

Exploração de recursos renováveis na pesca

Silvia D. Souza¹,

Bolsista Fapeam, Depto. Matemática, ICE-UFAM, 69.067-005, Manaus/AM

Rodney C. Bassanezi²

Depto. Mat. Aplicada, IMECC-Unicamp, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Formulamos modelos da dinâmica de crescimento de estoques de peixe com pesca, e fatores que podem reduzir tais populações a níveis que impossibilitam sua recuperação. Em tais modelos, o comportamento do estoque de peixes está sujeito a limiares que regem seu crescimento ou decrescimento. Devido às incertezas inerentes ao processo de preservação, propomos também um sistema dinâmico fuzzy para modelar os parâmetros envolvidos.

Palavras-chave: *Estoque de peixe; fator abiótico; lógica fuzzy; efeito Allee.*

1. Introdução

A exploração de recursos pesqueiros é associada à pesca comercial, quer seja como fonte de alimentos ou pesca de peixes ornamentais. A forma como se dá essa exploração deve ser estudada a fim de que não aja sobrepesca, reduzindo assim, o perigo de extinção de algumas espécies.

Entender fenômenos que influenciam o crescimento populacional dos peixes, nos leva a políticas que podem evitar a redução drástica de estoques de peixes. Tais políticas, podem elevar o nível de estoque a valores aceitáveis para a continuidade da pesca como fonte de recurso econômico dos ribeirinhos da região amazônica.

Trabalhos visando entender a dinâmica de crescimento de certas espécies de peixes e, os fatores que levam a sua diminuição estão sendo realizados na

¹silviasouza@ufam.edu.br

²rodney@ime.unicamp.br

região norte, como é o caso de (Bandeira, 2017) que estuda os fatores abióticos relacionados à pesca do Tambaqui na Amazônia Central.

Entender a dinâmica de crescimento e diminuição de estoque de peixes, mediante os mais variados fatores como pesca, limiares de crescimento e fatores ambientais tem sido o objetivo do presente estudo. Aqui, propomos modelos que abordam a dinâmica do crescimento da população quando temos situações de capturas de peixes, levando em consideração que a pesca só pode ser realizada se tivermos um limiar mínimo de crescimento (efeito Allee) para que o estoque de peixe possa ser renovado.

É importante termos em mente também, que limiares de crescimento mínimo são difíceis de medir, assim temos incertezas com relação a esses valores, o que nos leva ao uso da lógica fuzzy nessas situações.

1.1 Dinâmica elementar das populações:

1.1.1 Modelo Logístico:

A equação que caracteriza o crescimento do estoque pesqueiro livre da pesca é dada pelo modelo de Verhulst:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (1.1)$$

que é a equação logística de crescimento populacional, onde r é a taxa de crescimento intrínseca.

Podemos observar que a equação possui dois pontos de equilíbrio que são $x = 0$ e $x = K$. Além disso temos:

$$0 < x < K \Rightarrow \dot{x} > 0 \text{ e}$$

$$x > K \Rightarrow \dot{x} < 0.$$

Na realidade, K é um ponto assintoticamente estável (globalmente), ou seja, para $x > 0$ temos :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = K,$$

indicando que o estoque tende a se estabilizar em torno da capacidade suporte K de cada espécie.

Esse comportamento pode ser observado na Figura 1:

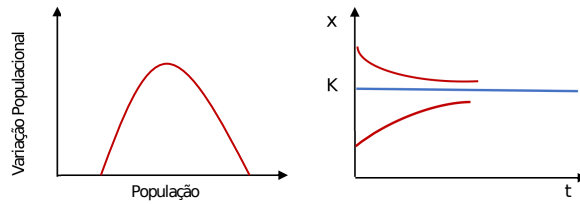


Figura 1: Gráfico da variação de crescimento populacional do modelo logístico e das curvas soluções.

A solução é dada por:

$$x(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}, \text{ em que } c = \frac{K - x_0}{x_0}.$$

1.1.2 Esforço de pesca

O esforço de pesca é a medida adequada para a pescaria em questão. Podemos tentar definir simplesmente como o número de embarcações que realizam atividades de pesca por unidade de tempo ou, de forma mais complexa, definir por exemplo o esforço de pesca envolvendo rede, linha, armadilha de pesca entre outras variáveis. Podemos usar a captura por unidade de esforço para descrever a hipótese de que essa captura é proporcional ao nível de estoque, como podemos encontrar em (Clark, 1976), ou seja,

$$h = qEx$$

onde E denota o esforço, e q é uma constante chamada de coeficiente de capturabilidade. Para simplificação de cálculos usaremos $q = 1$.

1.2 Fatores abióticos e pesca no modelo de crescimento logístico

Chamamos de fatores abióticos todas as influências que os seres vivos possam receber em um ecossistema, derivadas de aspectos físicos, químicos ou físico-químicos do meio ambiente, tais como a luz e a radiação solar, a temperatura, o vento, a água, a composição do solo, a pressão e outros.

No caso do crescimento logístico para a população de peixe, consideramos fatores que influenciam na diminuição da taxa de crescimento do estoque de peixe, como temperatura da água, variação do volume dos rios, contaminação

por agrotóxicos, etc. Um trabalho que avalia a sustentabilidade do estoque de Tambaqui sob impacto de fatores abióticos como cheia e seca extremas pode ser encontrado em (Bandeira, 2017).

O fator abiótico pode ser incorporado à mortalidade ou controle, causando uma diminuição na taxa de crescimento do estoque. Assim temos aquele fator que influencia o efeito Allee que são fatores abióticos aliados à sobrepesca que podem reduzir drasticamente os estoques pesqueiros a ponto de ultrapassar o limite de preservação. Nos modelos a seguir, abrangemos essas possibilidades de extinção e limiares de crescimento mínimo.

2. Modelo logístico com efeito Allee, pesca e fator abiótico

Nos modelos abaixo, procuramos inserir fatores que estão ligados diretamente à nível de estoques relacionados com a pesca. Tais fatores, podem ocasionar à extinção ou redução drásticas de várias espécies de peixes, como vem ocorrendo na região amazônica. Estudamos a estabilidade e, também simulamos várias situações relacionadas com esses modelos.

1. Modelo logístico com efeito Allee e sem pesca.

$$\frac{dx}{dt} = sx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{K_0} - 1\right), \quad x(0) = x_0. \quad (2.2)$$

onde s, K e K_0 são constantes positivas, com s sendo a taxa de crescimento intrínseca das espécies, K capacidade de suporte e K_0 o limiar mínimo para crescimento populacional, isto é, o menor valor que a população deve ter para não ser extinta.

A Figura 2 diz respeito à taxa de variação do modelo. Observamos que se $x > K_0$ então a população se recupera e volta a crescer. Se $x < K_0$ a população só decresce. O ponto de equilíbrio K_0 é denominado limiar de preservação da espécie ou efeito Allee. A Figura 3 mostra as soluções destas duas situações.

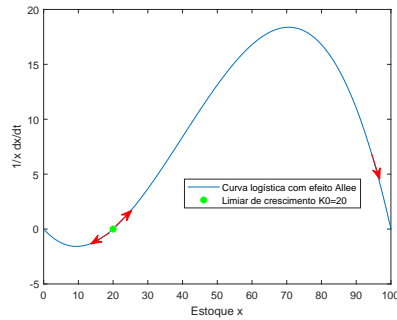


Figura 2: Gráfico da variação de crescimento populacional do modelo logístico com efeito Allee.

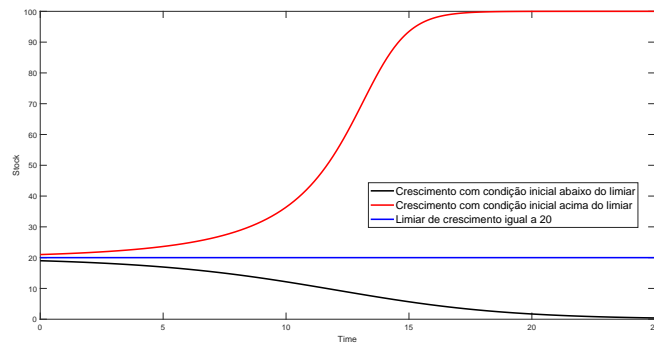


Figura 3: Curvas de crescimento logístico com efeito Allee.

Os pontos de equilíbrio desse modelo são: $x_1 = 0$, $x_2 = K_0$ e $x_3 = K$.

2. **Modelo logístico com efeito Allee e pesca.** A equação que caracteriza essa situação é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = sx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{K_0} - 1\right) - Ex, \quad x(0) = x_0. \quad (2.3)$$

onde a constante E significa esforço de pesca aplicado, s é a taxa de crescimento intrínseca, K capacidade de suporte e K_0 é o limiar mínimo para preservação das espécies.

Formulamos dois teoremas simples ao observar o comportamento dos dois modelos (2.2) e (2.3), o primeiro teorema mostra a relação entre as matrizes associadas e o segundo mostra a relação entre seus pontos de equilíbrio:

Teorema 2.1 *A matriz \tilde{X} associada a equação diferencial (2.2) é obtida pela aplicação do operador $[T]$ na matriz asso \check{X} associada a (2.3), onde:*

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{s+E} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{X}] = \begin{bmatrix} -\frac{s}{KK_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{K} + \frac{s}{K_0} & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix}$$

e

$$[\check{X}] = \begin{bmatrix} -\frac{s}{KK_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{K} + \frac{s}{K_0} & 0 \\ 0 & 0 & -(s+E) \end{bmatrix}.$$

Prova:

Seja 2.2 associado à matriz \tilde{X} e 2.3 associado à \check{X} . Como ambas equações diferenciais são polinômios de grau três, onde o termo de grau zero é nulo, temos uma imersão do \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^3 , além disso, como as dimensões são iguais temos um isomorfismo entre os espaços formados por esses dois polinômios. Segue então, que existe uma matriz T tal que:

$$\tilde{X} = [T]\check{X}.$$

Procedendo as operações de inversão de matrizes, obtemos a matriz $[T]$ dada acima.

Teorema 2.2 *Seja a equação diferencial 2.2, onde os pontos de equilíbrios são dados por $x_1 = 0, x_2 = K_0$ e $x_3 = K$, com K_0 o limiar do efeito Allee e, K a capacidade de suporte do modelo. Então, os pontos de equilíbrio*

não triviais, do modelo 2.3 dependem dos pontos de equilíbrio x_2 e x_3 da equação 2.2 como seguem:

$$x_{11} = 0, \quad x_{22} = \frac{1}{2}(K + K_0) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4KK_0E}{s} + (K - K_0)^2}$$

$$\text{e } x_{33} = \frac{1}{2}(K + K_0) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4KK_0E}{s} + (K - K_0)^2}$$

Observação: O procedimento para encontrar esses pontos de equilíbrios é simples e, segue o padrão normal.

Agora, o limiar será x_{22} portanto valores menores que este levam à extinção e maiores levam ao ponto de equilíbrio x_{33} . Podemos observar nos gráficos abaixo que, houve um deslocamento nos pontos de equilíbrio quando temos a pesca e quando não há pesca. Os limiares Allee também sofrem deslocamento.

Na Figura 4, temos a taxa de variação dos níveis de estoque, o ponto verde é o limiar para o crescimento com efeito Allee quando não há pesca e, o ponto verde com contorno preto na curva é o limite com efeito Allee e pesca.

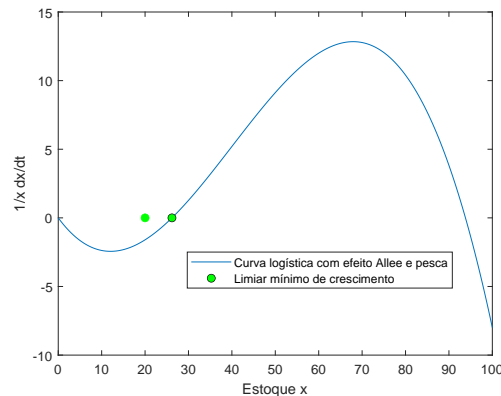


Figura 4: Variação populacional do modelo logístico com efeito Allee e pesca.

A Figura 5, ilustra o crescimento populacional com condição inicial menor que o limiar x_{22} e, a situação maior que o x_{22} . Para valores de condição inicial maior que x_{22} , o crescimento populacional se estabiliza não na

capacidade de suporte, mas sim no ponto x_{33} , que depende da capacidade de suporte e, menor que x_{22} tende à extinção.

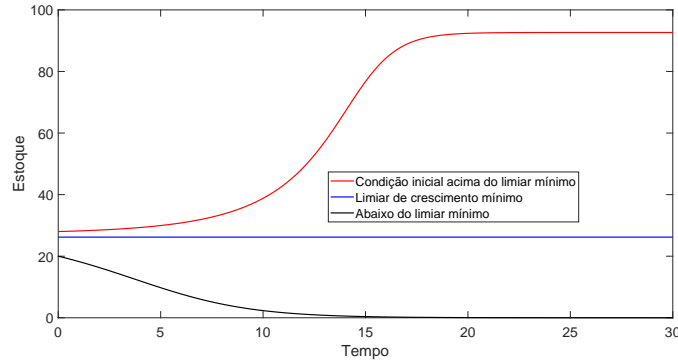


Figura 5: Curva solução logística com pesca e condição inicial acima e abaixo do limiar mínimo de crescimento .

3. Modelo logístico com efeito Allee, pesca e fator abiótico. A equação que caracteriza essa situação é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = sx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{K_0} - 1\right) - (E + \lambda)x \quad (2.4)$$

em que a constante λ significa o fator abiótico para a população de peixes. Se chamarmos $E + \lambda = \bar{E}$, teremos como pontos de equilíbrios os mesmos vistos em 2.2 onde o E dado pelo esforço de pesca será o \bar{E} com fator abiótico, devido a esse fator, o ponto de equilíbrio do efeito Allee (ponto de equilíbrio instável) e o máximo nível de estoque (ponto de equilíbrio estável) sofrem um deslocamento.

Isso significa que o valor mínimo para que ocorra o crescimento populacional (valor Allee), será um pouco maior conforme podemos observar nos pontos de equilíbrio.

Na Figura 6 temos a variação populacional da equação (2.4). Observamos uma diminuição na variação quando temos o efeito abiótico e, um aumento do valor do ponto de equilíbrio que causa o efeito Allee, ou seja, o nível populacional mínimo para que o estoque não vá para extinção, tem que ser maior quando temos o fator abiótico junto com a pesca.

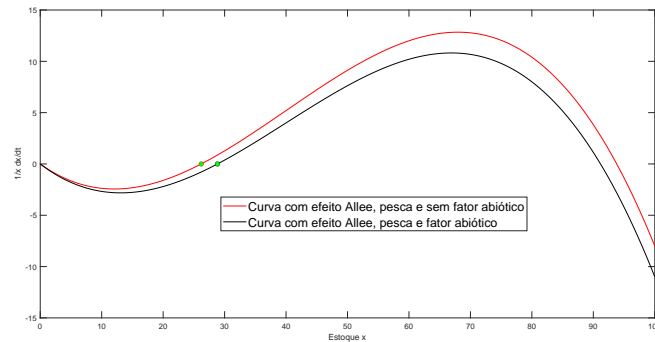
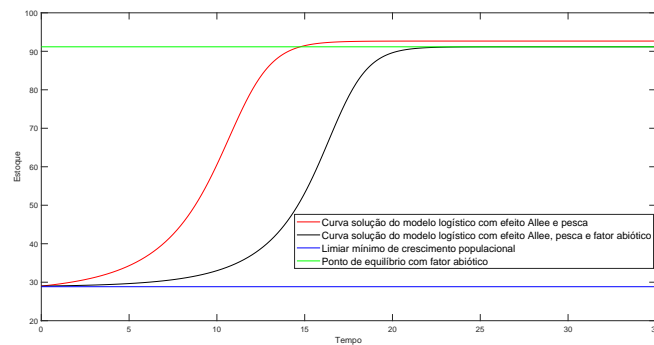


Figura 6: Curvas da taxa de variação logística com efeito Allee e fator abiótico, com pesca e sem pesca.

Já no próximo gráfico, temos a curva do crescimento logístico com pesca e efeito Allee, nas situações com fator abiótico (curva em preto) e sem fator abiótico (curva na cor vermelha). O ponto de equilíbrio é modificado conforme o valor do fator abiótico e o esforço de pesca.



5

Figura 7: Curva de crescimento logístico com pesca, efeito Allee e fator abiótico.

2.1 Crescimento logístico com efeito Allee fuzzy e pesca

A teoria básica fuzzy aqui usada pode ser vista em (Barros e Bassanezi, 2006) e, sobre estabilidade de sistemas fuzzy em (Mizukoshi, 2004) e (Cec-

conello, 2010). No modelo de pesca que apresentamos aqui, com limiar de crescimento e, fator abiótico dentre outros parâmetros usados no modelo, nos deparamos com o problema de definir valores de parâmetros que, em geral é de difícil medição. O parâmetro do limiar de crescimento é um desses valores difícil de medir, isso nos leva a considerar o limiar K_0 tomado em (2.2) fuzzy. Fizemos também a fuzzificação desse limiar para caso em que temos pesca, representado pela equação (2.3).

1. **Parâmetro Allee fuzzy sem pesca:** Para o caso do parâmetro K_0 fuzzy, onde K_0 é um ponto de equilíbrio instável, obtemos o gráfico 8. Esta situação nos mostra o valor central do gráfico (faixa roxa) sendo o K_0 fuzzy e, os valores das condições iniciais acima e abaixo da faixa fuzzy que representa a incerteza do K_0 . Tomando valores acima do limiar fuzzificado, o crescimento tende a capacidade de suporte K que não é fuzzy, com K sendo um ponto de equilíbrio estável e determinístico (linha em vermelho). Se tomarmos valores abaixo do limiar fuzzificado, temos que o estoque de peixes tende a extinção.

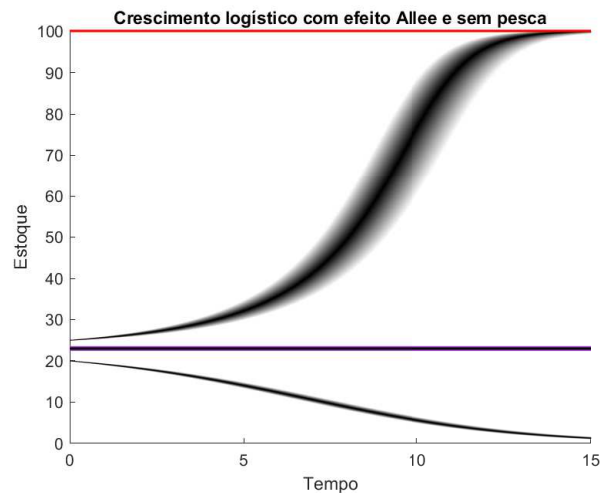


Figura 8: Parâmetro $\widehat{K}_0 = [22.5, 23, 23.5]$ fuzzy. $P_0 \notin \text{supp}\widehat{K}_0$ e $P_0^1 = 20$ e $P_0^2 = 25$.

2. **Parâmetro K_0 fuzzy e pesca:** Se considerarmos agora a situação em que além do efeito Allee temos a pesca contínua, o ponto de equilíbrio

do efeito Allee dependerá de K_0 ou seja, os pontos de equilíbrios serão expressões que dependem de K_0 , conforme o teorema (2.2). O ponto de máximo crescimento populacional também será fuzzy, uma vez que depende de K_0 . Logo, no gráfico 9, a reta fuzzy superior representa o máximo valor de crescimento populacional (não é a capacidade de suporte pois, como temos a pesca, esse crescimento não alcançará sua capacidade de suporte), temos a curva que representa o crescimento do estoque quando tomamos uma condição inicial acima do limiar fuzzy, representada pela reta fuzzy em roxo e, a curva quando tomamos uma condição inicial abaixo do limiar fuzzy.

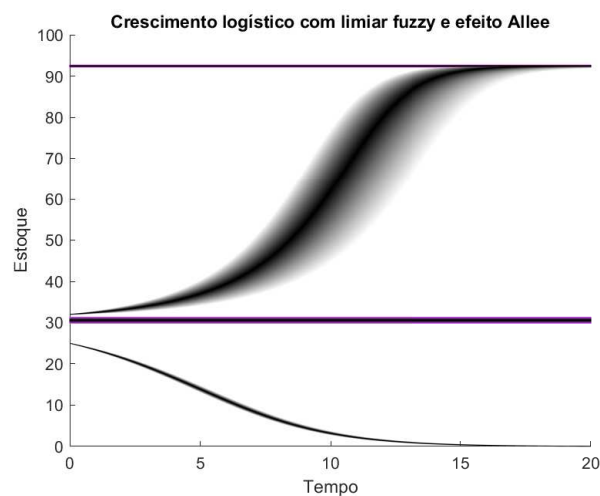


Figura 9: Parâmetro $\widehat{K}_0 = [22.5, 23, 23.5]$ fuzzy e pesca, $P_0 \notin \text{supp}\widehat{K}_0$ e $P_0^1 = 25$ e $P_0^2 = 32$.

3 Conclusões

O modelo aqui proposto serviu para estudar a dinâmica do estoque de peixes quando temos limiar para o crescimento do estoque de peixes, pesca e fatores abióticos. O estudo do esforço de pesca em conjunto com essa dinâmica, é essencial para entender os processos que podem levar uma população de peixes à reduções drásticas conhecida como colapso do nível de estoque de peixes e, serve também para desenvolver modelos sustentáveis de pesca. Além disso, propomos um modelo para o caso das imprecisões relacionadas aos níveis de

limiar mínimo de crescimento que é muito difícil de determinar, usando o limiar fuzzy.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a agência de fomento Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM processo 001/2014.

Referências

- Bandeira, K. C. T. (2017). *Efeitos dos eventos climáticos locais no recurso pesqueiro do Tambaqui da Amazônia Central*. Tese de Doutorado, PPG-CIPET-UFAM, Manaus/AM.
- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 of *Coleção Textos Didáticos*. IMECC–Unicamp.
- Cecconello, M. S. (2010). *Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Clark, C. W. (1976). *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of renewable resources*. Wiley Interscience, Toronto.
- Mizukoshi, M. T. (2004). *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.