;b;c)$ com $a \leq b \leq c$, são elementos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\mathcal{C}}$. Lembrando que um número fuzzy triangular A é definido por

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & , \text{ se } a \leq x < b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & , \text{ se } b \leq x < c \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases},$$

e possui α-níveis dados por $[A]^\alpha = [a + \alpha(b-a), c + \alpha(b-c)]$.

Números fuzzy podem ser utilizados para descrever variáveis linguísticas matematicamente. Por exemplo, pode-se modelar a expressão “em torno de 2” pelo seguinte número fuzzy triangular $(1;2;3)$. Pode-se ainda utilizar o número fuzzy $(0;2;4)$ para modelar a mesma expressão, no entanto, $(0;2;4)$ leva em consideração mais números próximo de 2 do que $(1;2;3)$. Essa escolha depende do problema a ser estudado (Wasques et al., 2020b).

O diâmetro de um número fuzzy é definido por $diam(A) = a_0^+ - a_0^-$. Quanto maior o diâmetro de um número fuzzy, maior é a incerteza que este modela. Por exemplo, no número fuzzy $(0; 2; 4)$ existe uma maior incerteza entre os números que estão em torno de 2 do que em $(1; 2; 3)$. Em particular, $diam(A) = 0$ se, e somente se $A \in \mathbb{R}$. Isto é, não existe incerteza no caso em que A é um número real.

Uma relação fuzzy R entre dois universos X e Y é dada pela função de pertinência $R : X \times Y \to [0, 1]$, sendo $R(x, y) \in [0, 1]$ o grau em que $x \in X$ e $y \in Y$ estão relacionados segundo a relação R. Uma relação fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy A_1 e A_2 se

$$A_1(x_1) = \bigvee_{x_2} J(x_1, x_2) \quad \text{e} \quad A_2(x_2) = \bigvee_{x_1} J(x_1, x_2),$$

sendo que o símbolo $\bigvee$ representa o supremo.

Uma relação fuzzy que surge através do conceito de distribuições de possibilidade conjunta é a de *interatividade*, que se assemelha a ideia de dependência para o caso de variáveis aleatórias.

Definição 1 *Os números fuzzy A_1 e A_2 são ditos* não interativos *se a distribuição de possibilidade conjunta entre eles é dada por*

$$J_\wedge(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2), \tag{2.1}$$

em que o símbolo $\wedge$ representa o mínimo.

Se J é uma distribuição de possibilidade conjunta entre A_1 e A_2, com $J \neq J_\wedge$, então A_1 e A_2 são ditos interativos.

A definição acima deixa claro que a relação de interatividade está associada ao conceito de distribuição de possibilidade conjunta. De modo similar, no caso de variáveis aleatórias, a noção de dependência está associada com distribuições de probabilidade conjunta. A Figura 1 ilustra o caso em que dois números fuzzy são não interativos.

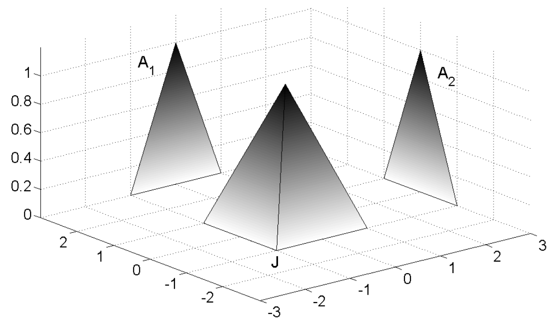

Figura 1: Números fuzzy A_1 e A_2 não interativos, representados pelos triângulos. A distribuição $J_\wedge$ (2.1) é representada pela pirâmide. Os tons de cinza representam os α-níveis dos conjuntos fuzzy (Wasques, 2019).

A seguir um caso de números fuzzy interativos é apresentado.

Definição 2 (Carlsson et al. (2004)) *Os números fuzzy $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ são chamados completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$ tal que*

$$\begin{aligned} J_{q,r}(x_1, x_2) &= A_1(x_1)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \\ &= A_2(x_2)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad , \tag{2.2}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sendo $\chi_{\{qu+r=v\}}$ a função característica do conjunto $\{(u, qu + r) : \ \forall u\}$.

Note que essa distribuição conjunta $J_{q,r}$ se anula em todos os pares $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, exceto aqueles que estão sobre a reta $v = qu + r$ (veja Figura 2). Isso significa alta interatividade, de acordo com interpretação acima. Mais ainda, corrobora com a denominação "completamente correlacionados".

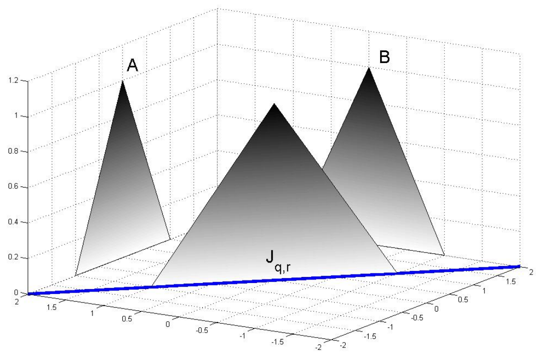

Figura 2: Números fuzzy A e B interativos. A distribuição $J_{q,r}$ (2.2) está representada pelo triângulo que está sobre a linha azul. A linha azul representa a reta $v = qu + r$. Os tons de cinza representam os α-níveis dos conjuntos fuzzy (Wasques, 2019).

Tal conjunta foi proposta em (Carlsson et al., 2004) a fim de definir uma soma entre números fuzzy, contemplando a noção de interatividade. Mais adiante, a conjunta $J_{q,r}$ foi generalizada para n, com $n > 2$, números fuzzy (Wasques et al., 2018; Pinto et al., 2018, 2019; Esmi et al., 2020). Esse tipo de interatividade tem sido utilizada em aplicações nas áreas de equações diferenciais fuzzy (Wasques et al., 2020a; Pedro et al., 2020) e de otimização fuzzy (Pinto et al., 2018, 2019).

Embora tenha grande aplicabilidade, a distribuição de possibilidade conjunta (2.2) é restritiva, uma vez que exclui números fuzzy que não possam ser correlacionados através de uma mesma reta. Por exemplo, os números fuzzy $(1; 2; 4)$ e $(1; 3; 5)$, mesmo sendo triangulares, não são completamente correlacionados.

Para um estudo mais geral é necessário buscar uma distribuição de possibilidade conjunta que não possua tais restrições. Aqui a conjunta a ser utilizada é a J_0, a qual é definida a seguir (Esmi et al., 2018; Sussner et al., 2016).

Dados $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$, considere a função auxiliar

$$g^i_\wedge(z, \alpha) = \bigwedge_{w \in [A_{3-i}]^\alpha} |w + z - (c_1 + c_2)| + (c_1 + c_2) \tag{2.3}$$

com $c_i = 0.5(a^-_{i_1} + a^+_{i_1})$, para todo $z \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$ e $i \in \{1, 2\}$.

Considere também os conjuntos R^i_α e $L^i(z,\alpha)$,

$$R^i_\alpha = \begin{cases} \{a^-_{i_\alpha}, a^+_{i_\alpha}\} & \text{se } \alpha \in [0,1) \\ [A_i]^1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e

$$L^i(z,\alpha) = [A_{3-i}]^\alpha \cap [-g^i(z,\alpha) - z, g^i(z,\alpha) - z].$$

Finalmente, a conjunta J_0 é definida por

$$J_0(x_1,x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2), & \text{se } (x_1,x_2) \in P \\ 0 \quad , & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.4}$$

com

$$P = \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \{(x_1,x_2) : x_i \in R^i_\alpha \text{ e } x_{3-i} \in L^i(x_i,\alpha)\}$$

para todo $i \in \{1,2\}$ e $\alpha \in [0,1]$.

Ainda que a conjunta J_0 seja mais complexa que a $J_{q,r}$, sua construção permite relacionar qualquer par de números fuzzy. Por exemplo, o par de números fuzzy $(1;2;4)$ e $(1;3;5)$, visto anteriormente, é interativo segundo a conjunta J_0 (veja a Figura 3).

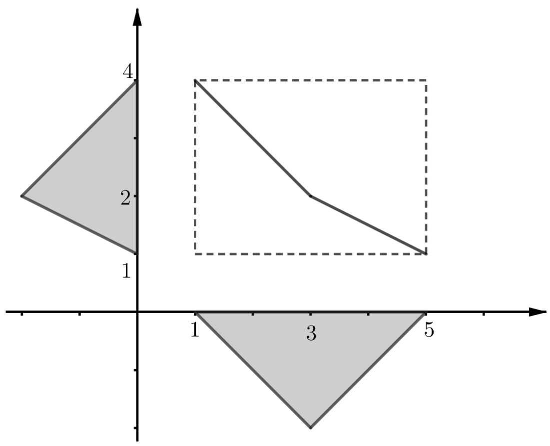

Figura 3: Visão superior dos números fuzzy $(1;2;4)$ e $(1;3;5)$ interativos segundo a distribuição de possibilidade conjunta J_0 (2.4). A conjunta J_0 é representada pelos dois segmentos de reta em preto.

A próxima seção define uma aritmética entre números fuzzy que contempla a relação de interatividade.

3. Aritmética fuzzy interativa

Uma vez estabelecida a interatividade entre um par de números fuzzy, através de uma conjunta J, é possível determinar operações aritméticas entre eles utilizando a mesma conjunta J. Isso é feito por meio do princípio de extensão sup-J.

Definição 3 (Fullér e Majlender (2004)) *Sejam $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ uma distribuição de possibilidade conjunta de A_1 e A_2 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. A extensão sup-$J$ da função f aplicada em (A_1, A_2) é definida por*

$$f_J(A_1, A_2)(y) = \bigvee_{f(x_1,x_2)=y} J(x_1, x_2).$$

Perceba que a definição acima estende o princípio de extensão de Zadeh, uma vez que o mesmo é obtido considerando $J = J_\wedge$. Utilizando operadores aritméticos $f(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2$ na Definição 3, com $\otimes \in \{+, -, \cdot, \div\}$, é possível obter operações aritméticas entre números fuzzy. Sendo assim, quando $J = J_\wedge$ a aritmética é chamada de usual (ou aritmética não interativa), e quando $J \neq J_\wedge$ a aritmética é chamada de interativa (Wasques, 2019).

Por exemplo, a soma interativa entre A_1 e A_2 segundo uma distribuição $J \neq J_\wedge$ qualquer é definida do seguinte modo

$$(A_1 +_J A_2)(y) = \bigvee_{x_1+x_2=y} J(x_1, x_2). \tag{3.5}$$

No caso em que os números fuzzy A_1 e A_2 são não interativos, a soma é denotada simplesmente por $A_1 + A_2$, ao invés de $A_1 +_{J_\wedge} A_2$. A partir dessa definição fica claro que é possível realizar a soma entre números fuzzy de diversas formas, uma para cada tipo de interatividade.

Em particular, para as distribuições de possibilidade conjunta J_0, J_L e $J_\wedge$ a soma entre números fuzzy triangulares $A = (a; b; c)$ e $B = (d; e; f)$ é definida da seguinte forma (Barros et al., 2017; Barros e Pedro, 2017; Wasques et al., 2020b)

$$A +_0 B = \begin{cases} ((a+f) \wedge (b+e); b+e; (b+e) \vee (c+d)), & \text{se } diam(A) \geq diam(B) \\ ((c+d) \wedge (b+e); b+e; (b+e) \vee (a+f)), & \text{se } diam(A) \leq diam(B), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$A +_L B = (1+q)(a;b;c) + r \tag{3.7}$$

e

$$A + B = (a+d; b+e; c+f), \tag{3.8}$$

em que os símbolos $\wedge$ e $\vee$ representam o mínimo e o máximo, respectivamente.

Na próxima seção é fornecida uma extensão das sequências clássicas de recorrência, para o contexto de números fuzzy interativos e não interativos.

4. Sequência de números fuzzy

Uma sequência fuzzy é definida por toda função da forma $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Em particular, uma sequência fuzzy é dita recorrente se, através de uma lei de associação, é possível determinar qualquer termo a partir de seus antecessores imediatos.

Para construir sequências fuzzy de recorrência, pode-se simplesmente estender as operações aritméticas presentes nas sequências de recorrência clássicas. Por exemplo, a sequência de translação fornecida na seção Preliminares $x_{n+1} = x_n + 1$, pode ser estendida para $X_{n+1} = X_n +_J 1$.

Como ressaltado anteriormente, uma sequência de recorrência clássica só está bem definida se, condições iniciais são pré-determinadas. O mesmo é considerado aqui. Isto é, se a condição inicial da sequência é dada por um número fuzzy, então $X_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, a partir da condição inicial $X_0 = (0;1;2)$ a sequência $X_{n+1} = X_n +_J 1$ assume os seguintes valores:

$$\{(0;1;2), (1;2;3), (2;3;4), (3;4;5), \ldots\},$$

independente da conjunta escolhida. Isto porque no caso em que $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $b \in \mathbb{R}$, tem-se: $A + b = A +_J b$, para qualquer distribuição J.

Definição 4 *Uma sequência de recorrência fuzzy é dita linear de primeira ordem se é definida por*

$$X_{n+1} = a_n X_n +_J b_n,$$

em que a_n e b_n são sequências clássicas pré-determinadas.

A sequência $X_{n+1} = X_n +_J 1$, apresentada acima, é um exemplo de sequência recorrente linear de primeira ordem.

Perceba que as sequências lineares de primeira ordem estão bem definidas para todas as conjuntas consideradas aqui, uma vez que $J_\wedge$ e J_0 não possuem restrições de uso e a sequência X_n pode ser associada da seguinte forma $X_{n+1} = q(n)X_n + r(n)$, sendo $q(n) = a_n$ e $r(n) = b_n$, permitindo o uso da J_L.

Mesmo existindo diferentes formas de computar os elementos da sequência do tipo $X_{n+1} = a_n X_n +_J b_n$, com $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, todas elas coincidem. Isto é, tem-se

$$a_n X_n + b_n = a_n X_n +_J b_n,$$

para toda conjunta J e todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5 *Uma sequência de recorrência fuzzy é dita linear de segunda ordem se é definida por*

$$X_{n+2} = a_n X_{n+1} +_J b_n X_n +_J c_n,$$

em que a_n, b_n e c_n são sequências clássicas pré-determinadas.

Para sequências de segunda ordem fica claro a importância das escolha da conjunta, e portanto do tipo de interatividade que é utilizada. Como não necessariamente se tem $A + B = A +_J B$, com $A, B \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$, para toda conjunta J, a dependência entre o termo X_{n+2} e seus antecessores imediatos é descrita e motivada pela modelagem do problema.

Vale ressaltar que $A +_J B \subset A + B$ para toda $J \neq J_\wedge$, e a igualdade só ocorre se $J = J_\wedge$ (Wasques et al., 2019). Portanto, espera-se que os termos das sequências recorrentes, obtidas por meio de operações aritméticas interativas, tenham um menor diâmetro que os termos das não interativas. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$a_n X_{n+1} +_J b_n X_n \subset a_n X_{n+1} + b_n X_n \tag{4.9}$$

e portanto,

$$(a_n X_{n+1} +_J b_n X_n) +_J c_n \subset (a_n X_{n+1} + b_n X_n) + c_n. \tag{4.10}$$

Para determinar os elementos da sequência X_n, além das condições iniciais, é preciso efetuar operações aritméticas entre os termos antecessores da sequência. Sendo assim, para cada distribuição de possibilidade conjunta J obtém-se uma sequência de números fuzzy distinta. A fim de distinguir uma da outra, tais sequências serão denotadas aqui por X_n^J.

Na próxima seção alguns exemplos de sequências de primeira e segunda ordem serão apresentadas, a fim de ilustrar o comportamento de tais sequências a partir de diferentes conjuntas.

5. Sequências lineares fuzzy de primeira e segunda ordem

Considere a sequência clássica descrita por $x_{n+1} = (1-\lambda)x_n$, com $0 < \lambda < 1$, que é conhecida como sequência de decaimento. Essa sequência é decrescente, limitada inferiormente por 0 e, portanto, convergente. No caso em que a condição inicial é incerta, e assim modelada por um número fuzzy, tem-se a seguinte sequência

$$X_{n+1} = (1-\lambda)X_n, \tag{5.11}$$

com $X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Como destacado anteriormente a sequência fuzzy X_n^J de decaimento, assume os mesmos valores para qualquer conjunta J escolhida. A Figura 4 ilustra o comportamento dessa sequência fuzzy.

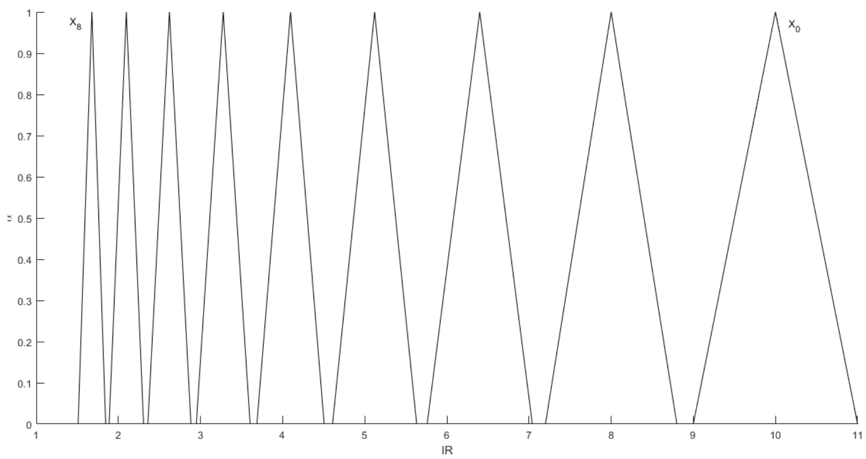

Figura 4: Sequência fuzzy de decaimento, com condição inicial $X_0 = (9; 10; 11)$. Os triângulos representam os números fuzzy $X_0, \ldots, X_8$.

Note que tal sequência assume valores que se aproximam de 0, bem como ocorre no caso clássico. Perceba ainda que o diâmetro dos números fuzzy é decrescente em relação a n, implicando que a incerteza sobre os termos da sequência diminui. Ainda mais, tem-se que $[X_n]^1 = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere agora a seguinte sequência clássica linear de segunda ordem $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, conhecida como a sequência de Fibonacci. A partir de duas condições iniciais fuzzy, pode-se estender tal sequência para

$$X_{n+2} = X_{n+1} +_J X_n. \tag{5.12}$$

Diferentemente do caso de primeira ordem, a escolha do tipo de interatividade influencia na determinação do elementos da sequência. Para ilustrar esse fato, será considerado primeiro a conjunta $J_\wedge$, que reproduz a soma usual entre números fuzzy, ao qual está sendo chamada de soma não interativa.

A Figura 5 exibe os primeiros termos da sequência $X_n^{J_\wedge}$ definida por

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n.$$

Perceba que assim como o caso clássico, os termos da sequência $X_n^{J_\wedge}$ "assumem" valores cada vez maiores, "em torno de 1", "em torno de 2", "em torno de 3", "em torno de 5", e assim por diante. No entanto, o diâmetro de seus termos é crescente em relação a n, significando que a incerteza aumenta sobre a modelagem do problema.

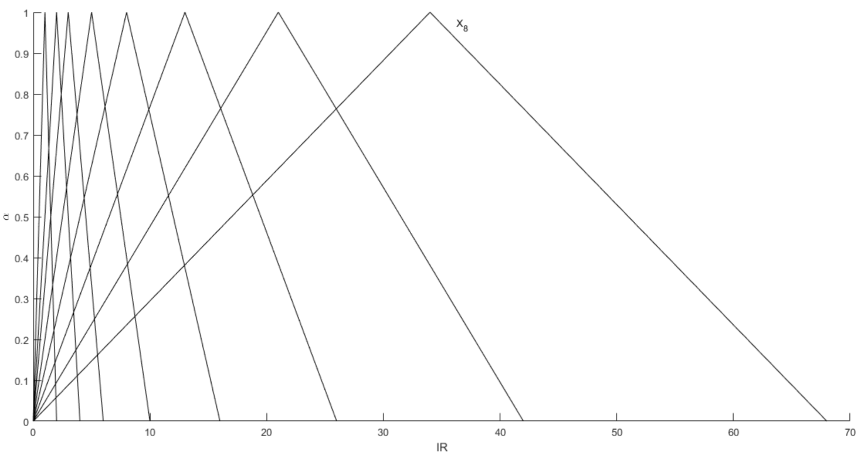

Figura 5: Sequência fuzzy de Fibonacci, com condições iniciais $X_0 = X_1 = (0; 1; 2)$ para a conjunta $J = J_\wedge$. Os triângulos representam os números fuzzy $X_0, \ldots, X_8$ de $X_n^{J_\wedge}$.

Por outro lado, considere agora o caso em que as condições iniciais X_0 e X_1 são interativas, segundo a conjunta J_0. Sendo assim, a sequência obtida por essa interatividade é determinada por

$$X_{n+2} = X_{n+1} +_0 X_n.$$

A Figura 6 exibe os primeiros termos da sequência $X_n^{J_0}$.

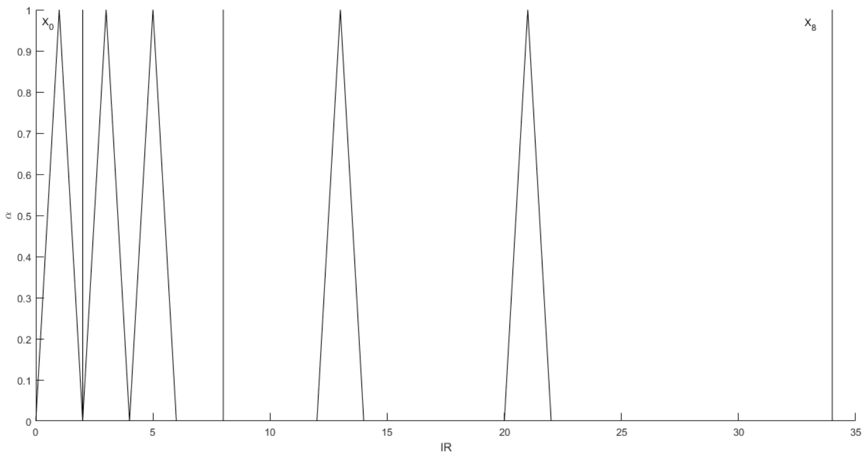

Figura 6: Sequência fuzzy de Fibonacci, com condições iniciais $X_0 = X_1 = (0; 1; 2)$ para a conjunta $J = J_0$. Os triângulos representam os números fuzzy $X_0, \ldots, X_8$ de $X_n^{J_0}$.

Note que o comportamento da sequência se mantém, qualitativamente, em comparação ao caso clássico. No entanto, o uso da interatividade permite obter um controle sobre o diâmetro dos termos da sequência, e portanto, sobre a incerteza do modelo. É interessante notar que para alguns valores de n, a sequência $X_n^{J_0}$ assume valores reais, comportamento esse que só ocorre quando se utiliza operações aritméticas interativas.

Por fim, a sequência obtida via J_L descrita por

$$X_{n+2} = X_{n+1} +_L X_n,$$

necessita de análises complementares para seu uso. Primeiro, é necessário verificar se as condições iniciais X_0 e X_1 são interativas segundo a conjunta J_L.

Caso não sejam, a operação $+_L$ não está bem definida para esse par, implicando na não existência da sequência fuzzy. Caso sejam interativas, pode-se ocorrer dois casos: o parâmetro q (ver Definição 2) pode ser positivo ou negativo.

Se o parâmetro q é positivo, então tem-se que a soma via J_L coincide com a soma usual entre números fuzzy (Barros e Pedro, 2017), isto é, $X_0 +_L X_1 = X_0 + X_1$. E o comportamento é semelhante ao comportamento ilustrado na Figura 5.

Por outro lado, se q é negativo, então tem-se que a soma via J_L coincide com a soma via J_0 (Wasques et al., 2020b), isto é, $X_0 +_L X_1 = X_0 +_0 X_1$. E o comportamento se assemelha ao comportamento ilustrado na Figura 6.

Portanto, é possível perceber que a dependência entre os termos das sequências recorrentes, modelada pela noção de interatividade, interfere no comportamento das sequências fuzzy. Ainda mais, com o uso de interatividade, é possível fornecer sequências cujos termos possuem menores diâmetros em relação ao não uso de interatividade.

Por fim, é possível notar através das Figuras 5 e 6 que $X_n^{J_0} \subset X_n^{J_\wedge}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ilustrando o resultado fornecido pela Equação (4.10).

6. Comentários finais

Este trabalho apresentou o conceito de sequências fuzzy recorrentes, que incorporam a relação de interatividade. Mais especificamente, dedicou-se ao estudo de sequências fuzzy lineares de primeira e segunda ordem, a partir de condições iniciais dadas por números fuzzy.

Constatou-se que utilizando a noção de interatividade entre números fuzzy, foi possível descrever a dependência que existe entre os termos atuais da sequência e seus antecessores imediatos, assim como ocorre em processos autocorrelacionados.

As sequências fuzzy de primeira ordem coincidem, independente da escolha da distribuição de possibilidade conjunta, uma vez que, de acordo com sua lei de associação, as sequências consistem basicamente em expansões, contrações e translações da condição inicial.

No caso das sequências fuzzy de segunda ordem, as Figuras 5 e 6 corroboram o resultado apresentado em (4.10), isto é, sequências fuzzy, que levam em conta a relação de interatividade, possuem termos com um menor diâmetro do que no caso de não interatividade.

Por fim, as sequências abordadas aqui surgem de problemas de modelagem que consideram incertezas, como por exemplo, crescimento populacional e decaimento. Esse artigo evidenciou que além de considerar a incerteza sobre as condições iniciais do fenômeno, deve-se também pensar no tipo de dependência que existe entre os estados do processo.

Referências

Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2017). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. 347. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1 edição.

Barros, L. C. e Pedro, F. S. (2017). Fuzzy differential equations with interactive derivative. *Fuzzy Sets and Systems*, 309:64–80.

Carlsson, C., Fuller, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, páginas 535–539.

Esmi, E., Sánchez, D. E., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2020). Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values. *Fuzzy Sets and Systems*.

Esmi, E., Sussner, P., Ignácio, G., e Barros, L. C. (2018). A parametrized sum of fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 331:85–104.

Fullér, R. e Majlender, P. (2004). On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(3):355 – 369.

Pedro, F. S., Esmi, E., e Barros, L. C. (2020). Calculus for linearly correlated fuzzy function using fréchet derivative and riemann integral. *Information Sciences*, 512:219–237.

Pinto, N. J. B., Esmi, E., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2019). Least square method with quasi linearly interactive fuzzy data: Fitting an hiv dataset. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, páginas 177–189, Cham. Springer International Publishing.

Pinto, N. J. B., Wasques, V. F., Esmi, E., e Barros, L. C. (2018). *Least Squares Method with Interactive Fuzzy Coefficient: Application on Longitudinal Data*, páginas 132–143. Springer International Publishing, Cham.

Sussner, P., Esmi, E., e Barros, L. C. (2016). Controling the width of the sum of interactive fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, páginas 85–104.

Wasques, V. F. (2019). *Fuzzy Differential Equations via Interactive Arithmetic: Applications in Biomathematics*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo.

Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., e Bede, B. (2019). Comparison between numerical solutions of fuzzy initial-value problems via interactive and standard arithmetics. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, páginas 704–715, Cham. Springer International Publishing.

Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., Pedro, F. S., e Sussner, P. (2018). Higher order initial value problem with interactive fuzzy conditions. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZIEEE)*, páginas 1–8.

Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., e Sussner, P. (2020a). The generalized fuzzy derivative is interactive. *Information Sciences*, 519:93–109.

Wasques, V. F., Pinto, N. J. B., Esmi, E., e Barros, L. C. (2020b). Consistence of interactive fuzzy initial conditions. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, Cham. Springer International Publishing.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353.