

População de Formiga-MG ajustada pelo modelo exponencial assintótico e sua comparação com os modelos clássicos de Gompertz e logístico

José S. Domingues¹, Bruna M. Silva², Daiana L. Sá³

Área Acadêmica de Matemática, IFMG, 35.577-010, Formiga/MG.

Resumo. O objetivo do trabalho é desenvolver um modelo matemático que se ajuste bem à dinâmica populacional da cidade de Formiga, no estado de Minas Gerais. Para isso, inicialmente encontra-se os modelos de ajuste linear, exponencial e geométrico e todos são descartados facilmente por apresentarem resultados incoerentes. Em seguida, são determinados os modelos clássicos de Gompertz e logístico e também o modelo exponencial assintótico. Para esses três casos foi utilizado o método de *Ford-Walford* para obter a população limite da cidade ($P_\infty = 80.414$) e, então, com uso dos dados populacionais, os parâmetros de cada um dos modelos foram obtidos. As diferenças percentuais médias entre as previsões dos modelos e os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e da Fundação João Pinheiro (FJP) foram determinadas. As diferenças obtidas para anos após 2010, para os modelos de Gompertz, logístico e exponencial assintótico foram de 1,02%, 0,69% e 0,46%, respectivamente. Conclui-se que o modelo exponencial assintótico é o mais adequado para descrever esse crescimento populacional e pode ser aplicado a situações em que se queira determinar o número de habitantes da cidade no intervalo [1950, 2040].

Palavras-chave: *Dinâmica populacional; modelo exponencial assintótico; modelo de Gompertz, modelo logístico; método de Ford-Walford.*

¹sergio.domingues@ifmg.edu.br

²bruninhagta@hotmail.com

³daianaluiza74@gmail.com

1. Introdução

Formiga é uma cidade localizada na região centro-oeste do estado de Minas Gerais, no Brasil, considerada capital do trabalho feminino e que tem a maior concentração de pequenas confecções do país, que produzem para várias grifes. O forte da produção são roupas jeans, que corresponde por 80% do total de corte e costura da cidade (Chaim, 2000). Segundo o censo demográfico de 2010 a cidade tinha cerca de 65.128 habitantes (IBGE, 2010).

Os censos são realizados pelo IBGE, que utiliza o Método das Componentes Demográficas, considerando as três componentes da dinâmica populacional: *mortalidade*, *fecundidade* e *migração*. Sendo assim, as projeções feitas com essa metodologia proporcionam a formulação de várias hipóteses referentes a diversos cenários (Freire, 2001; IBGE, 2010).

O objetivo desse trabalho é desenvolver um modelo matemático que se ajuste bem à dinâmica populacional da cidade de Formiga e que possa ser útil para efetuar previsões populacionais no maior intervalo de tempo possível. Para verificar o melhor modelo foram analisados os modelos linear, exponencial, geométrico, Gompertz, logístico e exponencial assintótico. Os três primeiros são facilmente descartados por não se adequarem bem à população estudada. Então, o foco foi destinado aos três últimos, considerando a população limite como a obtida pelo método de *Ford-Walford*, que pode ser melhor estudado em Bassanezi (2011) e Nunes e Mello (2017).

De posse da população limite os parâmetros de cada modelo foram determinados com uso dos dados populacionais e, então, um estudo detalhado das diferenças percentuais das previsões dos modelos foi feito, tanto para os dados dos IBGE, quanto para os dados da FJP, sendo que essa última instituição permitiu ter acesso às projeções populacionais de 2011 a 2060.

Essa pesquisa é uma continuação dos estudos já realizados em da Silva et al. (2019) e Domingues et al. (2020), sendo que neles não são feitas as comparações com os modelos de Gompertz e logístico. Por isso, esse trabalho apresenta um diferencial significativo em relação a esses trabalhos, não apenas pelo maior detalhamento das análises mas também pela comparação concluir que o modelo exponencial assintótico, para essa cidade, também é mais adequado do que os clássicos modelos de Gompertz e logístico.

2 Os modelos de ajuste analisados

O desenvolvimento de modelos matemáticos para descrever o crescimento de diversos tipos de populações é uma prática comum a muito tempo. Um dos modelos mais conhecidos é o de Malthus, apresentado em 1798 pelo economista inglês Thomas Malthus. Esse modelo considera que a taxa de crescimento de uma determinada população em qualquer instante é proporcional à população total naquele instante. Isso leva a um modelo de crescimento exponencial, o que não corresponde à realidade das populações a longo prazo, devido às diversas restrições que podem ocorrer, como limitações de espaço e de nutrientes (Chong et al., 2019; Lima et al., 2016; Tavoni e Oliveira, 2013).

Alguns dos modelos utilizados são de interpolação, como os modelos baseados em Splines Cúbicas e Splines Hermitianos (Chong et al., 2019; Domingues et al., 2014). Outros, são de ajuste, sendo que os mais utilizados tem por base o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) (Bassanezi, 2011).

Usaremos seis modelos matemáticos de ajuste para analisar qual é o mais adequado para descrever a dinâmica populacional de Formiga. Eles serão apresentados nas próximas subseções.

2.1 Ajuste linear

Quando a função é da forma $y(x) = ax + b$ o ajuste obtido pelo MMQ é denominado linear, já que a função é a equação de uma reta. Nesse caso, os coeficientes a e b são dados por

$$a = \frac{\sum \bar{x}_i \bar{y}_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum \bar{x}_i^2 - n \bar{x}^2} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

sendo \bar{x} e \bar{y} as médias aritméticas dos dados observados, \bar{x}_i e \bar{y}_i , respectivamente.

Utilizando o ajuste linear é possível obter os parâmetros de ajustes não lineares. Veremos esse tipo de utilização indireta nas subseções 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6.

2.2 Ajuste exponencial

Se a função é da forma $y(x) = be^{ax}$ o ajuste é denominado exponencial. Uma forma de obter os coeficientes a e b desse tipo de ajuste é efetuar a linearização de $y(x)$, que se dá pela aplicação do logaritmo natural em ambos

os lados, obtendo: $\ln y = \ln(be^{ax}) \implies \ln y = ax + \ln b$. Como os valores de x e $y(x)$ são conhecidos, basta efetuar o ajuste linear com base nos pares do tipo $(x, \ln y)$. Dessa forma, o coeficiente a é determinado diretamente, e fazendo $\ln b = \alpha$, tem-se que $b = e^\alpha$.

2.3 Ajuste geométrico

Um ajuste é dito geométrico quando a função é do tipo $y(x) = bx^a$. Da mesma forma como feito para o ajuste exponencial, a determinação dos coeficientes desse ajuste pode ser feita pela aplicação do logaritmo natural em ambos os lados, obtendo: $\ln y = \ln(bx^a) \implies \ln y = a \ln x + \ln b$. Fazendo $\ln b = \beta$, $\ln y = Y$ e $\ln x = X$, tem-se a linearização $Y = aX + \beta$. Dessa forma, o coeficiente a é determinado diretamente e b é obtido fazendo-se $b = e^\beta$.

2.4 O modelo de Gompertz

Seja $P(t)$ uma determinada população no instante t , $r > 0$ a sua constante de crescimento intrínscica e P_∞ a população limite, ou capacidade de carga (Boyce e DiPrima, 2001; Bassanezi, 2011). Para Formiga, P_∞ significa o maior número de habitantes que a cidade comporta. Considerando esses parâmetros a taxa de variação populacional dada pelo modelo de Gompertz é

$$\frac{dP}{dt} = rP \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right),$$

cujas soluções, disponível em Domingues (2012), com c uma constante, é

$$P(t) = P_\infty \cdot e^{ce^{-rt}} \quad (2.1)$$

Na literatura é comum aplicar a condição inicial $P(0) = P_0$ nos modelos. Porém, para garantir que a variável t , que em nosso problema é o tempo, represente o ano em que se quer determinar a população da cidade, usaremos a condição inicial $P(t_0) = P_0$, que ao ser aplicada na Eq. (2.1) leva a:

$$P_\infty e^{ce^{-rt_0}} = P_0 \implies ce^{-rt_0} = \ln \left(\frac{P_0}{P_\infty} \right) \implies c = \ln \left(\frac{P_0}{P_\infty} \right) \cdot e^{rt_0}.$$

Sendo assim, a solução do modelo de Gompertz associado à condição inicial $P(t_0) = P_0$ é dado pela Eq. (2.2)

$$P(t) = P_\infty \cdot e^{\ln \left(\frac{P_0}{P_\infty} \right) \cdot e^{-r(t-t_0)}} \quad (2.2)$$

2.5 O modelo logístico

Considerando os mesmos parâmetros descritos na subseção 2.4, o modelo logístico (também conhecido como modelo de Verhulst), apresenta a taxa de variação populacional na forma

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right) \quad (2.3)$$

A solução da Eq. (2.3) pode ser obtida em Stewart (2009) e é dada por

$$P(t) = \frac{P_\infty}{1 + ce^{-rt}}, \quad (2.4)$$

sendo c uma constante.

Ao se aplicar a condição inicial $P(t_0) = P_0$ na Eq. (2.4) tem-se que

$$\frac{P_\infty}{1 + ce^{-rt_0}} = P_0 \implies ce^{-rt_0} = \frac{P_\infty}{P_0} - 1 \implies c = \left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1 \right) \cdot e^{rt_0}.$$

Portanto, tem-se que

$$P(t) = \frac{P_\infty}{1 + \left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1 \right) \cdot e^{-r(t-t_0)}} \quad (2.5)$$

é a solução do modelo logístico associado à condição inicial $P(t_0) = P_0$.

2.6 Ajuste exponencial assintótico

É o modelo matemático que pode ser utilizado para ajustar um conjunto de pontos com tendência de crescimento exponencial e limitado assintoticamente por um valor limite P_∞ , ou seja, quando se percebe uma tendência de estabilidade dos dados. Sendo $a \in \mathbb{R}_-^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, esse modelo é dado por

$$P(t) = P_\infty - be^{at}. \quad (2.6)$$

A Eq. (2.6) pode ser reescrita como $P_\infty - P(t) = be^{at}$ e, para o caso em que $P_\infty > P(x)$, pode-se aplicar o logaritmo natural em ambos os lados da equação obtendo-se a linearização dada pela Eq. (2.7):

$$\ln [P_\infty - P(t)] = at + \ln b. \quad (2.7)$$

Então, os coeficientes a e b são obtidos da mesma forma que no ajuste geométrico.

Na próxima subseção apresenta-se rapidamente o método de *Ford-Walford*, usado para obtenção da população limite P_∞ .

2.7 *Ford-Walford* para cálculo da população limite

O método de *Ford-Walford* pode ser aplicado a um conjunto de pontos $\{(x_i, P_i)\}$ com $i = 1, 2, \dots, n$, sendo que os valores P_i apresentem um comportamento assintótico, ou seja, quando

$$P_\infty = \lim_{x_i \rightarrow \infty} P_i.$$

Esse método ajusta curvas considerando valores subsequentes de dados (P_i, P_{i+1}) , onde $P_i = P(x_i)$, e busca estabelecer uma função de ajuste, $P_{i+1} = g(P_i)$, considerando que próximo ao valor de estabilização, P_∞ , o valor de P_i é aproximadamente igual a P_{i+1} , ie, $P_i \approx P_{i+1}$ (Bassanezi, 2011; Nunes e Mello, 2017). Sendo a função de ajuste contínua, o valor de estabilização é um ponto fixo de g , ou seja, $P_\infty = g(P_\infty)$. Logo, por esse método o valor de P_∞ é determinado ao se encontrar a função de ajuste g e resolver o sistema

$$\begin{cases} P_{i+1} = g(P_i) \\ P_{i+1} = P_i \end{cases} \quad (2.8)$$

3 Dados populacionais e obtenção dos modelos

3.1 Dados Populacionais de Formiga via Censos IBGE

O desenvolvimento do trabalho se deu com base na análise e tratamento de todos os dados populacionais dos censos do IBGE na cidade de Formiga, feitos de 10 em 10 anos, de 1950 a 2010, com passo de 10 anos (Tabela 1), com exceção do ano de 1990, em que não ocorreu o censo. Por isso, foi utilizada a população do censo realizado em 1991.

Tabela 1: População de Formiga em função dos anos, obtida em IBGE (2010).

Anos x	População $P(x)$
1950	33275
1960	40010
1970	46864
1980	52395
1991	61727
2000	62907
2010	65128

3.2 Ajustes linear, exponencial e geométrico obtidos

Aplicando os dados populacionais ao tipo de ajuste linear foi obtida o modelo dado por

$$P(t) = 557,323t - 1051821,463.$$

Apesar de a reta obtida possuir uma diferença percentual média de apenas 2,98% em relação às populações oficiais no intervalo [1950,2010], como ele considera a tendência de crescimento linear mesmo quando $t \rightarrow \infty$, ele não é indicado para previsões fora desse intervalo. Para ilustrar, a previsão da população pela FJP para o ano de 2040 é de 72.746 enquanto o modelo linear prevê um total de 85.117, 17% maior que a previsão oficial.

Para o modelo exponencial a linearização $\ln y = at + \ln b$ resulta em $\ln y = 0,0114t - 11,743$. Então, $a = 0,0114$ e $\alpha = -11,743$. Como $b = e^\alpha$, segue que $b = 0,00007945$. Portanto, o ajuste exponencial para os dados populacionais de Formiga é dado por

$$P(t) = 0,00007945e^{0,0114t}.$$

Para esse ajuste, a diferença percentual média entre os valores oficiais no intervalo [1950,2010] e os previstos pelo modelo é maior que o obtido para o ajuste linear, 4,7%. Como nesse tipo de modelo é considerado crescimento exponencial quando $t \rightarrow \infty$, é de se esperar que ele não represente adequadamente a realidade a longo prazo. De fato, o resultado previsto por esse modelo para o ano de 2040 é 100.011 habitantes, cerca de 37,5% maior que a previsão oficial.

Por fim, aplicando os dados da Tabela 1 ao tipo de ajuste geométrico, considerando pontos do tipo $(\ln t, \ln P)$ foi obtido o modelo $\ln P = 22,591 \ln t - 160,65$. Fazendo $\beta = \ln b = -160,65$, $\ln P = Y$ e $\ln t = X$, tem-se a linearização $Y = 22,591X - 160,65$. Então, $a = 22,591$ e $b = e^\beta = e^{-160,65} = 1,7005581 \cdot 10^{-70}$. Portanto, o modelo de ajuste geométrico é

$$P(t) = 1,7005581 \cdot 10^{-70}t^{22,591}.$$

Para ele a diferença percentual média entre os valores oficiais no intervalo [1950,2010] e os previstos pelo modelo é de 4,71%. Contudo, a diferença percentual entre o valor previsto e a população oficial em 2040 foi de 37%. Essa diferença ocorre pelo fato de esse modelo também considerar um tipo de crescimento sem inibição, assim como os modelos considerados anteriormente.

Percebe-se que, apesar das diferenças percentuais dos três modelos e os dados oficiais para os anos de 1950 a 2010 serem relativamente pequenas,

previsões fora desse intervalo de tempo possuem grandes diferenças em relação ao que se espera oficialmente, já que todos os modelos consideram crescimentos populacionais tendendo ao infinito à medida que o tempo aumenta.

Vamos, portanto, ajustar essa população considerando que o seu crescimento é inibido. Esse tipo de crescimento pode ser sugerido pela observação dos pontos que representam a população de Formiga em cada ano, sendo que, de 1950 a 1991 percebe-se um crescimento mais acentuado da população e, a partir de 1991 o crescimento tem uma taxa de variação reduzida (Fig. 1).

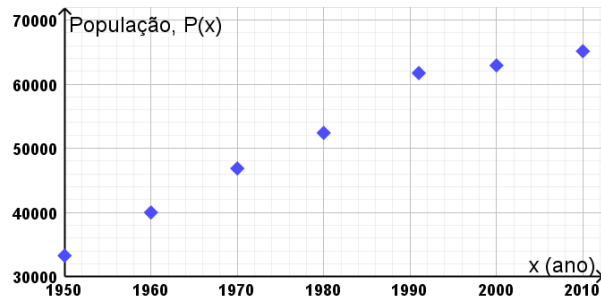


Figura 1: Ajustes linear para os pontos (P_i, P_{i+1}) .

O período em que se observa o crescimento mais acentuado se deve, em parte, à crescente expansão das indústrias de corte e costura, iniciada em meados da década de 40 (Gonçalves et al., 2017). Para implementar um modelo matemático com essas características consideraremos os clássicos modelos de Gompertz e logístico, além do modelo exponencial assintótico. Como já vimos, esses três modelos necessitam da determinação da população limite.

3.3 Determinação da população limite

O método de *Ford-Walford* foi aplicado ao conjunto de pontos $\{(t_i, P_i)\}$ com $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, sendo que os valores P_i apresentam um comportamento assintótico, ou seja, quando

$$P_\infty = \lim_{t_i \rightarrow \infty} P_i.$$

Para ajustar os pontos (P_i, P_{i+1}) escolhemos uma função linear, ou seja, $g(P_i) = aP_i + b$. Então, foram consideradas as populações oficiais do IBGE descritas na Tabela 1 e também a previsão desse instituto para o ano de 2019,

considerado como o último valor para P_{i+1} que é de 67.683 habitantes, conforme descrito na Tabela 2.

Tabela 2: Pontos populacionais do tipo (P_i, P_{i+1}) para obtenção de P_∞ .

P_i	P_{i+1}
33.275	40.010
40.010	46.864
46.864	52.395
52.395	61.727
61.727	62.907
62.907	65.128
65.128	67.683

O ajuste linear obtido para esses pontos é $g(P_i) = 0,8285P_i + 13.791$. Então, usando a primeira igualdade do Sistema (2.8) nesse ajuste linear tem-se

$$P_{i+1} = 0,8285P_i + 13.791. \quad (3.9)$$

Substituindo a segunda igualdade do Sistema (2.8) na Eq. (3.9) obtém-se a população limite de Formiga, dada por

$$P_i = P_\infty = 80.414. \quad (3.10)$$

3.4 Determinação do ajuste pelo modelo de Gompertz

Pela Tab. 1 tem-se que $t_0 = 1950$ e $P_0 = 33275$, então $\ln(P_0/P_\infty) \approx -0,88238$. Substituindo esses valores e a Eq. (3.10) na Eq. (2.2) tem-se que

$$P(t) = 80.414 \cdot e^{-0,88238 \cdot e^{-r(t-1950)}}. \quad (3.11)$$

Ainda pela Tab. 1 tem-se que $P(2010) = 65.128$. Aplicando essa condição na Eq. (3.11) chega-se a $r \approx 0,02386$. Portanto, o modelo de Gompertz associado à evolução populacional de Formiga é dado por

$$P(t) = 80.414 \cdot e^{-0,88238 \cdot e^{-0,02386(t-1950)}}. \quad (3.12)$$

3.5 Determinação do ajuste pelo modelo logístico

Já sabemos os valores de P_∞ e P_0 , segue que $P_\infty/P_0 - 1 \approx 1,41665$. Substituindo esse último resultado e os valores de t_0 e P_∞ na Eq. (2.5) tem-se

$$P(t) = \frac{80.414}{1 + 1,41665 \cdot e^{-r(t-1950)}}. \quad (3.13)$$

Aplicando a condição $P(2010) = 65.128$ na Eq. (3.13) chega-se em $r \approx 0,02996$. Portanto, tem-se

$$P(t) = \frac{80.414}{1 + 1,41665 \cdot e^{-0,02996(t-1950)}}, \quad (3.14)$$

que é o modelo logístico associado à população formiguense.

3.6 Ajuste pelo modelo exponencial assintótico

A linearização do modelo exponencial assintótico dada pela Eq. (2.7) é

$$\ln [80.414 - P(t)] = at + \ln b$$

Os valores $P(t)$ utilizados são as populações da cidade obtidas pelo IBGE nos anos de 1950 a 2010, descritos na Tab. 1. A linearização obtida foi

$$\ln [80.414 - P(t)] = -0,0201t + 49,989 \Rightarrow P(t) = 80.414 - e^{-0,0201t+49,989}$$

Sendo assim, a Eq. (3.15) representa o modelo exponencial assintótico para a dinâmica populacional de Formiga.

$$\therefore P(t) = 80.414 - 5,128 \cdot 10^{21} e^{-0,0201t}. \quad (3.15)$$

3.7 Análise das diferenças percentuais dos modelos

A Tab. 3 apresenta as previsões populacionais pelos modelos de Gompertz (Gomp.), logístico (Logist.) e exponencial assintótico (Assint.), com suas respectivas diferenças percentuais absolutas (Dif. %) em relação às previsões oficiais do IBGE do ano de 1950 a 2010.

Tabela 3: Previsões dos modelos e os erros percentuais absolutos.

x	IBGE	Gomp.	Dif. %	Logist.	Dif. %	Assint.	Dif. %
1950	33.275	33.275	0,00	33.275	0,00	31.686	4,77
1960	40.010	40.129	0,30	39.228	1,95	40.559	1,37
1970	46.864	46.509	0,76	45.225	3,50	47.816	2,03
1980	52.395	52.242	0,29	51.003	2,66	53.752	2,59
1991	61.727	57.711	6,51	56.840	7,92	59.041	4,35
2000	62.907	61.532	2,19	61.071	2,92	62.578	0,52
2010	65.128	65.129	0,00	65.127	0,00	65.825	1,07

A diferença percentual absoluta média entre as previsões do modelo de Gompertz e os dados do IBGE é de 1,43%, contra 2,71% para o modelo logístico e 2,39% do modelo exponencial assintótico. Portanto, para o intervalo em que os dados são os dos censos oficiais do IBGE, o modelo com melhor aproximação nas previsões é o de Gompertz, seguido pelo exponencial assintótico e pelo logístico.

Como não foram obtidas projeções oficiais do IBGE para anos posteriores a 2019, também comparamos as projeções dos nossos modelos com as projeções oficiais da FJP para os anos de 2011 a 2040 (FJP, 2019). Nelas, de 2011 a 2020 as projeções desse órgão oficial foram de ano a ano e de 2020 a 2040 foram feitas para intervalos de 5 anos (Tab. 4).

A finalidade dessa comparação é verificar qual modelo possui maior precisão, em relação às projeções oficiais, mesmo que esses dados não tenham sido utilizados nas construções de tais modelos.

Tabela 4: Previsões dos modelos e os erros percentuais absolutos em relação aos dados da FJP, de 2011 a 2040.

x	FJP	Gomp.	Dif. %	Logist.	Dif. %	Assint.	Dif. %
2011	66.535	65.453	1,63	65.494	1,56	66.116	0,63
2012	66.741	65.772	1,45	65.855	1,33	66.400	0,51
2013	66.888	66.084	1,20	66.209	1,02	66.679	0,31
2014	67.064	66.391	1,00	66.556	0,76	66.952	0,17
2015	67.322	66.691	0,94	66.896	0,63	67.220	0,15
2016	67.530	66.986	0,81	67.229	0,45	67.483	0,07
2017	67.740	67.275	0,69	67.556	0,27	67.740	0,00
2018	68.162	67.559	0,88	67.877	0,42	67.992	0,25
2019	68.570	67.837	1,07	68.191	0,55	68.239	0,48
2020	68.963	68.109	1,24	68.498	0,67	68.482	0,70
2025	70.394	69.393	1,42	69.940	0,65	69.623	1,10
2030	71.301	70.553	1,05	71.230	0,10	70.654	0,91
2035	72.090	71.559	0,68	72.380	0,40	71.588	0,70
2040	72.746	72.540	0,28	73.401	0,90	72.432	0,43

As diferenças percentuais médias absolutas entre as projeções oficiais da FJP e as dos modelos de Gompertz, logístico e exponencial assintótico foram iguais a 1,02%, 0,69% e 0,46%, respectivamente. Portanto, percebe-se que, apesar de todos os três apresentarem excelentes aproximações em relação aos dados oficiais, o modelo exponencial assintótico é o que mais se aproxima dessas previsões.

As curvas que representam os modelos de Gompertz, logístico e exponencial assintótico, os pontos que representam as populações oficiais pelos censos do IBGE para Formiga em [1950, 2010] e as projeções da FJP em [2011, 2040] são apresentados na Fig. 2.

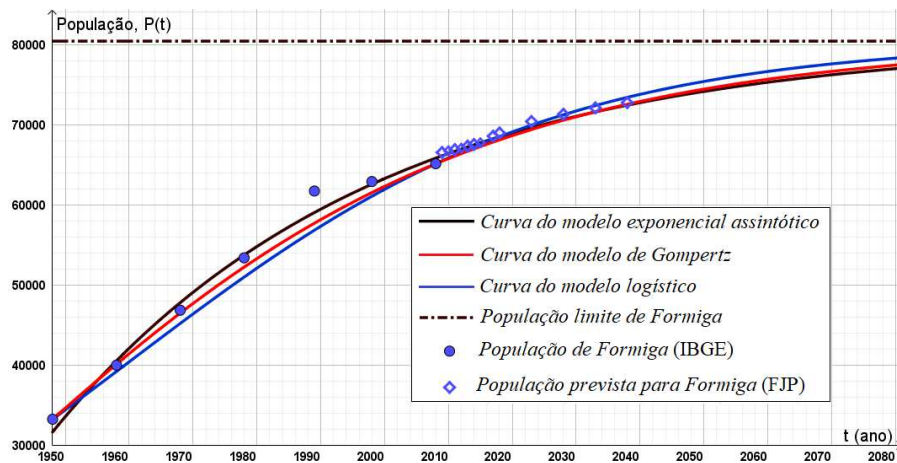


Figura 2: Modelo exponencial assintótico em relação aos pontos utilizados na construção e nas previsões de 2011 a 2040.

4 Conclusões

As populações oficiais para Formiga no intervalo [1950, 2010] foram utilizadas para determinar os ajustes linear, exponencial, geométrico e exponencial assintótico. Em todos os casos, a diferença percentual média entre as previsões dos modelos nesse intervalo e os valores oficiais foram relativamente pequenas, com valor máximo obtido de 4,71% e mínimo de 2,38%. Contudo, para previsões fora desse intervalo as diferenças percentuais obtidas para os três primeiros tipos de ajustes são consideravelmente grandes, visto que crescimentos populacionais são limitados, e essa limitação não é considerada nesses modelos.

Os outros três modelos, Gompertz, logístico e exponencial assintótico possuem o parâmetro relativo à limitação do crescimento populacional, que é a população limite de 80.414 habitantes. No intervalo relativo aos anos em que o censo foi realizado, todos os três apresentaram boas aproximações, mas o modelo de Gompertz se mostrou ligeiramente superior. Contudo, na realização de projeções populacionais do ano de 2011 ao ano de 2040 o modelo exponencial assintótico foi o que demonstrou melhor aproximação em relação às projeções da FJP, com erro percentual absoluto médio de apenas 0,46%, que representa menos que a metade do erro gerado pelo modelo de Gompertz.

Conclui-se que o modelo exponencial assintótico, dado pela Eq. (3.15), foi o que melhor se ajustou à dinâmica populacional de Formiga e que pode ser aplicado em situações diversas em que se queira determinar o número aproximado de habitantes da cidade para qualquer ano entre 1950 e 2040, além de ser o primeiro modelo matemático, nesses moldes, para essa cidade, ao qual se tem registro na literatura acadêmica.

Destaca-se, ainda, que a população limite calculada de 80.414 habitantes tem maior chance de ser considerada válida se a evolução populacional se manter nos moldes que vem ocorrendo nas últimas décadas e se novas estratégias relativas à qualidade de vida e atratividade para grandes empresas que gerem maior número de empregos não sejam implementadas.

Referências

- Bassanezi, R. C. (2011). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Ed. Contexto, S.Paulo.
- Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, New York, 7rd edition.
- Chaim, C. (2000). Formiga vira capital do trabalho feminino. *Folha de São Paulo*. URL: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/dinheiro/fi3112200018.htm/> Acesso em: 10/04/2020.
- Chong, O. A. G., Gonçalves, R. R., Luciano, C. M. S., e Canel, M. L. (2019). Modelagem matemática da dinâmica de crescimento por splines hermitianos. *Revista de Matemática da UFOP*, 6(1):1–10.
- da Silva, B. M., de Sá, D. L., e Domingues, J. S. (2019). Evolução populacional de Formiga-MG e seu ajuste por um modelo exponencial assintótico. In *Seminário de Pesquisa e Inovação e Seminário de Extensão – IFMG Campus Formiga*, volume 3, páginas 1–5, Formiga/MG, Brasil. JECT Proceedings.
- Domingues, J. S. (2012). Gompertz Model: resolution and analysis for tumors. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(7):70–77.
- Domingues, J. S., de Sá, D. L., e da Silva, B. M. (2020). Modelo exponencial assintótico aplicado á evolução populacional de formiga/mg. *Proceeding Se-*

ries of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics (no prelo), 8(1):86–99.

Domingues, J. S., Gonçalves, M. C. G., Braz, S. C., e Pereira, F. J. (2014). Usando splines cúbicas na modelagem matemática da evolução populacional de pirapora/mg. *ForScience*, 2(1):17–30.

FJP (2019). *Fundação João Pinheiro*, base de dados, projeções populacionais municipais 2010-2040. URL: <http://novosite.fjp.mg.gov.br/estudos-populacionais/> Acesso em: 29/05/2020.

Freire, F. H. M. A. (2001). *Projeção populacional para pequenas áreas pelo método das componentes demográficas usando estimadores bayesianos espaciais*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte/MG.

Gonçalves, K., Santos, A., e Macedo, S. (2017). Análise da rotatividade de funcionários no setor de facção e confecção em Formiga/MG: um estudo de caso. Trabalho de Conclusão de Curso, IFMG Campus Formiga.

IBGE (2010). Formiga panorama, *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística*. URL: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/formiga/panorama/> Acesso em: 10/05/2020.

Lima, M. S. C. S., Queiroz, E. L., Pederassi, J., e dos Santos Souza, C. A. (2016). Modelos matemáticos em ecologia das populações: uma abordagem para estudantes de graduação. *Cadernos UniFOA*, 32(1):123–138.

Nunes, C. A. P. e Mello, M. H. P. L. (2017). Método de ford-walford aplicado ao modelo generalizado de von bertalany. *Cadernos do IME – Série Matemática*, 11(1):24–34.

Stewart, J. (2009). *Calculus – Early Transcendentals*. Thomson Learning, California, 6rd edition.

Tavoni, R. e Oliveira, R. Z. G. (2013). Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2(1):86–99.

