

Periodicidade em dinâmica populacional com incertezas

Rodney C. Bassanezi¹,

IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Diego F. Gomes²,

DEMAT, IFMA, 65.950-000, Barra do Corda/MA.

Resumo. Neste trabalho analisamos os efeitos provocados pela inserção de parâmetros periódicos em modelos de dinâmica populacional de uma espécie, onde a condição inicial é considerada incerta. Mais especificamente, usamos um sistema dinâmico fuzzy (condição inicial fuzzy), associado a um modelo inibido com coeficientes periódicos. Neste contexto obtemos um teorema de existência e unicidade da solução fuzzy. A motivação deste trabalho é proveniente da modelagem da dinâmica populacional do *Donax gemmula*.

Palavras-chave: *Biomatemática; Donax gemmula; Sistemas dinâmicos fuzzy; Perioditização.*

1. Introdução

A grande maioria dos modelos matemáticos usados em ecologia teórica para estudar a dinâmica de populações utilizam parâmetros constante em equações diferenciais. Esta simplificação torna os modelos mais simples na forma de sistemas autônomos. No entanto, um modelo mais realista deveria utilizar as taxas de natalidade, mortalidade, condições ambientais, etc. como fatores temporais. Também as condições iniciais de tais modelos geralmente são incertas o que tornam as soluções exatas dos modelos determinísticos pouco confiáveis. Salientamos que os resultados sobre existência e estabilidade de soluções de sistemas determinísticos periódicos são bastante satisfatórios

¹rodney@ime.unicamp.br

²diego.gomes@ifma.edu.br

quando as oscilações são pequenas (Cushing, 1977) e o mesmo acontece quando o sistema é fuzzy e associado a um sistema autônomo (Ceconello et al. (2010), Mizukoshi et al. (2009)).

Vamos apresentar neste trabalho um modelo da dinâmica populacional do *Donax gemmula*, considerando a condição inicial como um número fuzzy e os parâmetros periódicos.

As espécies do gênero *Donax* ocupam zonas intermares e rasas de praias arenosas. Nestes locais estas espécies são bem sucedidas uma vez que conseguem coordenar seus movimentos em resposta às mudanças nas condições ambientais resultantes das ondas e correntes marinhas. Um fenômeno comum a quase todas as espécies do gênero é a grande variação temporal em abundância. Em determinados períodos as populações atingem grandes densidades, podendo chegar à quase extinção em outros períodos. Muitas são as explicações para tamanhas flutuações em abundância: falta de alimentos, ação de predadores, baixas salinidades, etc. Entretanto, uma hipótese mais viável é apresentada por Paes et al. (1992) que, estudando a bioecologia deste animal no litoral do Rio Grande do Sul, constatou que sua diminuição no inverno se dá principalmente pela influência das tempestades frequentes no período e é quando os organismos se tornam mais lentos na sua atividade de escavação, ficando mais expostos e arrastados para a praia, onde morrem.

2. Dinâmica Populacional do *Donax gemmula* – Modelo determinístico (Zotin e Bassanezi, 1993)

De acordo com as características fisiológicas do animal, as taxas de natalidade e mortalidade variam com o tempo, apresentando um padrão sazonal positivamente correlacionado com a temperatura da água durante o ano. As tempestades de inverno são provavelmente as mais fatais, uma vez que o *Donax gemmula* perde sua mobilidade em temperaturas baixas, dificultando sua fixação na areia (Paes et al., 1992).

Consideramos a taxa de crescimento intrínseca dada por:

$$\alpha(t) = r(t) - m(t)$$

onde, $r(t)$ é a taxa de recrutamento e $m(t)$ é a taxa de mortalidade. Como $m(t)$ depende também de fatores abióticos, consideramos:

$$m(t) = d(t) + \lambda f(t)$$

sendo $d(t)$ correspondente à taxa de mortalidade fisiológica, $f(t)$ uma medida de intensidade de tempestade e λ uma constante de proporcionalidade abiótica.

Se $P(t)$ é a densidade populacional do *Donax gemmula*, podemos formular sua dinâmica usando um modelo do tipo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r(t)P \left(1 - \frac{P}{K}\right) - (d(t) + \lambda f(t))P = \alpha(t)P \left(1 - \frac{P}{K(t)}\right) \\ P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.1)$$

onde, $K(t) = \frac{K\alpha(t)}{r(t)}$ é a capacidade suporte do sistema, representando a abundância máxima da espécie onde não é comum a ocorrência de tempestades. Os parâmetros $r(t)$, $d(t)$ e $f(t)$ são considerados periódicos e positivos, com $T > 0$ o menor período entre eles e, conseqüentemente, $\alpha(t)$ e $K(t)$ também são T -periódicos.

A equação (2.1) pode ainda ser escrita como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha(t)P - \beta(t)P^2 \\ P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde $\beta(t) = \left| \frac{\alpha(t)}{K(t)} \right| < |\alpha(t)|$ se, e só se, $K(t) > 1$.

Considerando a mudança de variáveis

$$u(t) = \frac{1}{P(t)} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{P^2} \frac{dP}{dt}$$

na equação (2.2), obtemos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \beta(t) - \alpha(t)u \\ u(0) = u_0 = \frac{1}{P_0} > 0 \end{cases}. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é linear e vamos usar o método da variação dos parâmetros para obter sua solução única. A solução de (2.3) é obtida como a soma da solução da homogênea

$$u_h(t) = u_0 \exp \left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) \quad (2.4)$$

e uma solução particular $u_p(t)$, que é obtida quando consideramos $u_0 = u_{0_p}(t)$ na equação (2.4):

$$u_p(t) = u_{0_p}(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right). \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) na equação (2.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \alpha(t)u_p &= \beta(t) \\ \Rightarrow -u_{0_p}(t)\alpha(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) + \frac{du_{0_p}}{dt} \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) + \alpha(t)u_{0_p}(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) &= \beta(t) \\ \Rightarrow \frac{du_{0_p}}{dt} &= \beta(t) \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} u_{0_p}(t) &= \int_{t_0}^t \beta(r) \exp \left(\int_{t_0}^r \alpha(s) ds \right) dr \\ \Rightarrow u_p(t) &= \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) \int_{t_0}^t \beta(r) \exp \left(\int_{t_0}^r \alpha(s) ds \right) dr. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral $u(t)$ é dada por:

$$u(t) = u_0 \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) + \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) \int_{t_0}^t \beta(r) \exp \left(\int_{t_0}^r \alpha(s) ds \right) dr,$$

ou seja,

$$u(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right) \left[u_0 + \int_{t_0}^t \beta(r) \exp \left(\int_{t_0}^r \alpha(s) ds \right) dr \right]. \quad (2.7)$$

Agora vamos procurar uma solução $u_p(t)$ que satisfaça (2.7) e que seja periódica. Como $\alpha(t) > 0$ é T -periódica podemos supor que $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$, com $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1(t)$ uma função T -periódica. Então,

$$A(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds = \alpha_0 (t - t_0) + [\alpha_1^*(t) - \alpha_1^*(t_0)],$$

com $\alpha_1^*(t)$ também T -periódica, pois $\frac{d\alpha_1^*(t)}{dt} = \alpha(t)$ e ainda, $\alpha_1^*(0) = \alpha_1^*(T) = 0$, no que implica que $A(t_0) = 0$ e $A(t_0 + T) = \alpha_0 T$. Logo,

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \alpha(s) ds\right) = \exp(\alpha_0 T).$$

Para que $u_p(t)$ seja T -periódica, devemos ter $u_p(t_0) = u_p(t_0 + T)$ com $u_{0_p} = u_p(t_0) = u_p(t_0 + T)$. Portanto,

$$\begin{aligned} u_p(t_0 + T) &= u_{0_p} \exp(-\alpha_0 T) + \exp(-\alpha_0 T) \int_{t_0}^{t_0+T} \beta(s) e^{A(s)} ds = u_{0_p} \\ &\Leftrightarrow u_{0_p} = \frac{e^{\alpha_0 T} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(s)} \beta(s) ds \right)}{1 - e^{-\alpha_0 T}}. \end{aligned}$$

Assim, a solução periódica de (2.3) é dada por

$$u_p(t) = u_{0_p} e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t \beta(s) e^{A(s)} ds. \quad (2.8)$$

Logo, a solução geral do sistema (2.3) é dada por

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = u_0 e^{-A(t)} + u_{0_p} e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t \beta(s) e^{A(s)} ds. \quad (2.9)$$

Conseqüentemente, a solução geral de (2.2) é

$$P(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{u_0 e^{-A(t)} + u_p(t)}, \text{ com } P_0 = \frac{1}{u_0}.$$

Temos que $P^*(t) = \frac{1}{u_p(t)}$ é denominada *solução canônica* de (2.2).

Proposição 2.1. *A solução canônica $P^*(t)$ de (2.2) é periódica e $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P^*(t)$.*

Demonstração. Como $u_p(t)$ é T -periódica, então $P^*(t) = \frac{1}{u_p(t)} = \frac{1}{u_p(t+T)} = P^*(t+T)$, o que implica que $P^*(t)$ é T -periódica.

Agora, temos que $e^{-A(t)} = \exp(-\alpha_0(t - t_0) - \alpha_1^*(t) + \alpha_1^*(t_0)) = \exp(k_0 - k_1 t)$ com $k_0, k_1 > 0$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-A(t)} = 0$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{u_0 e^{-A(t)} + u_p(t)} = \frac{1}{u_p(t)} = P^*(t).$$

□

Observamos que, para todo $t > 0$ e $P(t) < P^*(t)$ implica que $P^*(t)$ é a curva de estabilidade de $P(t)$, ou seja, a capacidade suporte da população é periódica.

Temos ainda que a solução canônica $P^*(t)$ independe da condição inicial P_0 .

2.1 Modelagem dos parâmetros

Os valores dos parâmetros foram obtidos por meio de dados colhidos por Paes et al. (1992).

2.1.1 Recrutamento $r(t)$

Considerando que o recrutamento máximo se dá no verão e que o mínimo é no inverno, uma função com estas características é:

$$r(t) = r_1 + r_2 \frac{1 - \cos(\frac{\pi t}{6})}{2}$$

onde, r_1 é a taxa mínima de nascimento independentemente das condições ambientais e r_2 é o aumento de nascimentos propiciados pela melhoria das condições climáticas.

Os valores encontrados experimentalmente são próximos de $r_1 = 0,3$ e $r_2 = 0,2$.

2.1.2 Mortalidade fisiológica $d(t)$

A mortalidade fisiológica foi estimada como sendo proporcional à quantidade de indivíduos adultos em cada instante:

$$d(t) = \lambda H(t)$$

onde, λ é a taxa de mortalidade fisiológica de adultos no instante t .

Para a obtenção de $H(t)$, foi feita uma interpolação com dados reais disponíveis:

$$H(t) = 0,3025 + 1,225 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(t-3)}{6} \right)$$

e $k = 0,6$.

2.1.3 Intensidade da tempestade $f(t)$

O pico de mortalidade é apresentado durante as tempestades de inverno. No verão a mortalidade diminui. Utilizando a escala de intensidade de 0 a 4 para as tempestades observadas na região $f(t)$ foi simulada como sendo:

$$f(t) = 1,3083 + 3,5279 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{12} \right).$$

2.1.4 Outros parâmetros relevantes

$\beta = 0,06 \rightarrow$ Obtido empiricamente;

$k = 650 \rightarrow$ Obtido da literatura;

$P_0 = 122 \rightarrow$ Observado (Paes et al., 1992);

t é considerado em meses.

A Figura 1 mostra a solução $P(t)$ e a solução canônica $P^*(t)$ do modelo determinístico (2.2).

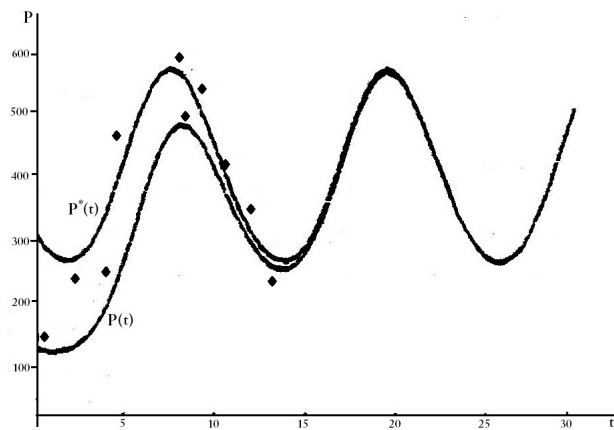


Figura 1: Solução geral $P(t)$ e canônica $P^*(t)$.

2.2 Modelagem com sistema dinâmico fuzzy

Na modelagem de fenômenos como este da dinâmica de *Donax gemmula*, os parâmetros e condição inicial utilizados estão carregados de subjetividade e imprecisão. Uma modelagem mais adequada deve levar em consideração estes fatores de modo que a imprecisão inerente ao processo biológico seja mensurada de alguma maneira. Os sistemas dinâmicos fuzzy têm esta finalidade quando trocamos parâmetros e/ou condição inicial por números fuzzy.

2.2.1 Preliminares

Definição 2.1. Seja U um conjunto universo. Um subconjunto fuzzy F de U é definido por uma função φ_F denominada grau de pertinência de F :

$$\varphi_F : U \longrightarrow [0, 1].$$

O valor $\varphi_F(x) \in [0, 1]$ indica o grau que o elemento x de U pertence a F .

Definição 2.2. Um subconjunto fuzzy A é um número fuzzy quando A é um subconjunto de \mathbb{R} e $\varphi_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ satisfaz:

- (i) Todo α -nível de A , isto é, $[A]^\alpha = \{x \in A \mid \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ é não-vazio para $0 < \alpha \leq 1$;
- (ii) $[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ é um conjunto fechado de \mathbb{R} ;
- (iii) $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.

O conjunto dos números reais fuzzy será denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Definição 2.3 (Princípio de Extensão de Zadeh). Sejam f uma função tal que $f : X \longrightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é uma função \widehat{f} que leva A em um subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Z de modo que o grau de pertinência de $\widehat{f}(A)$ é dado por:

$$\varphi_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & , \text{ se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde, $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ é a imagem inversa de z .

Sistemas dinâmicos fuzzy

Seja um sistema dinâmico determinístico dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.10)$$

Se considerarmos que a condição inicial é imprecisa e modelada por um número fuzzy que é transportado pela extensão de Zadeh da função de estado \hat{f} , temos um sistema dinâmico fuzzy, denotado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \hat{=} f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (2.11)$$

Dizemos que (2.11) é o *sistema fuzzy associado* ao sistema determinístico (2.10). A *solução fuzzy* de (2.11) é a extensão de Zadeh da solução de (2.10). Os seguintes resultados estabelecem a equivalência entre os pontos de equilíbrios dos sistemas (2.10) e (2.11).

Teorema 2.1 (Mizukoshi et al. (2009)). *Se x^* é um estado de equilíbrio para (2.10) então $\chi_{\{x^*\}}$ é um estado de equilíbrio para (2.11). Além disso:*

1. $\chi_{\{x^*\}}$ é estável para o sistema (2.11) se, e somente se, x^* é estável para (2.10);
2. $\chi_{\{x^*\}}$ é assintoticamente estável para (2.11) se, e somente se, x^* é assintoticamente estável para (2.10);
3. $\chi_{\{x^*\}}$ é instável para (2.11) se, e somente se, x^* é instável para (2.10).

As definições de estados de equilíbrio e de estabilidade usadas em (2.11) são análogas ao caso clássico, porém como estamos no espaço dos números fuzzy, a métrica utilizada é a de Hausdorff, isto é, dados conjuntos $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^n$, a distância entre A e B é dada por:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{y \in A} \inf_{x \in B} \|x - y\|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \|x - y\| \right\}. \quad (2.12)$$

Se considerarmos o caso em que a subjetividade aparece nos parâmetros da função f , então precisamos aplicar a extensão de Zadeh ao fluxo do sistema determinístico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), b) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.13)$$

onde, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$ é um parâmetro para f .

Para poder usar o mesmo Teorema 2.1 consideramos um novo sistema determinístico $n + 1$ -dimensional

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), b) \\ \frac{db}{dt} = 0 \\ x(0) = (x_0, b) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{cases} \quad (2.14)$$

onde, b agora aparece na condição inicial.

O sistema fuzzy associado ao sistema (2.14) é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \hat{=} f(x(t), b) \\ x(0) = (x_0, \hat{b}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (2.15)$$

Em resumo temos:

- Se $\varphi_t(x) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a solução do sistema determinístico (2.10) então, a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0) : A \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ de $\varphi_t(x)$ é a solução de (2.11) e satisfaz as mesmas propriedades de estabilidade que $\varphi_t(x)$.
- No caso em que $f(x(t), b)$ também depende do parâmetro b , como na equação (2.13), se considerarmos um sistema ampliado como (2.14), então a solução $\varphi_t(x_0, b)$ pode ser considerada como a projeção da solução de (2.14) com condição inicial (x_0, b) . Desta forma, analogamente ao caso anterior, a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0, \hat{b})$ de (2.15) será a projeção da extensão de Zadeh da função $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0, \hat{b})$ (ver: Cecconello et al., 2010).

Modelos alternativos para a dinâmica do *Donax gemmula*

O modelo logístico clássico pressupõe que a população se estabilize e convirja para sua capacidade suporte K , considerando que taxa de crescimento intrínseca é dada por um parâmetro real fixo r . A equação que descreve tal modelo é dada por (Bassanezi (2002), Bassanezi e Ferreira Jr (1988)):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

e sua solução é

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}. \quad (2.17)$$

Tal modelo macroscópico é frequentemente usado, simulando os valores médios dos parâmetros com dados experimentais. Modelos mais realistas utilizam os parâmetros como funções do tempo em modelos mesoscópicos onde as soluções são mais complicadas como é o caso do modelo de *Donax gemmula* (2.1) onde, r e K são considerados periódicos

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r(t)P \left(1 - \frac{P}{K}\right) - (d(t) + \lambda f(t))P = \alpha(t)P \left(1 - \frac{P}{K(t)}\right) \\ P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.18)$$

com solução esboçada na Figura 2.

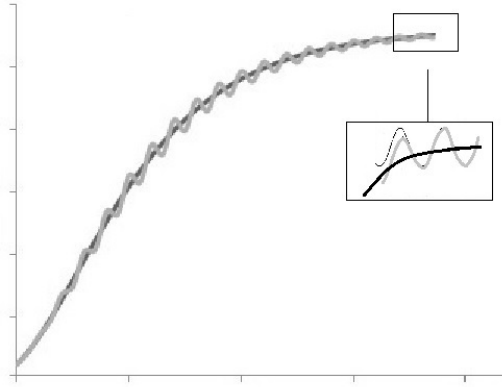


Figura 2: Modelo logístico e modelo logístico periódico.

Entretanto, tanto no modelo logístico como no logístico modificado o cálculo dos parâmetros está sempre sujeito a erros por falta de informações precisas do fenômeno analisado. Uma forma de obter soluções mais adequadas ao fenômeno é utilizar a imprecisão como fator de destaque para a obtenção dos parâmetros, considerando-os como sendo dados por números fuzzy. Assim, o modelo logístico pode ser associado ao modelo “logístico fuzzy”:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} \hat{=} \hat{r}P \left(1 - \frac{P}{\hat{K}}\right) \\ \hat{P}(0) = (\hat{P}_0, \hat{r}_0, \hat{K}_0); \hat{P}_0, \hat{r}_0, \hat{K}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.19)$$

cuja solução é dada pela extensão de Zadeh da solução de (2.16), ou seja,

$$P(t) = \frac{\hat{K}\hat{P}_0}{\hat{P}_0 + (\hat{K} - \hat{P}_0)e^{-\hat{r}t}}. \quad (2.20)$$

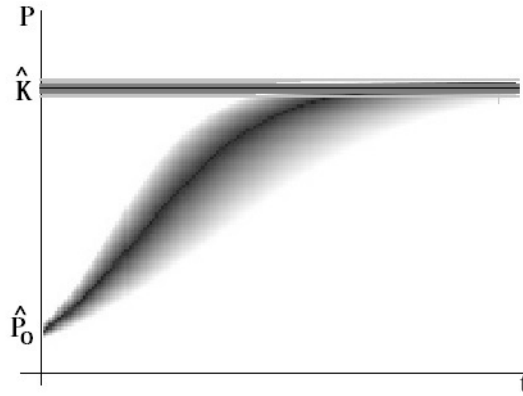


Figura 3: Projeção do gráfico da solução do modelo logístico fuzzy.

2.2.2 Periodização de parâmetros em modelos de crescimento inibido

A modelagem de qualquer fenômeno está sujeita aos objetivos a serem atendidos. Se nosso objetivo é ter apenas uma tendência geral seguida pelo fenômeno, podemos utilizar os modelos macroscópicos onde, via de regra, os parâmetros são valores médios provenientes de dados experimentais. Entretanto, se levarmos em consideração que os parâmetros também são dependentes do tempo, podemos obter modelos mais realistas e adequados ao fenômeno estudado, como no caso analisado anteriormente do *Donax gemmula*. Um outro exemplo de modelo macroscópico é obtido quando modelamos o crescimento de peixes, utilizando o modelo clássico de von Bertalanffy e não consideramos o fato que o peixe perde peso durante a piracema, período que ocorre uma vez por ano. Um modelo mais real (modelo mesoscópico) deveria considerar a taxa de crescimento intrínseco como uma função periódica (ver: Souza, 2018, p. 27). Quando o modelo macroscópico é suficiente para entender a dinâmica

de crescimento então, basta simular os coeficientes ou ajustá-los numa equação autônoma de resolução mais ou menos simples. Entretanto, se desejarmos modelos mais coerentes que levam em consideração alterações ambientais ou mesmo características próprias das espécies em questão, precisamos utilizar modelos não autônomos que, via de regra, têm resolução complicada ou somente computacional e, mesmo assim, utilizando parâmetros variáveis pouco confiáveis. Nesse caso, as “soluções exatas” obtidas destes modelos estão carregadas de subjetividade e/ou imprecisões.

Uma maneira simples de se obter “soluções” com pequenas perturbações dos parâmetros é considerar o efeito de perturbação (mudança de variável) na própria solução. Assim, se β é um parâmetro, tomamos na solução o parâmetro $\beta_p = \beta(1 + \epsilon h(t))$ onde, ϵ é a perturbação de β , agindo periodicamente por meio da função $h(t)$ periódica com $|h(t)| \leq 1$. Definição de perioditização de um modelo variacional $\mathcal{L}(\beta)$ o conjunto de funções periódicas com as propriedades anteriores.

Um modelo de crescimento inibido *perioditizado*, associado a (2.1), é denotado simbolicamente por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \cong r_p f(x, K_p)x \\ x(0) = x_0 > 0; K_p \in \mathcal{L}(\beta) \text{ e/ou } r_p \in \mathcal{L}(\beta) \end{cases} . \quad (2.21)$$

Então, se $\Phi(x_0, r, t)$ é o fluxo de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r f(x, K)x \\ x(0) = x_0 > 0; K, r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

definimos o fluxo de (2.21) por $\Phi_{\tilde{r}_p} = \Phi(x_0, \tilde{r}_p, t)$, ou seja, o fluxo do sistema periodizado é dado pela periodização do(s) parâmetro(s) do fluxo determinístico. O modelo periodizado (2.21) pode ser de três tipos distintos dependendo dos parâmetros considerados, podemos ter $r(t)$ ou $K(t)$ ou ambos pertencentes a $\mathcal{L}(\beta)$.

Teorema 2.2. *Se $K \in \mathbb{R}$ e $r_p \in \mathcal{L}(\beta)$ então o fluxo de um sistema periodizado converge para a mesma capacidade suporte K do sistema determinístico associado.*

Demonstração. Seja $K \in \mathbb{R}$ e $x_0 < K$ para todo $t > 0$ então, se $r > 0$ temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r, t) = K$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r_p, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r(1 + \epsilon h(t)), t)$.

Por outro lado, como $\Phi(x_0, r, t)$ é uma função contínua e crescente em todas suas variáveis temos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r(1 + \epsilon h(t)), t) = \Phi\left(x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} r(1 + \epsilon h(t)), t\right) = \Phi\left(x_0, r + \epsilon \lim_{t \rightarrow \infty} h(t), t\right).$$

$$\text{Como, } |h(t)| \leq 1 \Rightarrow \left| r + \epsilon \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \right| \leq r + \epsilon \Rightarrow$$

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r - \epsilon, t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r(1 + \epsilon h(t)), t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r + \epsilon, t) = K.$$

□

Teorema 2.3. *Se $K_p \in \mathcal{L}(\beta)$ e $r_p \in \mathcal{L}(\beta)$ então o fluxo de um sistema periodizado converge para a capacidade suporte K_p .*

Demonstração. Se $K_p \in \mathcal{L}(\beta)$, $r > 0$ e $0 < x_0 < K_p(t)$ para todo $t > 0$, o fluxo periodizado é limitado por K_p . Ainda, temos que o período do fluxo é o mesmo da função periódica K_p , logo, os pontos de máximo do fluxo convergem para os pontos de máximo de K_p e o mesmo acontece com os pontos de mínimo de ambas funções o que implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, r, t) = K_p(t)$ pois, dado um $\varepsilon > 0$, existe $t^* > 0$ tal que $|\Phi(x_0, r, t) - K_p(t)| < \varepsilon$ para todo $t > t^*$.

No caso em que r_{p_1} e K_{p_2} são funções periódicas de $\mathcal{L}(\beta)$ com períodos distintos $p_1 \neq p_2$, consideramos o período $p = \max\{p_1, p_2\}$, comum à ambas funções e recaímos no caso anterior. □

Exemplo 2.1. Seja o sistema determinístico inibido dado pelo modelo de von Bertalanffy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x^{\frac{2}{3}} - \beta x \\ x_0 > 0 \text{ e } K = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \end{cases} \quad (2.22)$$

cuja solução é $\Phi(\beta, t) = K \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$.

Um sistema periodizado, associado ao modelo de von Bertalanffy (2.22), denotado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \doteq \alpha x^{\frac{2}{3}} - r_p x \\ x_0 > 0, K = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \text{ e } r_p \in \mathcal{L}(\beta) \end{cases} \quad (2.23)$$

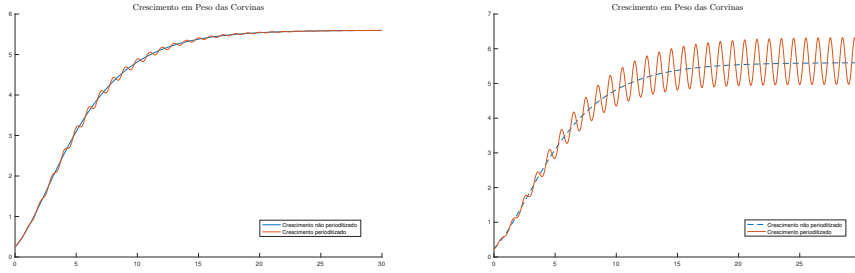
tem a sua “solução” dada por $\Phi_{r_p}(t) = K \left(1 - e^{-\frac{r_p}{3}t}\right)^3$.

No caso em que modelamos o crescimento em peso das corvinas temos a solução de (2.22) dada por

$$x(t) = 5,6 \left(1 - 0,627e^{-0,26t}\right)^{3,16}.$$

Uma solução de (2.23) perioditizada é dada por (ver: Souza, 2018, p. 30):

$$x(t) = 5,6 \left[1 - 0,627e^{-0,26(1+0,04 \cos 2\pi t)t}\right]^{3,16}.$$



(a) Capacidade suporte não periódica.

(b) Capacidade suporte periódica.

Figura 4: Soluções do modelo perioditizado de crescimento de corvina.

Observamos que, para todo sistema (2.21) tem-se um sistema não autônomo com coeficientes periódicos cuja solução é a mesma de (2.21), basta derivar sua solução. Por exemplo, no caso do modelo perioditizado de von Bertalanffy o modelo não autônomo correspondente é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(t)x^{\frac{2}{3}} - \lambda(t)x \\ x_0 > 0, \lambda = \beta' \text{ e } \beta \in \mathcal{L}(\beta) \end{cases}.$$

Exemplo 2.2. Consideremos o modelo logístico

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = 0,2P \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P_0 = 10 \text{ e } K = 100 \end{cases}$$

cuja solução é

$$P(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,2t}}.$$

Se considerarmos o crescimento intrínseco periódico dado por $r_p(t) = 0,2(1 + 0,1 \cos t)$, então teremos a perioditização da solução na forma

$$P(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,2(1+0,1 \cos t)t}}.$$

A Figura 5 e a Figura 6 mostram as soluções dos modelos logístico clássico e periodizado:

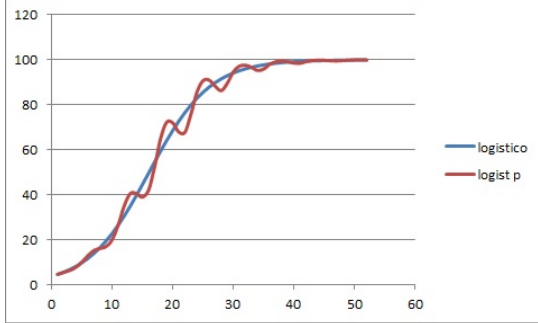


Figura 5: Soluções do modelo logístico e periódico com $K \in \mathbb{R}$.

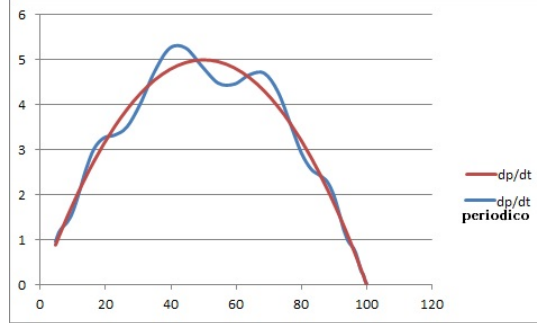


Figura 6: Variações do modelo logístico e logístico periódico.

Proposição 2.2. *A solução periodizada do modelo logístico pode ser obtida do modelo não autônomo periódico e vice-versa, isto é, dado um sistema logístico com taxa de crescimento periódico*

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha(t)P \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P_0 > 0 \text{ e } K \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

onde, $\alpha(t) \in \mathcal{L}(\beta)$, isto é, $\alpha(t) = \alpha + \epsilon h(t)$ com $h(t)$ periódica e $|h(t)| \leq 1$, basta considerar na solução do sistema periodizado a mudança de $h(t)$ por $\int_{t_0}^t h(s)ds$.

Demonstração. Separando as variáveis e integrando a equação membro-a-membro temos,

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int (\alpha + \epsilon h(t))dt \Rightarrow \ln \left| \frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{K}} \right| = \alpha t + \epsilon \int_{t_0}^t h(s)ds + C.$$

Para $t = 0$, temos

$$C = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}} \right| = \ln \left| \frac{P_0 K}{K - P_0} \right|.$$

Portanto,

$$\ln \left| \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} \right| = \alpha t + \epsilon \int_{t_0}^t h(s) ds \Rightarrow \frac{P}{K - P} = \frac{P_0}{K - P_0} \exp \left(\alpha t + \epsilon \int_{t_0}^t h(s) ds \right).$$

Explicitando $P(t)$ vem

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) \exp \left[- \left(\alpha t + \epsilon \int_{t_0}^t h(s) ds \right) \right]}.$$

□

No modelo logístico se a capacidade suporte é periódica, isto é, se $K = K_p \in \mathcal{L}(\beta)$ então a “solução” perioditizada é bem mais simples de ser obtida do que por meio da solução de um modelo variacional com parâmetro periódico. Se supormos, no modelo anterior que $K_p = 100(1 + 0,03 \cos t)$, $P_0 = 10$ e $\alpha = 0,2$, a solução perioditizada vem dada por (Figura 7)

$$P(t) = \frac{100(1 + 0,03 \cos t)}{1 + \left[\frac{100(1 + 0,03 \cos t)}{10} - 1 \right] e^{-0,2t}}.$$

Se considerarmos também que $\alpha = 0,2(1 + 0,1 \cos t)$, a função vem dada pela Figura 8.

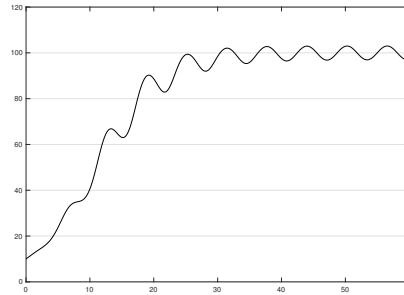
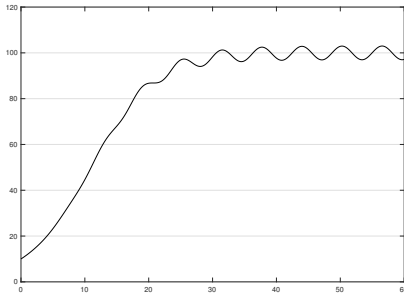


Figura 7: Solução do modelo logístico com capacidade de suporte periódica.

Figura 8: Taxa de crescimento e capacidade suporte periódicos.

Finalmente, podemos considerar a *solução fuzzy de um sistema perioditizado* como sendo a extensão de Zadeh da solução logística perioditizada, isto

é,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} \cong \widehat{r}_p P \left(1 - \frac{P}{\widehat{K}_p}\right) \\ \widehat{P}(0) = (\widehat{P}_0, \widehat{r}_0, \widehat{K}_0) \end{cases} \quad (2.24)$$

onde, $\widehat{P}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\widehat{r}_p, \widehat{K}_p$ são funções periódicas fuzzy, obtidas da fuzzificação dos parâmetros de $r_p(t)$ e $K_p(t)$. Logo,

$$\widehat{P}(t) = \frac{\widehat{K}_p(t)\widehat{P}_0}{\widehat{P}_0 + (\widehat{K}_p(t) - \widehat{P}_0) e^{-\widehat{r}_p(t)t}} \quad (2.25)$$

onde, $K_p(t) = K(1 + \epsilon_1 h_1(t))$ e $r_p(t) = r(1 + \epsilon_2 h_2(t))$, com $h_{1,2}(t)$ funções periódicas e $\widehat{P}_0, \widehat{r}_p, \widehat{K}_p \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

No caso do modelo do *Donax gemmula*, obtemos a solução esboçada na Figura 9.

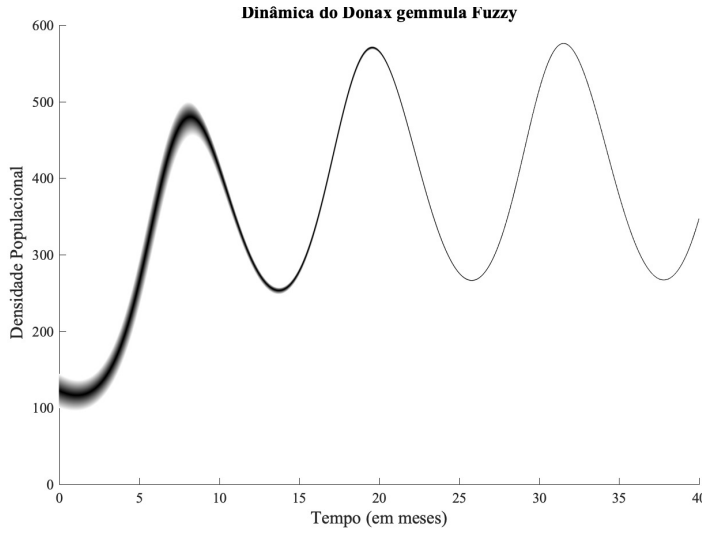


Figura 9: Gráfico da solução (2.25) com P_0 fuzzy e r_p, K_p periodizados.

Observamos que, do fato de se ter o resultado do Teorema 2.2 e Teorema 2.4 então, o Teorema 2.1 vale também para os sistemas periodizados (ou periódicos equivalentes) associados aos modelos fuzzy correspondentes.

Teorema 2.4. *Sejam os modelos inibidos clássicos e os periódicos correspondentes:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), r, K) = rxF(x, K) \\ x(0) = x_0 \text{ e } r, K \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_p x F(x, K) \\ x(0) = \hat{x}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), K \in \mathbb{R} \text{ e } r_p \in \mathcal{L}(\beta) \end{cases}$$

O estado de equilíbrio K é o mesmo para os dois sistemas e mantém as mesmas características de estabilidade em ambos modelos determinístico e fuzzy periodizado. Se $K_p(t)$ é um equilíbrio periódico assintótico para o modelo periódico determinístico então a extensão de Zadeh $K_p(t)$ será uma curva de equilíbrio para o modelo fuzzy correspondente.

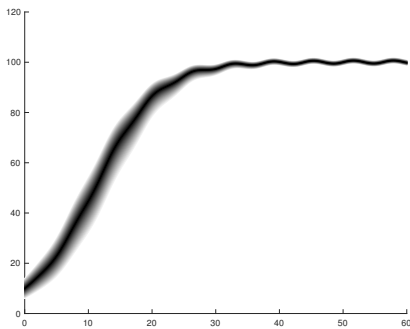


Figura 10: Solução do modelo logístico com condição inicial fuzzy e capacidade de suporte periódica fuzzy.

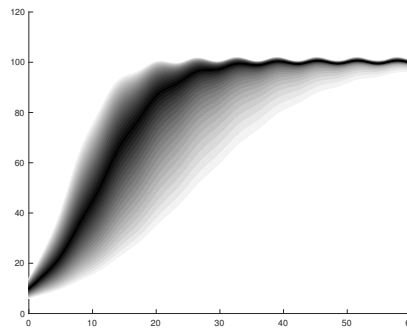


Figura 11: Taxa de crescimento e capacidade suporte periódicos fuzzificados e condição inicial fuzzy.

Referências

- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Ed. Contexto, São Paulo.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1988). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, São Paulo.
- Cecconello, M. S., Silva, J. D. M., e Bassanezi, R. C. (2010). *Sistemas dinâmicos fuzzy: modelagens alternativas para sistemas biológicos*, volume 50 of *Notas em Matemática Aplicada*. SBMAC.

- Cushing, J. M. (1977). Stable positive periodic solutions of the time-dependent logistic equation under possible hereditary influences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 60(3):747–754.
- Mizukoshi, M., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2009). Stability of fuzzy dynamic systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(1):69–83.
- Paes, E. T., Blinder, P. B., e Bassanezi, R. C. (1992). O meio ambiente como fator de predação: um estudo populacional de *donax gemmula*. *Biomatemática*, (2):134–142.
- Souza, S. D. (2018). *Estoque e controle de peixe na amazôniva*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Zotin, R. e Bassanezi, R. C. (1993). Modelo em dinâmica populacional com parâmetros periódicos. *Biomatemática*, (3):170–195.