

Sequência de números fuzzy iterativos: uma aplicação à sequência de Fibonacci

Vinícius F. Wasques¹,

IGCE – UNESP, 13.506-900, Rio Claro/SP.

Resumo. Este trabalho apresenta o conceito de sequência de números fuzzy iterativos. A relação de interatividade está atrelada à noção de distribuição de possibilidade conjunta J . Uma comparação entre sequências iterativas e não interativa é apresentada. Uma análise complementar sobre a simetria de números fuzzy também é realizada. Finalmente, uma aplicação em uma sequência de Fibonacci é fornecida, em que as condições iniciais são dadas por números fuzzy.

Palavras-chave: Sequência de números fuzzy; Distribuição de possibilidade conjunta.

1. Introdução

Sequências de números reais têm sido objeto de estudo em diversas áreas da matemática. Em particular, existem sequências que podem ser obtidas em forma de recorrência, isto é, o n -ésimo termo dela depende dos $n-1$ termos anteriores a ele. Um exemplo desse tipo de sequência é a de Fibonacci, cujo n -ésimo termo é obtido através da soma dos dois anteriores.

A sequência de Fibonacci é motivada no crescimento populacional de coelhos, sem considerar taxa de mortalidade. Mais precisamente, esse problema considera uma população que se dá a partir de um par de coelhos imaturos (macho e fêmea), que após uma temporada reprodutiva geram dois pares de coelhos imaturos, cujos progenitores param de se reproduzir. Seus descendentes têm o mesmo comportamento e assim a dinâmica ocorre. A questão é determinar o número de pares de coelhos em cada período reprodutivo. Tal sequência é

¹vwasques@outlook.com

bem conhecida não só na área da matemática, mas também em outras áreas da ciência devido à sua aplicabilidade.

Por exemplo a espiral de Fibonacci, que é descrita através de uma disposição geométrica dos elementos da sequência, está presente em diversos fenômenos da natureza (Powell, 1979). Tais espirais podem ser observadas no centro de girassóis (Murray, 2002). A razão áurea, que é obtida pela divisão entre um termo da sequência e seu antecessor, também possui várias aplicações nas áreas de humanidades e ciências biológicas (Howard, 2004). Essas proporções podem ser observadas em diversos quadros de Leonardo da Vinci.

No entanto, para descrever esse tipo de sequência é necessário partir de condições iniciais. Isto é, para estimar o número de casais de coelhos após n meses, deve-se ter conhecimento de quantos casais de coelhos estão presentes em uma determinada região. Desse modo, existe uma certa incerteza nas condições iniciais dessa sequência em termos de aplicações.

Como não se sabe precisamente o número inicial de casais de coelhos, tem-se por objetivo modelar essa incerteza através de variáveis linguísticas. Isto é, se inicialmente existe “em torno de” 1 casal de coelhos, então espera-se que após 6 meses existam “em torno de” 8 casais de coelhos, uma vez que tal fenômeno é descrito deterministicamente pela equação $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Aqui a incerteza é atrelada à expressão “em torno de”.

Nesse caso a teoria de conjuntos fuzzy se torna útil para descrever esse tipo de problema. Ou seja, a fim de incorporar a incerteza no modelo, mas sem utilizar a expressão “em torno de”, pode-se utilizar números fuzzy. Ainda mais, tem-se uma dependência entre os termos dessa sequência, isto é, o n -ésimo termo depende dos dois antecessores a ele. Essa dependência pode ser modelada através do conceito de interatividade entre números fuzzy (Wasques, 2019).

Interatividade é uma relação fuzzy que surge de uma distribuição de possibilidade conjunta entre números fuzzy. Tal relação é semelhante, mas não equivalente, à noção de dependência no caso de variáveis aleatórias. Nesse trabalho serão abordadas sequências de números fuzzy que incorporam a relação de interatividade. As vantagens desse tipo de sequência serão ilustradas através de uma aplicação em uma sequência de Fibonacci, cujas condições iniciais são dadas por números fuzzy. Por fim, uma breve análise sobre simetria de números fuzzy é apresentada.

2. Preliminares

A seguir são apresentados os conceitos da teoria de conjuntos fuzzy utilizados no decorrer desse artigo.

Definição 1 (Zadeh (1965)) *Um subconjunto fuzzy A de um universo X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ em que $\mu_A(x)$ indica o grau com que $x \in X$ pertence ao subconjunto A .*

Todo subconjunto clássico A em X pode ser definido por sua função característica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Dessa forma, todo conjunto clássico pode ser entendido, em particular, como um conjunto fuzzy. A classe dos subconjuntos fuzzy de X é denotada por $\mathcal{F}(X)$. Para simplificar a notação, as funções de pertinência $\mu_A(x)$ são simplesmente denotadas por $A(x)$ para todo $x \in X$. Um subconjunto fuzzy A está contido em um subconjunto fuzzy B se, e somente se, $A(x) \leq B(x)$. Nesse caso, denota-se $A \subseteq B$.

Os α -níveis de um subconjunto fuzzy A de X são definidos pelos conjuntos $[A]^\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$, para todo $0 < \alpha \leq 1$. No caso em que X é um espaço topológico, define-se também o α -nível para $\alpha = 0$ da seguinte forma: $[A]^0 = \overline{\{x \in X : A(x) > 0\}}$, sendo que \bar{Y} representa o fecho do subconjunto $Y \subseteq X$.

Os números fuzzy são subconjuntos fuzzy de \mathbb{R} cujos α -níveis são intervalos limitados, fechados e não vazios para todo $\alpha \in [0, 1]$, e são denotados por $[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ (Barros et al., 2017). A classe dos números fuzzy é denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Uma subclasse de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ que é bastante explorada é a $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, cujos números fuzzy possuem extremos $a_{(\cdot)}^-$ e $a_{(\cdot)}^+$ contínuos com respeito à α . Os números fuzzy triangulares são exemplos de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$. Denotado por $(a; b; c)$ com $a \leq b \leq c$, um número fuzzy triangular A é dado por

$$A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ se } a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & , \text{ se } b \leq x < c \\ 0 & , \text{ se } c \leq x \end{cases}.$$

Um número fuzzy A é simétrico com respeito a $x \in \mathbb{R}$, se $A(x - y) = A(x + y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Se não existir um elemento $x \in \mathbb{R}$ com tal propriedade, então o número fuzzy A é chamado de não simétrico. Por exemplo, o número fuzzy triangular $(1; 2; 3)$ é simétrico com respeito a $x = 2$, enquanto que $(1; 2; 4)$ é não simétrico. Um estudo mais detalhado sobre simetria de números fuzzy pode ser encontrado em (Esmi et al., 2018a, 2020).

O diâmetro de um número fuzzy é definido por $diam(A) = a_0^+ - a_0^-$ e está atrelado a incerteza que este modela. Isto é, quanto maior o diâmetro, maior é a incerteza associada ao número fuzzy. Por outro lado quanto menor o diâmetro, menor é a incerteza, de modo que quando $diam(A) = 0$ tem-se $A \in \mathbb{R}$.

Uma relação fuzzy R entre dois universos X e Y é dada pela função de pertinência $R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, sendo $R(x, y) \in [0, 1]$ o grau em que $x \in X$ e $y \in Y$ estão relacionados segundo a relação R .

Uma relação fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy A_1 e A_2 se

$$A_1(x_1) = \bigvee_{x_2} J(x_1, x_2) \quad \text{e} \quad A_2(x_2) = \bigvee_{x_1} J(x_1, x_2),$$

sendo que o símbolo \bigvee representa o supremo.

Definição 2 (Carlsson et al. (2004)) *Os números fuzzy A_1 e A_2 são ditos não interativos se a distribuição de possibilidade conjunta entre eles é dada por*

$$J_{\wedge}(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2),$$

em que o símbolo \wedge representa o mínimo.

Caso contrário, isto é, se $J \neq J_{\wedge}$, então A_1 e A_2 são ditos interativos.

A definição acima esclarece que a noção de interatividade está associada ao conceito de distribuição de possibilidade conjunta. Isto é, para saber se dois números fuzzy são ou não interativos, é necessário primeiro ter conhecimento sobre sua distribuição de possibilidade conjunta. A Figura 1 ilustra o caso em que dois números fuzzy são não interativos. A Figura 2 mostra o caso que os números fuzzy são interativos.

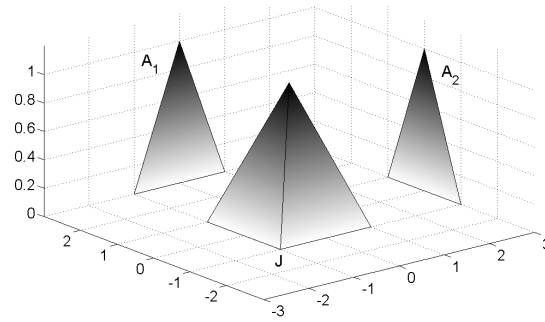


Figura 1: Números fuzzy não interativos. Os triângulos representam os números fuzzy e a pirâmide representa a distribuição de possibilidade conjunta J_{\wedge} . Os tons de cinza representam os α -níveis dos conjuntos fuzzy (Wasques, 2019).

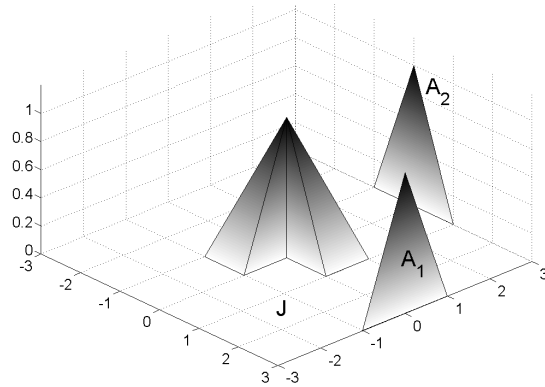


Figura 2: Números fuzzy interativos. Os triângulos representam os números fuzzy e a pirâmide cortada representa a distribuição de possibilidade conjunta $J \neq J_{\wedge}$. Os tons de cinza representam os α -níveis dos conjuntos fuzzy (Wasques, 2019).

Como pode-se ver na Figura 2, a interatividade é tanto maior quanto maior for o número de pontos em que J se anula. Uma distribuição de possibilidade conjunta bivariada bastante utilizada é a seguinte:

Definição 3 ((Carlsson et al., 2004)) *Os números fuzzy $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ são chamados completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$ tal*

que

$$\begin{aligned} J_{q,r}(x_1, x_2) &= A_1(x_1)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \\ &= A_2(x_2)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sendo $\chi_{\{qu+r=v\}}$ a função característica do conjunto $\{(u, qu+r) : \forall u\}$.

Note que essa distribuição conjunta $J_{q,r}$ se anula em todos os pares $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, exceto aqueles que estão sobre a reta $v = qu + r$ (veja Figura 3). Isso significa alta interatividade, de acordo com interpretação acima. Mais ainda, corrobora com a denominação “completamente correlacionados”.

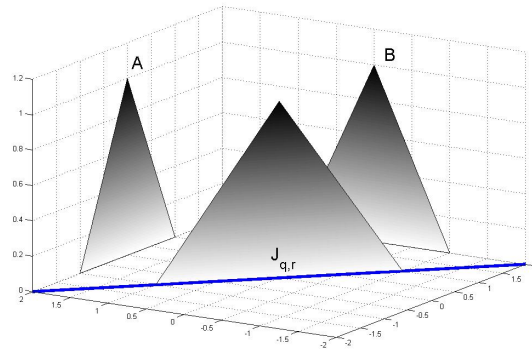


Figura 3: Números fuzzy interativos segundo $J_{q,r}$. Os tons de cinza representam os α -níveis dos conjuntos fuzzy (Wasques, 2019).

A conjunta $J_{q,r}$ tem sido utilizada em aplicações nas áreas de equações diferenciais fuzzy (Wasques et al., 2018; Pedro et al., 2020) e de otimização fuzzy (Pinto et al., 2018, 2019). Apesar da grande aplicabilidade, a distribuição de possibilidade conjunta (2.1) é restritiva, uma vez que exclui números fuzzy que não possam ser correlacionados através de uma reta. Por exemplo, os números fuzzy triangulares $(1; 2; 4)$ e $(1; 3; 5)$ não são completamente correlacionados.

Precisamente, a interatividade obtida da conjunta $J_{q,r}$ impõe uma relação de simetria entre os números fuzzy envolvidos. Isto é, se A e B são completamente correlacionados então A é simétrico se, e somente se, B também o é.

Para um estudo amplo é necessário utilizar uma distribuição de possibilidade conjunta mais abrangente que $J_{q,r}$, a qual será definida a seguir (Esmi

et al., 2018b; Sussner et al., 2016).

Dados $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, considere a função auxiliar

$$g_\wedge^i(z, \alpha) = \bigwedge_{w \in [A_{3-i}]^\alpha} |w + z - (c_1 + c_2)| + (c_1 + c_2) \quad (2.2)$$

com $c_i = 0.5(a_{i_1}^- + a_{i_1}^+)$, para todo $z \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$ e $i \in \{1, 2\}$.

Considere também os conjuntos R_α^i e $L^i(z, \alpha)$,

$$R_\alpha^i = \begin{cases} \{a_{i_\alpha}^-, a_{i_\alpha}^+\} & \text{se } \alpha \in [0, 1) \\ [A_i]^1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e

$$L^i(z, \alpha) = [A_{3-i}]^\alpha \cap [-g^i(z, \alpha) - z, g^i(z, \alpha) - z].$$

Finalmente, a conjunta J_0 é definida por

$$J_0(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in P \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.3)$$

com

$$P = \bigcup_{i=1}^2 \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \{(x_1, x_2) : x_i \in R_\alpha^i \text{ e } x_{3-i} \in L^i(x_i, \alpha)\}$$

para todo $i \in \{1, 2\}$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Embora a conjunta J_0 seja mais complexa que a $J_{q,r}$, sua construção permite relacionar qualquer par de números fuzzy, independente de sua simetria ou formato. Portanto, o estudo realizado aqui será feito através da conjunta J_0 . As Figuras 4 e 5 ilustram tal conjunta. Note que para o caso da Figura 5 a conjunta $J_{q,r}$ também pode ser aplicada.

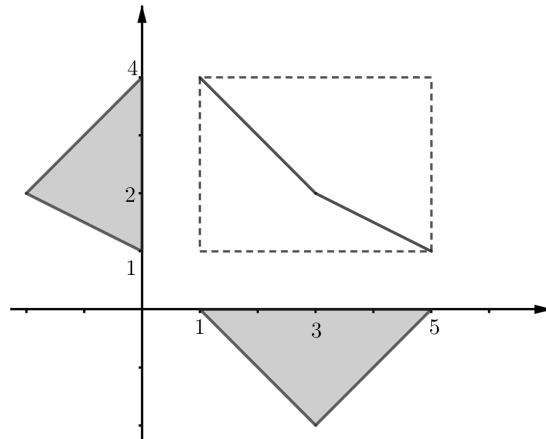


Figura 4: Números fuzzy interativos, segundo J_0 , com diferentes simetrias.

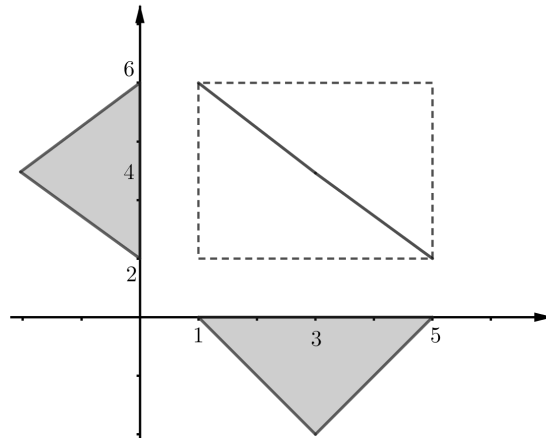


Figura 5: Números fuzzy interativos, segundo J_0 , com mesma simetria.

É possível determinar uma aritmética para números fuzzy que incorpora a relação de interatividade. Essa aritmética, chamada de aritmética interativa, é obtida através do princípio de extensão $\text{sup-}J$, que é uma extensão do princípio de extensão de Zadeh.

Definição 4 (Fullér e Majlender (2004)) *Sejam $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ uma distribuição de possibilidade conjunta de A_1 e A_2 e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A extensão $\text{sup-}J$*

da função f aplicada em (A_1, A_2) é definida por

$$f_J(A_1, A_2)(y) = \bigvee_{f(x_1, x_2)=y} J(x_1, x_2).$$

Através da Definição 4, é possível obter uma aritmética interativa entre números fuzzy. Por exemplo, podemos definir a soma interativa entre A_1 e A_2 do seguinte modo

$$(A_1 +_J A_2)(y) = \bigvee_{x_1+x_2=y} J(x_1, x_2), \quad (2.4)$$

em que $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e J é uma distribuição de possibilidade conjunta de A_1 e A_2 arbitrária.

No caso em que os números fuzzy A_1 e A_2 são não interativos, isto é, a conjunta entre eles é dada por J_\wedge , então a aritmética obtida por (2.4) se resume a aritmética usual entre números fuzzy e denota-se $A_1 + A_2$ ao invés de $A_1 +_{J_\wedge} A_2$.

Em particular, para as distribuições de possibilidade conjunta J_0 e J_\wedge a soma entre números fuzzy triangulares pode ser dada da seguinte forma (Barros et al., 2017; Wasques et al., 2020b)

$$A + B = (a + d; b + e; c + f) \quad (2.5)$$

e

$$A +_0 B = \begin{cases} ((a + f) \wedge (b + e); b + e; (b + e) \vee (c + d)), & \text{se } \text{diam}(A) \geq \text{diam}(B) \\ ((c + d) \wedge (b + e); b + e; (b + e) \vee (a + f)), & \text{se } \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B) \end{cases}, \quad (2.6)$$

em que $A = (a; b; c)$ e $B = (d; e; f)$.

A partir daqui a função f , dada na Definição 4, será considerada um operador aritmético. O teorema a seguir compara as operações aritméticas do ponto de vista de interatividade.

Teorema 1 (Wasques et al. (2019)) *Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Então para toda distribuição de possibilidade conjunta $J \neq J_\wedge$ e f um operador aritmético tem-se*

- a) $f_J(A, B) \subseteq f_{J_\wedge}(A, B)$;
- b) $\lambda f_J(A, B) \subseteq \lambda f_{J_\wedge}(A, B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

- c) Se $A \subseteq B$, então $f_J(A, C) \subseteq f_{J_\wedge}(B, C)$;
- d) Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, então $f_J(A, C) \subseteq f_{J_\wedge}(B, D)$;
- e) $f_J(A, (f_J(B, C))) \subseteq f_{J_\wedge}(A, (f_{J_\wedge}(B, C)))$.

As vantagens da aritmética interativa em relação a aritmética usual será retratada aqui através de seqüências de números fuzzy.

3. Seqüência de números fuzzy

Uma seqüência de números fuzzy é definida através de uma função $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $\Psi(n) = X_n$, também denotada por $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Em particular, serão estudadas seqüências determinadas de modo recorrente, isto é, quando X_n depende de X_1, \dots, X_{n-1} . Por exemplo, a seqüência de números fuzzy

$$X_n = X_{n-1} +_J X_{n-2}, \quad \forall n > 2, \quad (3.7)$$

é uma seqüência obtida de forma recorrente e estende a seqüência clássica de Fibonacci.

Note que para determinar os elementos de seqüências recorrentes é necessário partir de uma ou mais condições iniciais. No caso da seqüência (3.7) são necessárias duas condições iniciais X_1 e X_2 .

De um modo geral, para determinar o elemento X_n em uma seqüência desse tipo é necessário, além das condições iniciais, efetuar operações aritméticas entre os números fuzzy X_1, \dots, X_{n-1} . Para cada distribuição de possibilidade conjunta J obtém-se uma aritmética, e conseqüentemente, uma seqüência de números fuzzy distinta. Sendo assim, a fim de distinguir uma da outra, essas seqüências serão denotadas por $\{X_n\}^J$.

A seqüência $\{X_n\}^J$ é dita *interativa* se $J \neq J_\wedge$. Caso contrário, é chamada de *não interativa*. Uma seqüência $\{X_n\}$ está contida em $\{Y_n\}$ se, $X_n \subseteq Y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, denota-se $\{X_n\} \subseteq \{Y_n\}$. O próximo teorema mostra que toda seqüência recorrente de números fuzzy interativos está contida na seqüência de números fuzzy não interativos.

Teorema 2 *Sejam $\{X_n\}^J$ e $\{X_n\}^{J_\wedge}$ seqüências recorrentes de números fuzzy com condições iniciais $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e J uma distribuição de possibilidade conjunta entre os elementos da seqüência. Então $\{X_n\}^J \subseteq \{X_n\}^{J_\wedge}$.*

Prova: Essa demonstração será feita por indução. Tome $X_{m+1} = f_J(X_1 = A_1, \dots, X_m = A_m) \in \{X_n\}^J$ e $Y_{m+1} = f_{J_\wedge}(Y_1 = A_1, \dots, Y_m = A_m) \in \{X_n\}^{J_\wedge}$. Pelos itens a) e e) do Teorema 1 tem-se que

$$X_{m+1} = f_J(X_1 = A_1, \dots, X_m = A_m) \subseteq f_{J_\wedge}(Y_1 = A_1, \dots, Y_m = A_m) = Y_{m+1}.$$

Suponha agora que $X_k \subseteq Y_k$ para todo $m < k < p$. Resta provar que $X_p \subseteq Y_p$. De fato, pelos itens c) e d) do Teorema 1 tem-se

$$X_p = f_J(X_{p-m}, \dots, X_{p-1}) \subseteq f_{J_\wedge}(Y_{p-m}, \dots, Y_{p-1}) = Y_p,$$

uma vez que $X_{p-m} \subseteq Y_{p-m}, \dots, X_{p-1} \subseteq Y_{p-1}$ por hipótese de indução.

Portanto, $X_n \subseteq Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim segue o resultado.

Algumas observações sobre o teorema acima devem ser apontadas. Como constatou-se na seção anterior, existem pares de números fuzzy que podem não ser iterativos com respeito a alguma distribuição de possibilidade conjunta. Nesse caso, as operações aritméticas não podem ser computadas (Wasques et al., 2019). No entanto, estamos considerando sequências $\{X_n\}^J$ que estão bem definidas. Isso significa que $X_{m+1} = f_J(X_1, \dots, X_m)$ existe e é um número fuzzy para todo $m \in \mathbb{N}$.

O Teorema 2 revela que a sequência de números fuzzy baseada na aritmética iterativa produz números fuzzy com diâmetro menor do que com a aritmética usual entre números fuzzy. Desse modo, a sequência $\{X_n\}^J$, com $J \neq J_\wedge$, propaga menos incerteza do que a sequência $\{X_n\}^{J_\wedge}$.

Na próxima seção serão ilustradas tais observações por meio de uma aplicação na sequência de Fibonacci, a partir de condições iniciais dadas por números fuzzy.

4. Sequência de Fibonacci de números fuzzy

Considere a sequência de Fibonacci dada em (3.7). Aqui tal sequência será estudada de dois pontos de vista. O primeiro será em relação às aritméticas fuzzy e o segundo em relação a simetria dos elementos dessa sequência. Para essa ilustração, serão consideradas as distribuições J_0 e J_\wedge .

A sequência de Fibonacci clássica $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ é, em geral, determinada a partir das condições iniciais $x_1 = x_2 = 1$. Sendo assim, a sequência clássica é dada por

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}.$$

Suponha que as condições iniciais dessa sequência sejam incertas e modeladas por números fuzzy. Sendo assim, três situações são consideradas: a) X_1 e X_2 são números fuzzy simétricos; b) X_1 e X_2 são números fuzzy não simétricos; c) X_1 e X_2 são números fuzzy com diferentes simetrias.

a) Serão consideradas aqui as condições iniciais “em torno de” 1 (casal de coelhos). Para isso, considere $X_1 = X_2 = (0; 1; 2)$ as condições iniciais da sequência (3.7). A Tabela 1 mostra os 6 primeiros elementos das sequências $\{X_n\}^{J_0}$ e $\{X_n\}^{J^\wedge}$. As Figuras 6 e 7 ilustram tais sequências.

Tabela 1: Elementos das sequências $\{X_n\}^{J_0}$ e $\{X_n\}^{J^\wedge}$ para condições iniciais dadas por números fuzzy simétricos.

n	$\{X_n\}^{J_0}$	$\{X_n\}^{J^\wedge}$
1	(0;1;2)	(0;1;2)
2	(0;1;2)	(0;1;2)
3	(2;2;2)	(0;2;4)
4	(2;3;4)	(0;3;6)
5	(4;5;6)	(0;5;10)
6	(8;8;8)	(0;8;16)

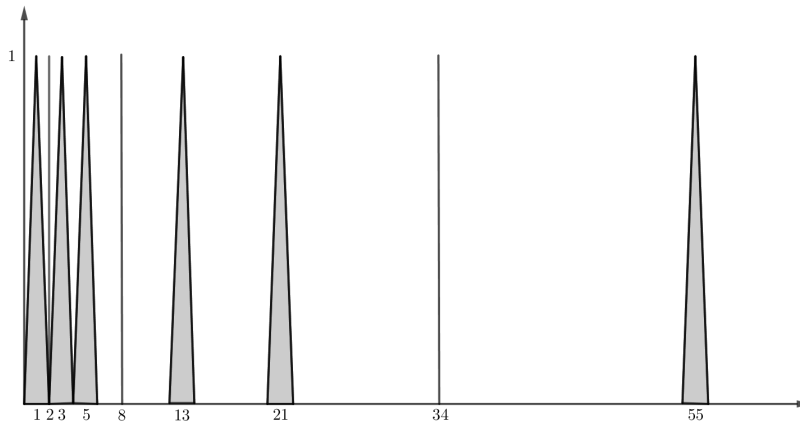


Figura 6: Sequência de Fibonacci de números fuzzy interativos simétricos, segundo J_0 . As condições iniciais são dadas por $X_1 = X_2 = (0; 1; 2)$.

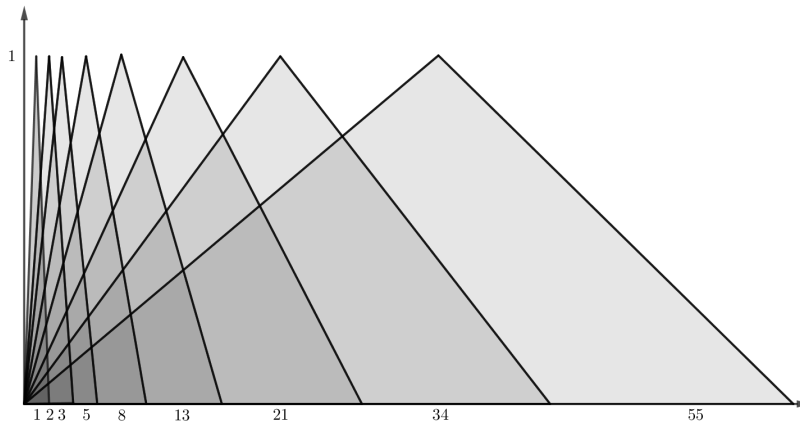


Figura 7: Sequência de Fibonacci de números fuzzy não iterativos simétricos, segundo J_{\wedge} . As condições iniciais são dadas por $X_1 = X_2 = (0; 1; 2)$.

A Tabela 1 corrobora o resultado do Teorema 2, isto é, os elementos $X_n \in \{X_n\}^{J_0}$ estão contidos em $X_n \in \{X_n\}^{J_{\wedge}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda mais, com a sequência obtida através de J_0 é possível controlar a incerteza que os números fuzzy modelam, ao contrário da sequência $\{X_n\}^{J_{\wedge}}$ que propaga a incerteza uma vez que $diam(X_{n+1}) \geq diam(X_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (veja Figura 7).

Note que a partir de condições iniciais dadas por números fuzzy simétricos, a sequência $\{X_n\}^{J_0}$ produz um número real, a cada dois números fuzzy (veja Figura 6). Esse comportamento ocorre devido ao tipo de interatividade escolhida, que produz números fuzzy com o menor diâmetro possível (Sussner et al., 2016; Wasques et al., 2020a). Perceba também que ambas as sequências preservam a simetria de seus elementos.

b) Serão consideradas aqui as condições iniciais “em torno de” 1 (casal de coelhos). No entanto, tal variável linguística será modelada de forma distinta do caso a). Para isso, sejam $X_1 = X_2 = (0; 1; 3)$ as condições iniciais da sequência (3.7). A Tabela 2 mostra os 6 primeiros elementos das sequências $\{X_n\}^{J_0}$ e $\{X_n\}^{J_{\wedge}}$.

Tabela 2: Elementos das seqüências $\{X_n\}^{J_0}$ e $\{X_n\}^{J_\wedge}$ para condições iniciais dadas por números fuzzy não simétricos

n	$\{X_n\}^{J_0}$	$\{X_n\}^{J_\wedge}$
1	(0;1;3)	(0;1;3)
2	(0;1;3)	(0;1;3)
3	(2;2;3)	(0;2;6)
4	(3;3;5)	(0;3;9)
5	(5;5;7)	(0;5;15)
6	(8;8;10)	(0;8;24)

Note que os elementos da seqüência $\{X_n\}^{J_0}$ não apresentam um comportamento similar ao *caso a*), isto é, a seqüência $\{X_n\}^{J_0}$, com condições iniciais dadas por números fuzzy não simétricos, não contém números reais (veja Tabela 2). No entanto, preservam a não simetria em todos os seus elementos, bem como ocorre na seqüência $\{X_n\}^{J_\wedge}$.

c) Por fim, serão consideradas aqui as condições iniciais “em torno de” 1 (casal de coelhos). No entanto, as variáveis linguísticas atreladas a cada condição inicial serão descritas por diferentes números fuzzy. Assim, sejam $X_1 = (0; 1; 2)$ e $X_2 = (0; 1; 3)$ as condições iniciais da seqüência (3.7). A Tabela 3 mostra os 6 primeiros elementos das seqüências $\{X_n\}^{J_0}$ e $\{X_n\}^{J_\wedge}$.

Tabela 3: Elementos das seqüências $\{X_n\}^{J_0}$ e $\{X_n\}^{J_\wedge}$, sendo uma condição inicial simétrica e a outra não simétrica

n	$\{X_n\}^{J_0}$	$\{X_n\}^{J_\wedge}$
1	(0;1;2)	(0;1;2)
2	(0;1;3)	(0;1;3)
3	(2;2;3)	(0;2;5)
4	(3;3;5)	(0;3;8)
5	(5;5;7)	(0;5;13)
6	(8;8;10)	(0;8;21)

No caso em que considera-se diferentes simetrias nas condições iniciais, a seqüência $\{X_n\}^{J_0}$ preserva a não simetria, assim como a seqüência $\{X_n\}^{J_\wedge}$ (veja Tabela 3). Isto é, as operações aritméticas via J_0 e J_\wedge fornecem como

saída um número fuzzy não simétrico, a partir de uma entrada fuzzy simétrica e outra não simétrica. É importante observar também que, em todos os casos e para ambas conjuntas J_0 e J_\wedge , tem-se $[X_n]^1 = x_n$ para todo n .

5. Comentários finais

Este trabalho apresentou o conceito de sequência de números fuzzy que são obtidos em forma de recorrência. Tais sequências foram classificadas em dois tipos: iterativas e não iterativas. Sequências não iterativas estão associadas com a distribuição de possibilidade conjunta J_\wedge , enquanto que as sequências iterativas estão atreladas a qualquer conjunta $J \neq J_\wedge$.

O Teorema 2 mostra que sequências de números fuzzy iterativos estão sempre contidos em sequências de números fuzzy não iterativos. Sequências não iterativas propagam incertezas e portanto sequências iterativas podem ser mais úteis, do ponto de vista de aplicações.

A fim de ilustrar os resultados e discussões trazidas aqui, foi estudada a sequência de Fibonacci com condições iniciais dadas por números fuzzy. Foram utilizadas duas distribuições de possibilidade conjunta, a saber J_0 e J_\wedge . As Tabelas 1, 2 e 3 mostram os elementos dessas sequências.

Observou-se que embora as condições iniciais sejam as mesmas, as sequências iterativas (J_0) e não iterativas (J_\wedge) possuem comportamentos distintos. Enquanto os elementos das sequências não iterativas têm diâmetro cada vez maior, o diâmetro das sequências iterativas pode ser controlado, evitando que a incerteza seja propagada (veja as Figuras 6 e 7).

Por fim, estudou-se também a simetria dos elementos dessas sequências. Quando as condições iniciais são dadas por números fuzzy simétricos (não simétricos), ambas as sequências preservam sua simetria (não simetria). Ainda mais, a sequência iterativa via J_0 apresenta um comportamento interessante, a cada dois números fuzzy simétricos tem-se um número real (veja Tabela 1 e Figura 6).

No caso em que a primeira condição inicial é simétrica e a outra é não simétrica, ambas as sequências produzem apenas números fuzzy não simétricos.

Referências

- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2017). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. 347. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1 edição.
- Carlsson, C., Fuller, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, páginas 535–539.
- Esmi, E., Pedro, F. S., Barros, L. C., e Lodwick, W. (2018a). Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function. *Information Sciences*, 435:150–160.
- Esmi, E., Sánchez, D. E., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2020). Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values. *Fuzzy Sets and Systems*.
- Esmi, E., Sussner, P., Ignácio, G., e Barros, L. C. (2018b). A parameterized sum of fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 331:85–104.
- Fullér, R. e Majlender, P. (2004). On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(3):355 – 369.
- Howard, F. T. (2004). *Applications of Fibonacci Numbers*. Springer-Dordrecht, Dordrecht, 9 edição.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 3 edição.
- Pedro, F. S., Esmi, E., e Barros, L. C. (2020). Calculus for linearly correlated fuzzy function using fréchet derivative and riemann integral. *Information Sciences*, 512:219–237.
- Pinto, N. J. B., Esmi, E., Wasques, V. F., e Barros, L. C. (2019). Least square method with quasi linearly interactive fuzzy data: Fitting an hiv dataset. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, páginas 177–189, Cham. Springer International Publishing.
- Pinto, N. J. B., Wasques, V. F., Esmi, E., e Barros, L. C. (2018). *Least Squares Method with Interactive Fuzzy Coefficient: Application on Longitudinal Data*, páginas 132–143. Springer International Publishing, Cham.

- Powell, N. W. (1979). Fibonacci and the gold mean: Rabbits, rumbas, and rondeaux. *Journal of Music Theory*, 23(2):227–273.
- Sussner, P., Esmi, E., e Barros, L. C. (2016). Controlling the width of the sum of interactive fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, páginas 85–104.
- Wasques, V. F. (2019). *Fuzzy Differential Equations via Interactive Arithmetic: Applications in Biomathematics*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo.
- Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., e Bede, B. (2019). Comparison between numerical solutions of fuzzy initial-value problems via interactive and standard arithmetics. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, páginas 704–715, Cham. Springer International Publishing.
- Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., Pedro, F. S., e Sussner, P. (2018). Higher order initial value problem with interactive fuzzy conditions. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZIEEE)*, páginas 1–8.
- Wasques, V. F., Esmi, E., Barros, L. C., e Sussner, P. (2020a). The generalized fuzzy derivative is interactive. *Information Sciences*, 519:93–109.
- Wasques, V. F., Pinto, N. J. B., Esmi, E., e Barros, L. C. (2020b). Consistence of interactive fuzzy initial conditions. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, Cham. Springer International Publishing.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353.

