Biomatemática ***30*** *(2020), 93–110* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Ajuste de curvas utilizando dados do coronavírus COVID-19 e sistemas dinâmicos discretos

Luciana M. E. Assis[1], Antoniel S. Mendonça[2], Raul A. Assis[3]
Fac. Ciências Exatas e Tecnológicas – UNEMAT, 78.550-000, Sinop/MT.

Resumo. Neste trabalho, realizamos ajustes de modelos discretos unidimensionais lineares e não-lineares utilizando dados da dinâmica de contágio e mortalidade do coronavírus COVID-19 na Itália e no Brasil. Foram feitos ajustes dos modelos discretos adotando o método dos quadrados mínimos e calculamos o coeficiente de determinação para avaliar a qualidade dos ajustes em cada um dos modelos.

Palavras-chave:*sistemas dinâmicos discretos; método dos quadrados mínimos; coronavírus; epidemia, modelos matemáticos;*

1 Introdução

Muitos modelos matemáticos foram publicados para descrever a epidemia que o mundo está enfrentando contra o novo coronavírus COVID-19. O vírus trata-se de uma doença respiratória contagiosa entre seres humanos considerada grave, podendo ser fatal para os infectados (Gorbalenya, 2020). Muitos países do mundo estão em situação de pandemia ocasionada pelo COVID-19, sendo que a doença foi primeiramente detectada em dezembro de 2019 na maior cidade da província de Hubei na China (Gorbalenya, 2020). Trata-se de Wuhan, sendo considerada a cidade mais populosa da China Central, contando com uma população superior a dez milhões de habitantes. A partir daí, a doença se espalhou em mais de 187 países provocando instabilidade econômica devido o despreparo do sistema de saúde mundial para lidar com um surto em tamanha proporção.

[1]luciana.assis@unemat.br
[2]antoniel.mendonca@unemat.br
[3]raul.assis@unemat.br

Por se tratar de uma doença com uma alta taxa de transmissão, é necessário o isolamento social dos indivíduos para minimizar o contágio, visto que muitos indivídios não possuem a imunidade necessária como fator de recuperação.

Neste trabalho, apresentamos alguns modelos matemáticos discretos unidimensionais lineares e não-lineares (Perko, 2001). Após realizarmos uma breve apresentação dos modelos, verificamos qual deles possui o melhor ajuste quando utilizamos o método dos quadrados mínimos em relação a dados realísticos de contágio e mortalidade do coronavírus COVID-19 (Ruggiero e Lopes, 1996). Escolhemos a Itália e o Brasil para realizar nossos estudos. Foram realizadas as coletas dos dados de contágio e mortalidade em ambos os países. O objetivo foi verificar qual dos modelos explorados possui um melhor ajuste aos dados realísticos, além de predizer, um possível cenário em relação ao avanço e/ou erradicação do COVID-19 na Itália e no Brasil.

O artigo está organizado como segue: na Seção 2 fizemos uma breve apresentação dos modelos discretos unidimensionais lineares e não-lineares considerados nesta pesquisa. Na Seção 3 apresentamos os dados coletados de transmissão e mortalidade da doença e na Seção 4, utilizamos o método dos quadrados mínimos para ajustar os modelos aos dados coletados e na Seção 5 apresentamos uma discussão dos resultados obtidos.

2 Sistemas dinâmicos discretos unidimensionais

Os sistemas dinâmicos discretos (Edelstein-Keshet, 2005) são conhecidos como ***equações de recursão*** ou ***modelos variacionais discretos***. Sua principal característica é o fato de possuírem variações discretas do tempo em que $t \in \mathbb{Z}_+$, ou seja, são modelos em que analisamos a evolução do sistema em instantes isolados, visto que o tempo é uma variável discreta. Dessa forma, cada termo do modelo é obtido a partir do termo anterior, indicando que a existência de uma relação entre os termos, sendo denominada ***relação de recorrência***, que, em muitos casos, também podem ser escritas como equações de diferenças.

Definição 1. *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um sistema dinâmico discreto (modelo discreto) é uma sequência de números reais denotados por x_n, para $n = 0, 1, 2, ...$, onde cada número após o primeiro é relacionado ao anterior pela equação $x_{n+1} = f(x_n)$.*

Por simplicidade, usaremos a nomenclatura "modelo discreto"para nos referirmos aos sistemas dinâmicos discretos. Em geral, um modelo discreto é modelado por uma equação matemática, sendo um objetivo importante compreender seu comportamento ao longo do tempo t para n iterações. Se tal equação possuir um caráter recursivo, para que seja feita uma de análise de seu comportamento, podemos utilizar uma abordagem mais direta por meio do gráfico dos resultados das iterações, ou seja, dos termos consecutivos do modelo discreto. A seguir, apresentamos um breve estudo teórico dos modelos discretos investigados.

2.1 Modelo de Malthus discreto

Comecemos com o modelo contínuo. O modelo de Malthus é um dos modelos mais conhecidos para modelar crescimento populacional (Bassanezi, 2002). Este modelo, pressupõe que a taxa de crescimento de uma população em um determinado instante é proporcional à população total naquele instante. Além disso, o crescimento da população está sujeito às taxas de natalidade e mortalidade, sendo descrito matematicamente por

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t), \tag{2.1}$$

onde $x(t)$ representa a população e r a taxa de crescimento ou declínio, se $r > 0$ ou $r < 0$, respectivamente (Boyce e DiPrima, 1978). A solução de (2.1) é dada pela equação

$$x(t) = ce^{rt}, \tag{2.2}$$

em que c é uma constante positiva. Considerando a condição inicial $x(0) = x_0 > 0$ em (2.2), obtemos uma solução particular

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \tag{2.3}$$

Para a versão discreta do modelo de Malthus, supõe-se que o crescimento, ou decrescimento, populacional ocorra continuamente no tempo, entretanto as medições são feitas em intervalos regulares de tempo Δt. Assim, a equação do modelo discreto é obtida discretizando-se o tempo a partir da solução (2.3), por ser uma equação que descreve o tamanho da população no tempo. Para determinarmos o modelo discreto de Malthus, usaremos Δx e Δt para indicar

a variação do valor de x e t, visto que, a equação discreta obtida a partir das variações de x e t é equivalente ao modelo contínuo de Malthus. Desse modo,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx rx(t),$$

ou seja,

$$x(t+\Delta t) = x(t) + rx(t)\Delta t \tag{2.4}$$

Tomando $\Delta t = 1$, $\alpha = 1+r$ e $x(t) = x_t$ em (2.4), obtemos a relação de recursão que descreve o modelo de Malthus discreto

$$x_{t+1} = \alpha x_t,$$

cuja solução geral, ou fórmula fechada,

$$x_t = \alpha^t x_0, \tag{2.5}$$

pode ser encontrada realizando-se sucessivas iterações.

Proposição 1. *A equação de diferenças (2.5) possui a forma exponencial $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ que é equivalente ao modelo de Malthus contínuo.*

Demonstração. De fato, como $x(t+1) = \alpha x(t)$, então

$$x(t) = \alpha^t x_0 = x_0 e^{\lambda t}; \quad \lambda = \ln \alpha.$$

□

2.2 Modelo de Verhulst discreto

O modelo de Vershust (Murray, 1989), proposto pelo sociólogo P. F. Vershulst, trata-se de um modelo, que ao contrário do modelo de Malthus, prevê limitações quanto ao crescimento de uma determinada população, isto é, quando o tempo cresce, a população tende a um valor limite, condicionado a abundância de recursos para manutenção e sobrevivência da população. Para deduzirmos o modelo de Verhulst, podemos, incialmente, considerar uma taxa de variação à população semelhante ao do modelo de Malthus e adicionar um termo de mortalidade que representa um processo de saturação do meio, isto é, a possibilidade de escassez de recursos naturais, indicando que a medida

que a população aumenta, as dificuldades para que os indivíduos da população encontrem recursos para sobreviver também tendem a aumentar. Considerando tais hipóteses biológicas, o modelo de Verhulst é dado pela equação

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \frac{\alpha x^2(t)}{K} = \alpha x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \tag{2.6}$$

onde o termo matemático $\frac{\alpha x^2(t)}{K}$ representa a mortalidade dos indivíduos da população devido a saturação do meio, $x(t)$ a população, α é a taxa de crescimento populacional e K representa a capacidade de suporte ou nível de saturação, ou seja, trata-se do número máximo de indivíduos mantidos pelos recursos naturais disponíveis.

O modelo (2.6) ilustra o caso contínuo para o modelo de Verhulst, cuja solução é da forma:

$$x_t = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-\alpha t}}. \tag{2.7}$$

O modelo de Verhulst discreto pode ser obtido de maneira semelhante ao que foi feito para obter o modelo de Malthus discreto (Anjos e Carmo, 2012). Considere Δx e Δt comos sendo, respectivamente, as variações em x e em t. Assim,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx r\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t),$$

e após algumas manipulações algébricas obtemos

$$x(t + \Delta t) = x(t) + rx(t)\Delta t - \frac{rx^2(t)\Delta t}{K}. \tag{2.8}$$

Tomando $\Delta t = 1$ e $x(t) = \beta u(t)$, em que β é uma constante arbritrária e tem por finalidade simplificar a equação (2.8), obtemos:

$$\beta u(t + 1) = (r + 1)\beta u(t) - \frac{r\beta^2 u^2(t)}{K}. \tag{2.9}$$

Considerando $(r + 1)\beta = r\beta^2/K$ em (2.9), obtemos $\beta = K(r + 1)/r$. Dessa forma, a equação (2.9) pode ser simplificada, fornecendo o modelo discreto de Verhulst, ou seja,

$$u_{t+1} = \alpha(u_t - u_t^2), \tag{2.10}$$

sendo $x(t) = \beta u_t$ e $(r + 1) = \alpha$.

2.3 Modelo de Beverton-Holt

O modelo de Beverton-Holt (Beverton e Holt, 1957) é geralmente aplicado em populações que se reproduzem continuamente e é conhecido como a equação da *"curva de estoque e recrutamento de Beverton-Holt"*, sendo uma das raras equações de diferenças não-linear em que é possível obter uma solução exata explicitamente. Além disso, a dinâmica do crescimento populacional no modelo de Beverton-Holt difere da dinâmica do modelo discreto de Verhulst pois, no modelo de Beverton-Holt a taxa de reprodução ocorre em tempo discreto, e no modelo discreto de Verhulst, a reprodução ocorre continuamente no tempo quando o crescimento depende da densidade, porém, com medições feitas em intervalos regulares Δt. Dessa forma, tomando a equação (2.7), podemos obter a equação discretizada que mostra o tamanho da população no tempo para o modelo contínuo de Verhulst. Assim, a partir de $x(t)$ e após um intervalo Δt, o tamanho da população é dado por:

$$x(t_0 + \Delta t) = \frac{Kx(t_0)}{x(t) + [K - x(t_0)]e^{-\alpha \Delta t}}.$$

da qual deriva a equação

$$x_{n+1} = \frac{Kx_n}{x_n + (K - x_n)e^{-\alpha \Delta t}},$$

em que α e Δt são constantes. Logo podemos fazer a mudança de variáveis $e^{-\alpha \Delta t} = r$, da qual obtemos a equação de Beverton-Holt:

$$x_{n+1} = \frac{rx_n}{1 + (r-1)x_n/K}, \tag{2.11}$$

cuja solução explícita é dada por

$$x_n = \frac{Kx_0}{(K - x_0)(1/r)^n + x_0},$$

com $x_n \to K$ se $1/r < 1$ e $x_n \to 0$ se $1/r > 1$.

3 Dados coletados: Itália e Brasil

Nesta Seção, apresentamos nas Tabelas 1 e 2, os dados realísticos do número *Total de Casos* (TC) e do número *Total de Óbitos* (TO) do COVID-19 a Itália e no Brasil (Wikipedia, 2020).

Tabela 1: Dados do número *Total de Casos* (TC) e do número *Total de Óbitos* (TO) do COVID-19 no período de 21 e 22/02 a 31/05/2020 na Itália, respectivamente.

	Fevereiro		**Março**		**Abril**		**Maio**	
Dia	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**
01	-	-	1694	34	110574	13155	207428	28236
02	-	-	2036	52	115242	13915	209328	28710
03	-	-	2502	79	119827	14681	210717	28884
04	-	-	3089	107	124623	15362	211938	29079
05	-	-	3858	148	128948	15887	213013	29315
06	-	-	4636	197	132547	16523	214457	29684
07	-	-	5883	233	135586	17127	215858	29958
08	-	-	7375	366	139422	17669	217185	30201
09	-	-	9172	463	143626	18279	218268	30395
10	-	-	10149	631	147577	18849	219070	30560
11	-	-	12462	827	152271	19468	219814	30739
12	-	-	15113	1016	156363	19889	221216	30911
13	-	-	17660	1266	159516	20465	222104	31106
14	-	-	21157	1441	162488	21067	223096	31368
15	-	-	24747	1809	165155	21645	223885	31610
16	-	-	27980	2158	168941	22170	224760	31763
17	-	-	31506	2503	172434	22745	225435	31908
18	-	-	35713	2978	175925	23227	225886	32007
10	-	-	41035	3405	178972	23660	226699	32169
20	-	-	47021	4032	181228	24114	227364	32330
21	3	-	53578	4825	183957	24648	228006	32486
22	79	2	59138	5475	187327	25085	228658	32616
23	150	3	63927	6077	189973	25549	229327	32735
24	229	6	69176	6820	192994	25969	229858	32785
25	322	10	74386	7503	195351	26384	230158	32877
26	445	12	80539	8215	197675	26644	230555	32955
27	650	17	86498	9134	199414	26977	231139	33072
28	888	21	92472	10023	201505	27359	231732	33142
29	1128	29	97686	10779	203591	27682	232248	33229
30	-	-	101739	11591	205463	27967	232664	33340
31	-	-	105792	12428	-	-	232997	33415

Tabela 2: Dados do número *Total de Casos* (TC) e do número *Total de Óbitos* (TO) do COVID-19 no período de 03 e 17/03 a 31/05/2020 no Brasil, respectivamente.

	Março		**Abril**		**Maio**	
Dia	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**
01	-	-	6836	240	91589	6329
02	-	-	7910	299	96559	6750
03	2	-	9056	359	101147	7025
04	4	-	10278	431	107780	7321
05	8	-	11130	486	114715	7921
06	14	-	12056	553	125218	8536
07	19	-	13717	667	135106	9146
08	25	-	15927	800	145328	9897
09	30	-	17857	941	155939	10627
10	34	-	19638	1056	162699	11123
11	52	-	20727	1124	168331	11519
12	76	-	22169	1223	178214	12461
13	98	-	23430	1328	188974	13149
14	121	-	25262	1532	202918	13993
15	200	-	28320	1736	218223	14817
16	234	-	30425	1924	233142	15633
17	291	1	33682	2141	241080	16118
18	428	4	36599	2347	254220	16792
19	621	7	38654	2462	271628	17971
20	964	11	40581	2575	291579	18859
21	1178	18	43079	2741	310087	20047
22	1546	25	45757	2906	332382	21116
23	1891	34	49492	3313	347398	22013
24	2201	46	52995	3670	363211	22666
25	2433	57	58509	4016	374898	23473
26	2915	77	61888	4205	391222	24512
27	3417	92	66501	4543	411821	25598
28	3904	114	71886	5017	438238	26754
29	4256	136	78162	5466	465166	27878
30	4579	159	85380	5901	498440	28834
31	5717	201	-	-	514849	29314

4 Ajuste dos modelos aos dados coletados

Para realizar os ajustes dos modelos discretos aos dados apresentados nas Tabelas 1 e 2, a metodologia adotada foi a regressão por meio do método dos quadrados mínimos do *software* Excel com a utilização da ferramenta Solver, que por sua vez, emprega uma rotina que pode ser utilizada em conjunto com o método de quadrados mínimos, produzindo o ajuste entre dados realísticos e a função, neste caso, os modelos discretos de Malthus, Verhulst e Beverton-Holt (Ruggiero e Lopes, 1996; Brown, 2001).

Os modelos discretos estudados, são também conhecidos como mapas unidimensionais, linear para o caso do modelo de Malthus e não-linear para os modelos de Vershulst e Beverton-Holt. Como visto na Seção 2, as equações que descrevem os modelos discretos estudados são relações de recursões em que cada elemento determinado está relacionado ao anterior. Com isso, podemos gerar uma sequência de iterações em diferentes instantes de tempo t, sendo que o conjunto dessas iterações é chamado de órbita.

Definição 2. *Denomina-se* ***mapa*** *o conjunto de pontos* $(t, x_t), t \in \mathbb{N}$*, dado por* $x_{t+1} = f(x_t)$ *em que* x_t *é o t-ésimo termo da órbita* $O(x_0)$ *do modelo discreto.*

Definição 3. *A sequência* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *gerada pelas iterações sucessivas de um mapa é chamada de* ***órbita*** *ou trajetória do sistema a partir de* x_0 *e é denotada por* $O(x_0)$*.*

Realizamos inferências sobre os comportamentos dos modelos discretos (mapas) a partir de sua órbita utilizando a análise gráfica de pontos da forma (t, x_t).

No que tange os ajustes dos modelos, utilizamos, como dito no início dessa Seção, o método dos quadrados mínimos para ajustar os mapas dos modelos aos dados realísticos apresentados nas Tabelas da Seção 3. Uma das vantagens de se utilizar o método dos quadrados mínimos é que muitos programas já contém rotinas internas para calcular os ajustes. Para tanto, considerando o conjunto de dados do número *Total de Casos* (TC) e número *Total de Óbitos* (TO) em cada dia do período de estudo definido na Itália e no Brasil, foram feitos separadamente, os ajustes para TC e TO usando as funções que representam cada um dos modelos discretos apresentados. Representando por $f(x)$ o modelo que será ajustado aos dados, queremos que $f(x_i) \approx y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, onde y_i representa os dados realísticos, ou seja, TC e/ou TO em

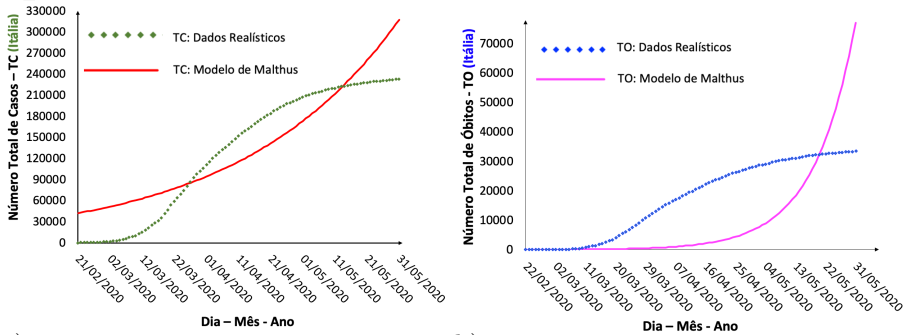
um determinado dia. Dessa forma, desejamos que a distância entre $f(x_i)$ e y_i seja a menor possível. Para isso, basta tomar a quantidade $d_i = (f(x_i) - y_i)^2$, ou seja, para minimizarmos o erro E de nosso conjunto de parâmetros $f(x)$ basta calcularmos a soma dos quadrados de $(f(x_i) - y_i)$ dado por:

$$E = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Na sequência, apresentamos as órbitas dos mapas dos modelos de Malthus, Verhulst e Beverton-Holt, e verificamos, qual modelo teve um melhor ajuste aos dados coletados, tornando-se assim, mais realístico para fazer previsões sobre o comportamento de contágio e mortalidade do COVID-19 na Itália e no Brasil.

O modelo de Malthus

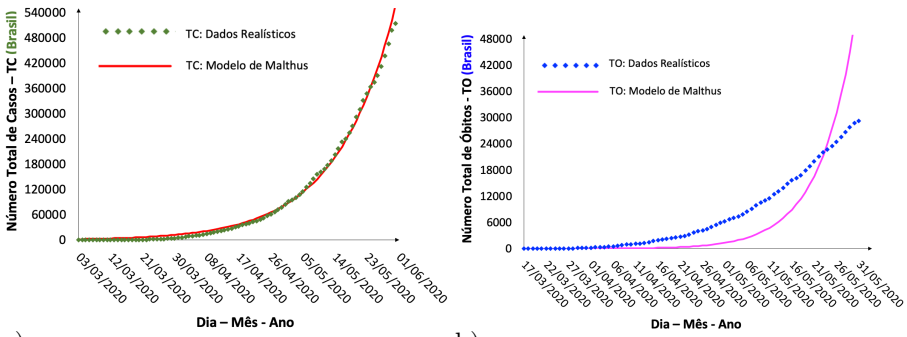
A Figura 1(a) apresenta o mapa do modelo discreto de Malthus ajustado aos dados da Tabela 1 utilizando o método dos quadrados mínimos. Foram realizadas 101 iterações para o o número *Total de Casos* (TC) e 100 iterações para o número *Total de Óbitos* (TO) do COVID-19 na Itália no período de 21 e 22 de fevereiro a 31 de maio de 2020, respectivamente. Como condições iniciais, consideramos as órbitas $O(41949.04)$ (Fig. 1 (a)) para TC e $O(30)$ (Fig. 1 (b)) para TO, em que cada ponto da figura representa um termo do mapa. Observe que, em (a) o gráfico inicia-se no ponto $(t, x_t) = (0, 41949.04)$ e em (b) no ponto $(t, x_t) = (0, 30)$, em que, $t = 0$ trata-se da primeira ocorrência de contágio e óbito e x_t corresponde a condição inicial atribuída para TC e TO.



a) b)

Figura 1: a) Órbita do mapa $x_{t+1} = \alpha x_t$ (modelo discreto de Malthus) para $x_0 = 41949.04$ ajustado aos dados do número *Total de Casos* TC do COVID-19 da Tabela 1 na Itália e $\alpha = 1.02$. b) Órbita do mapa $x_{t+1} = \alpha x_t$ (modelo discreto de Malthus) para $x_0 = 30$ ajustado aos dados do número *Total de Casos* TC do COVID-19 da Tabela 1 na Itália e $\alpha = 1.08$.

Analogamente, a Figura 2 (b) ilustra o mapa do modelo discreto de Malthus ajustado aos dados da Tabela 2. Foram realizadas 90 iterações para o o número *Total de Casos* (TC) e 76 iterações para o o número *Total de Óbitos* (TO) no período de 03 e 17 de março a 31 de maio de 2020, respectivamente. Como condições iniciais, utilizamos as órbitas $O(2461.22)$ (Fig. 2 (a)) para TC e $O(5)$ (Fig. 2 (b)).



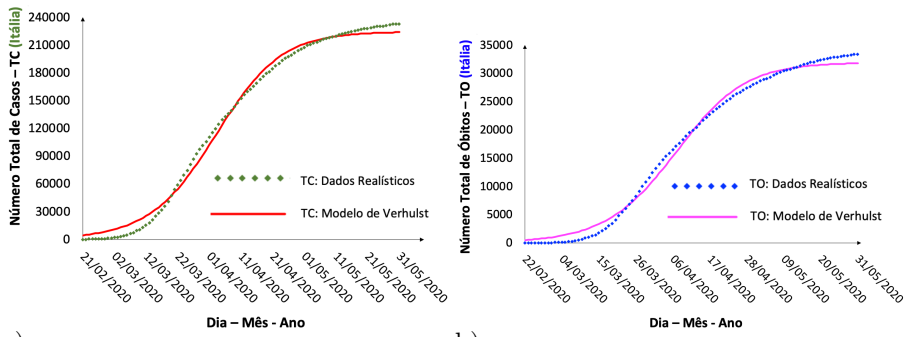
a) b)

Figura 2: a) Órbita do mapa $x_{t+1} = \alpha x_t$ (modelo discreto de Malthus) para $x_0 = 2461.22$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 2 no Brasil e $\alpha = 1.06$. b) Órbita do mapa $x_{t+1} = \alpha x_t$ (modelo discreto de Malthus) para $x_0 = 5$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 2 no Brasil e $\alpha = 1.13$.

Podemos observar na Figura 1 que o modelo de Malthus não possui um ajuste significativo, o que já era esperado, por se tratar de um modelo em que a taxa de variação do número Total de Casos TC é proporcional ao número Total de Casos TC naquele instante, sendo análogo para os dados que descrevem número Total de Óbitos TO. Isso torna-se evidente, visto que, o contágio e mortalidade da doença já estão diminuindo na Itália. Entretanto, para o Brasil, o modelo de Malthus se ajusta melhor, pois o contágio e mortalidade da doença ainda não atingiram seu pico (ver Figura 2).

O modelo de Verhuslt

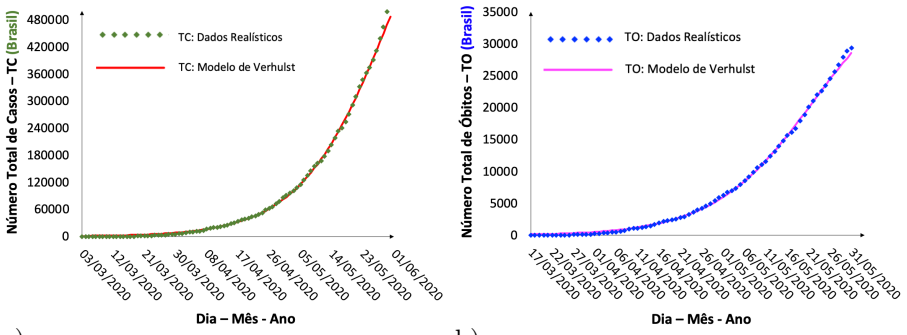
O mapa do modelo discreto de Verhulst ajustado aos dados da Tabela 1 está ilustrado na Figura 3. Como condições iniciais, temos as órbitas $O(4412.83)$ (Fig. 3 (a)) para TC e $O(477.79)$ (Fig. 3 (b)) para TO.



a) b)

Figura 3: a) Órbita do mapa $x_{t+1} = x_t + r(1 - x_t/K)x_t$ (modelo discreto de Verhulst) para $x_0 = 4412.83$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 1 na Itália, $r = 0.096$ e $K = 224417.56$. b) Órbita do mapa $x_{t+1} = x_t + r(1 - x_t/K)x_t$ (modelo discreto de Verhulst) para $x_0 = 477.79$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 1 na Itália, $r = 0.096$ e $K = 31915.32$.

Para o Brasil, o mapa do modelo discreto de Verhulst ajustado aos dados da Tabela 2 está ilustrado na Figura 4. Como condições iniciais, temos as órbitas $O(1051.10)$ (Fig. 4 (a)) para TC e $O(158.77)$ (Fig. 4 (b)) para TO.

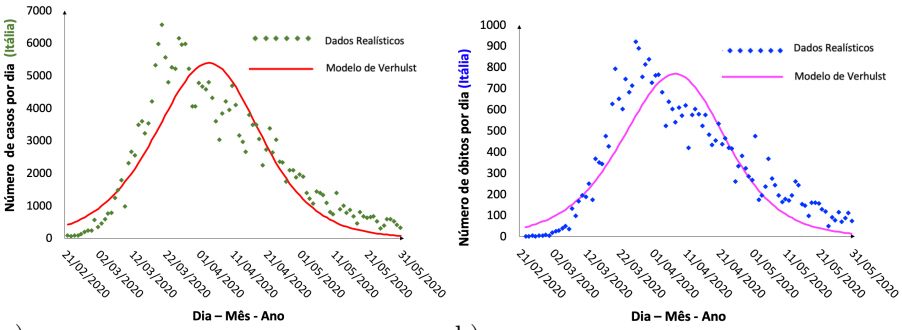


a) b)

Figura 4: a) Órbita do mapa $x_{t+1} = x_t + r(1 - x_t/K)x_t$ (modelo discreto de Verhulst) para $x_0 = 1051.10$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 2 no Brasil, $r = 0.079$ e $K = 949054.29$. b) Órbita do mapa $x_{t+1} = x_t + r(1 - x_t/K)x_t$ (modelo discreto de Verhulst) para $x_0 = 477.79$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 2 no Brasil, $r = 0.087$ e $K = 40955.72$.

Em ambos os casos, TC e TO, que ocorreram na Itália, o modelo de Verhulst apresenta estabilidade no final do período investigado, indicando um decrescimento dos números de novas ocorrências de novos casos da doença e de óbitos. Na a Figura 5 (a) e (b) ilustramos a variação $\Delta x_{t-1} = x_t - x_{t-1}$ para TC e TO na Itália, sendo possível identificar que o pico de novos casos variou no período entre 19-29/03/2020 para os dados realísticos e de 30/03 a 09/04/2020 para o modelo de Verhuslt (Fig. 5 (a)). Quanto aos casos de óbitos, para os dados realísticos o período foi de 21/03 a 12/04/2020 e do modelo de Verhuslt de 28/03 a 20/04/2020. O modelo aproximou-se dos dados reais de forma satisfatória (Fig. 5 (b)).

Para os dados do Brasil, não teremos o mesmo cenário, visto que, ainda existe um crescimento diário de transmissão da doença e mortalidade. Dessa forma, para comparar os dados reais aos ajustados é necessário aguardar a estabilidade de transmissão e mortalidade.

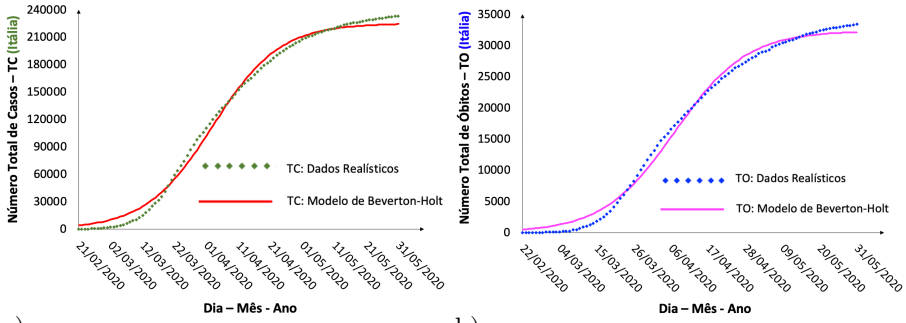


a) b)

Figura 5: a) Órbita $O(415.52)$ do mapa (modelo discreto de Verhulst) da equação $\Delta x_{t-1} = x_t - x_{t-1}$ que descreve o pico de transmissão do COVID-19 por dia para os dados da Tabela 1 na Itália. b) Situação análoga ao ítem (a), porém, descrevendo o pico de mortalidade no período investigado. Considere $O(45.35)$.

O modelo de Beverton-Holt

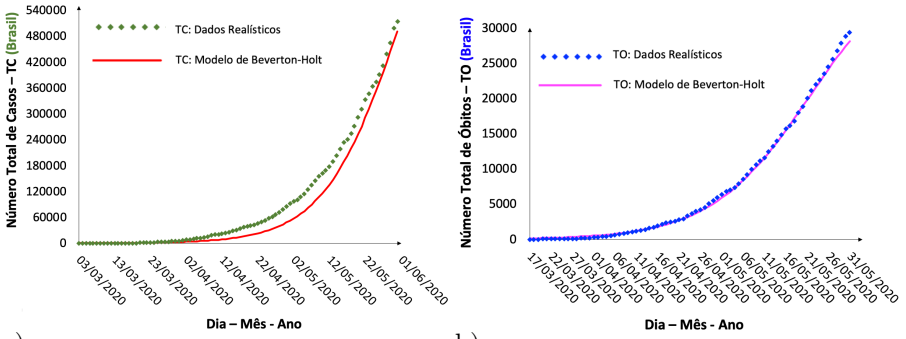
O mapa do modelo discreto de Beverton-Holt ajustado aos dados da Tabela 1 está ilustrado na Figura 6. Como condições iniciais, temos as órbitas $O(4002.99)$ (Fig. 6 (a)) para TC e $O(456.42)$ (Fig. 6 (b)) para TO.



a) b)

Figura 6: a) Órbita do mapa $x_{t+1} = \frac{rx_t}{1+(r-1)x_t/K}$ (modelo discreto de Beverton-Holt) para $x_0 = 4002.99$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 1 na Itália, $r = 1.1$ e $K = 225099.17$. b) Órbita do mapa $x_{t+1} = \frac{rx_t}{1+(r-1)x_t/K}$ (modelo discreto de Beverton-Holt) para $x_0 = 456.42$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 1 na Itália, $r = 1.098$ e $K = 32343.26$.

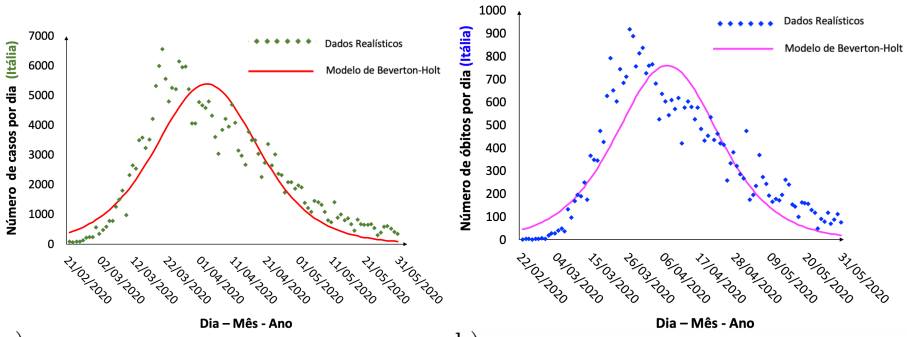
Em relação ao Brasil, o mapa do modelo discreto de Beverton-Holt ajustado aos dados da Tabela 2 está ilustrado na Figura 7. Como condições iniciais, temos as órbitas $O(200)$ (Fig. 7 (a)) para TC e $O(140)$ (Fig. 7 (b)) para TO.



a) b)

Figura 7: a) Órbita do mapa $x_{t+1} = \frac{rx_t}{1+(r-1)x_t/K}$ (modelo discreto de Beverton-Holt) para $x_0 = 200$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 2 no Brasil, $r = 1.1$ e $K = 1000000$. b) Órbita do mapa $x_{t+1} = \frac{rx_t}{1+(r-1)x_t/K}$ (modelo discreto de Beverton-Holt) para $x_0 = 477.79$ ajustado aos dados do número total de casos TC do COVID-19 da Tabela 2 no Brasil, $r = 1.09$ e $K = 40955.72$.

De maneira análoga, para o modelo de Beverton-Holt, ilustramos na Figura 8 (a) e (b) a variação $\Delta x_{t-1} = x_t - x_{t-1}$ para TC e TO na Itália. Foi possível identificar que o pico de novos casos variou no período entre 19-29/03/2020 para os dados realísticos e de 30/03 a 09/04/2020 para o modelo de Verhuslt (Fig. 8 (a)) . Quanto aos casos de óbitos, para os dados realísticos o período foi de 19/03 a 29/03/2020 e do modelo de Verhuslt de 28/03 a 09/04/2020. O modelo aproximou-se dos dados reais de forma satisfatória (Fig. 8 (b)).



a) b)

Figura 8: a) Órbita $O(394.19)$ do mapa (modelo de Beverton-Holt) da equação $\Delta x_{t-1} = x_t - x_{t-1}$ que descreve o pico de transmissão do COVID-19 por dia para os dados da Tabela 1 na Itália. b) Situação análoga ao ítem (a), porém, descrevendo o pico de mortalidade no período investigado. Considere $O(44.33)$.

5 Discussões

Neste trabalho, depois de ajustarmos os modelos dinâmicos discretos unidimensionais lineares e não-lineares a dados realísticos da pandemia que o mundo está enfrentando, realizamos comparações a fim de verificar qual modelo possui uma descrição mais aproximada dos conjuntos de dados realísticos TC e TO do COVID-19. Para tanto, usamos o Coeficiente de Determinação, ou seja, a medida de ajuste R-quadrado denotado por R^2, dado por (Bussab e Morettin, 1986):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)^2}, \tag{5.12}$$

em que n é o número de dados coletados, $f(x_i)$ corresponde aos valores dos modelos ajustados em cada instante i, y_i corresponde aos dados realísticos no instante i de TC e TO coletados e finalmente, $\bar{y}$ corresponde à média dos dados coletados y_i no instante i.

Observe que, o denominador da equação (5.12) dado por $D = \sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)^2$ representa o erro cometido pelo modelo que é constante e igual a média dos valores, enquanto que, o numerador da equação (5.12) $N = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2$ representa uma medida do erro total cometido pelo modelo proposto pela função f.

Dessa forma, como D é proporcional à variância dos dados coletados, podemos dizer que R^2 representa o percentual da variância que é explicado pelo modelo, ou seja, trata-se de uma medida do erro do modelo com relação a varância dos dados coletados. Isso significa que, quanto mais próximo de 1 o valor de R^2 estiver, menor é o erro cometido pelo modelo em relação a variância dos dados. A Tabela 3 ilustra os Coeficientes de Determinação (R^2) dos números *Total de Casos* (TC) e *Total de Óbitos* (TO) para os modelos discretos de Malthus, Verhulst e Beverton-Holt.

Tabela 3: Coeficiente de Determinação do número *Total de Casos* (TC) e do número *Total de Óbitos* (TO) do COVID-19 apresentados nas Tabelas 1 e 2.

	Malthus		**Verhulst**		**Beverton-Holt**	
País	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**	**TC**	**TO**
Itália	0.8142	0.4235	0.9952	0.9945	0.9957	0.9951
Brasil	0.9967	0.8109	0.9942	0.9992	0.9871	0.9991

De acordo com o resultado, o modelo de Beverton-Holt foi o que melhor se ajustou aos dados TC e TO na Itália e no Brasil, o modelo discreto de Malthus teve um melhor ajuste para os dados TC e o modelo de Verhuslt para os dados TO.

Agradecimentos

Raul Abreu de Assis e Luciana Mafalda Elias de Assis agradecem o apoio da Universidade Estadual de Mato Grosso para a realização da pesquisa.

Referências

Anjos, T. A. N. e Carmo, P. T. M. (2012). Comparação dos modelos contínuo e discreto de Malthus e Verhulst. *Sigmae*, 1:97–109.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, S. Paulo.

Beverton, R. J. H. e Holt, S. J. (1957). On the dynamics of exploited fish populations. In *Fishery Investigations*, volume 19 of *II*. Springer, N.York.

Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. (1978). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, R. Janeiro, 6ª edição.

Brown, A. M. A. (2001). Step-by-step guide to non-linear regression analysis of experimental data using a Microsoft Excel spreadsjeet. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 65(7):191–200.

Bussab, W. O. e Morettin, P. A. (1986). *Estatístitca Básica*. Atual Editora, S. Paulo.

Edelstein-Keshet, L. (2005). Mathematical models in Biology. In *Classics in applied Mathematics*. SIAM, N. York.

Gorbalenya, A. E. (2020). Severe acute respiratory syndrome-related coronavirus: the species and its viruses, a statement of the coronavirus study group. bioRxiv 2020.02.07.937862, doi:10.1101/2020.02.07.937862. Disponível em: https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2020.02.07.937862v1. Acesso em: 20/05/2020.

Murray, J. D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer, N. York.

Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*. Springer, N. York.

Ruggiero, M. A. e Lopes, V. L. R. (1996). *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron Books, S. Paulo.

Wikipedia (2020). Covid-19 pandemic data. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/COVID19pandemic. Acesso em: 01/07/2020.