Biomatemática ***29*** *(2019), 81–92* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Estudo do modelo presa-predador com retardo

Rosana S.M. Jafelice[1],
FAMAT – UFU, 38.408-902, Uberlândia/MG.

Laécio C. Barros[2], Rodney C. Bassanezi[3],
IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Neste trabalho estudamos um modelo presa-predador, considerando inicialmente retardo na população das presas que beneficia a biomassa dos predadores. Em seguida, estudamos a estabilidade desse novo modelo com retardo. Construímos um segundo modelo que também considera retardo no crescimento das presas e o estudo da estabilidade nessa outra situação. Por fim, usamos a noção de número fuzzy para modelar possíveis incertezas no parâmetro que representa o retardo nos modelos estudados. Encerramos o artigo fazendo análises do modelo fuzzy obtido.

Palavras-chave: *Presa-predador; estabilidade; conjuntos fuzzy; retardo.*

1. Introdução

As equações diferenciais com retardo modelam fenômenos que envolvem um lapso de tempo entre causa e efeito. Do ponto de vista das aplicações, o interesse destas equações está no fato que muitos fenômenos naturais, notadamente biológicos, têm a necessidade de se considerar períodos de incubação ou de gestação correspondendo a um retardo temporal entre causa e efeito (Volterra, 1928). Desta forma, para estes fenômenos, modelos descritos por equações com retardo temporal são considerados adequados.

Nos modelos descritos por equações diferenciais com retardamento, em muitos casos, o retardo é um parâmetro incerto. No estudo da dinâmica do HIV, tradicionalmente, tais incertezas têm sido modeladas por meio de métodos

[1]rmotta@ufu.br
[2]laeciocb@ime.unicamp.br
[3]rodney@ime.unicamp.br

estatísticos. Mittler et al. (1998) assumem que o retardo é dado por distribuição de probabilidade. No entanto, nas últimas décadas, também a teoria dos conjuntos fuzzy tem contribuído significativamente na modelagem matemática de fenômenos incertos. Esse é o caso do estudo sobre a dinâmica do HIV, feito em (Jafelice et al., 2014), em que o retardo é modelado como sendo um parâmetro fuzzy.

Neste trabalho, estudamos o modelo presa-predador incorporando retardo fuzzy em cada equação do sistema presa-predador clássico.

2. Objetivos

O famoso modelo de Lotka-Volterra de interação presa-predador é (Bassanezi e Ferreira, 1988):

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = b_1 N_1(t) - a_{12} N_1(t) N_2(t) \\ \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -b_2 N_2(t) + a_{21} N_1(t) N_2(t), \qquad b_i > 0 \;\; e \;\; a_{ij} > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

em que N_1 é o número de presas, N_2 é o número de predadores, b_1 é a taxa de crescimento das presas, a_{12} é a taxa de conversão (correlacionada com a probabilidade de captura da presa), b_2 é a taxa de mortalidade do predador e a_{21} é a taxa de conversão do alimento em predador. No modelo clássico presa-predador de Lotka-Volterra (2.1) o efeito dos predadores sobre as presas é essencialmente instantâneo. Pretendemos estudar os modelos presa-predador modificados assumindo que em muitas interações entre espécies a resposta do predador pode ser atrasado com relação ao contato com a presa. Também, podemos considerar retardo em relação ao período de gestação das presas.

O objetivo deste trabalho é:

- Estudar a estabilidade do modelo presa-predador quando consideramos retardo na conversão da presa em alimento do predador;
- Estudar a estabilidade do modelo presa-predador quando consideramos retardo no crescimento das presas e na sua conversão, como alimento em predador;
- Considerar nos dois modelos estudados anteriormente, o retardo como um parâmetro fuzzy.

3. Fundamentação teórica das equações diferenciais com retardo

Consideremos o espaço vetorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$ sobre os reais com norma euclidiana $\|\cdot\|$, $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínuas, munido da norma do supremo e $r \geq 0$ um número real dado.

Seja $[a,b] = [-r,0]$ e $C = C([-r,0],\ \mathbb{R}^n)$, cuja norma de um elemento $\phi \in C$ é dada por:

$$\|\phi\| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \|\phi(\theta)\|.$$

Definição 1 *Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C([\tau - r, \tau + A],\mathbb{R}^n) = C$. Para cada $t \in [\tau, \tau + A]$, definimos a função $x_t \in C$ por:*

$$x_t(\theta) = x(t+\theta),$$

sendo $-r \leq \theta \leq 0$ (Hale, 1971).

Definição 2 *Sejam $D \subset \mathbb{R} \times C$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, "$\cdot$"representando a derivada à direita em relação a t. A equação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{3.2}$$

é dita uma equação diferencial funcional com retardamento sobre D e será denotada por EDFR. Se desejarmos enfatizar que a equação é definida por f, escrevemos EDFR(f).

A equação (3.2) inclui como caso particular, as equações diferenciais ordinárias. Basta para isto tomar $r = 0$.

4. Fundamentação teórica dos conjuntos fuzzy

Um *subconjunto fuzzy* F do conjunto universo $\mathcal{U}$ é definido em termos de uma função de *pertinência* u que a cada elemento x de $\mathcal{U}$ associa um número $u(x)$, entre *zero* e *um* chamado de grau de pertinência de x a F. Assim, o conjunto fuzzy F é simbolicamente indicado por sua função de pertinência (Barros e Bassanezi, 2010)

$$u_F : \mathcal{U} \to [0,1]\,.$$

Os valores $u_{\mathcal{F}}(x) = 1$ e $u_{\mathcal{F}}(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a $\mathcal{F}$.

É interessante notar que um subconjunto clássico A de $\mathcal{U}$ é um particular conjunto fuzzy para o qual a função de pertinência é a função característica de A, isto é,

$$u_A : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Suporte de um conjunto fuzzy $\mathcal{F}$ são todos os elementos de $\mathcal{U}$ que têm grau de pertinência diferente de zero em $\mathcal{F}$ e denotamos por supp($\mathcal{F}$). Se $\mathcal{F}$ for um conjunto em $\mathbb{R}$, seu suporte é um intervalo fechado $[a, b]$.

Sejam X e Y conjuntos e f uma aplicação de X em Y: $f : X \longrightarrow Y$. Seja A um conjunto fuzzy em X. O Princípio de Extensão de Zadeh afirma que a imagem de A pela função f é um conjunto fuzzy $B = f(A)$ em Y, cuja função de pertinência é dada por

$$u_B(y) = \sup_{\{x: f(x) = y\}} u_A(x). \tag{4.3}$$

O Princípio de Extensão de Zadeh pode ser descrito da seguinte forma:

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem.

- Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo *sup* dos graus de pertinência dos valores da entrada.

5. Modelo presa-predador com retardo na equação dos predadores

O primeiro modelo presa-predador com retardo estudado é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = b_1 N_1(t) - a_{12} N_1(t) N_2(t) \\ \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -b_2 N_2(t) + a_{21} N_2(t) N_1(t - T) \end{cases} \tag{5.4}$$

em que $T > 0$ é o retardo.

5.1. Estudo da estabilidade

Os pontos de equílibrio de (5.4) são $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_1}{a_{12}})$, os mesmos pontos de equílibrio do sistema (2.1).

De fato: Supondo que N^* é um ponto de equílibrio de uma equação diferencial sem retardo então $N^* = N(t)$ para todo t, ou ainda, $N^* = N(t-s)$ para qualquer t e s. Logo, N^* é ponto de equílibrio de uma equação diferencial com retardo em N.

O sistema de equações diferenciais com retardo (5.4) é quase linear e podemos estudar a estabilidade dos pontos de equílibrio através da matriz jacobiana. Para o ponto de equílibrio $P_2 = (\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_1}{a_{12}})$ a equação obtida para os autovalores é:

$$\lambda^2 + b_1 b_2 \beta = 0 \tag{5.5}$$

sendo $\beta = \frac{dN_1(t-T)}{dN_1}$.

- Se $\beta < 0$ então os autovalores são reais com sinais contrários, logo, $P_2 = (\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_1}{a_{12}})$ é ponto de sela.

- Se $\beta > 0$ os autovalores são complexos puros, logo, P_2 é centro.

A figura 1 apresenta o gráfico da solução determinística do sistema (5.4) com $T = 1$, com as condições iniciais $N_1(0) = 15$ e $N_2(0) = 5$; e com os valores dos parâmetros $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.05$, $a_{12} = 0.01$ e $a_{21} = 0.001$.

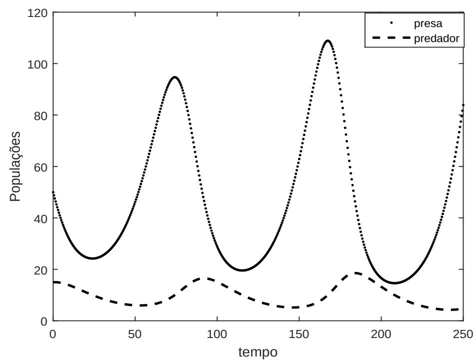

Figura 1: Gráfico da solução do sistema (5.4) com $T = 1$.

6. Modelo presa-predador com retardo fuzzy na equação dos predadores

O modelo presa-predador com retardo fuzzy na equação dos predadores é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = b_1 N_1(t) - a_{12} N_1(t) N_2(t) \\ \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -b_2 N_2(t) + a_{21} N_2(t) N_1(t-T) \end{cases} \tag{6.6}$$

com T sendo um número fuzzy triangular apresentado na figura 2.

A partir da solução numérica da equação diferencial com retardo (6.6), consideramos o retardo T como um parâmetro fuzzy triangular, ilustrado na figura 2.

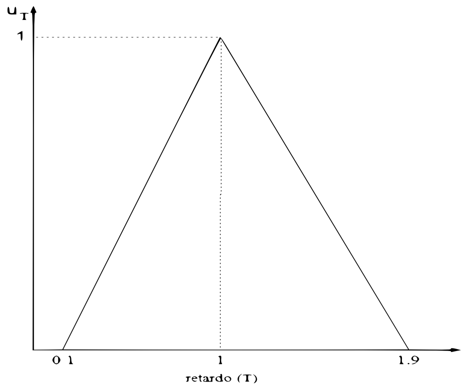

Figura 2: Parâmetro fuzzy (T).

A função de pertinência de $T = (0.1; 1; 1.9)$ é dada por (Barros e Bassanezi, 2010):

$$u_T(T) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad T \leq 0.1 \\ \frac{1}{0.9}(T - 0.1) & \text{se} \quad 0.1 < T \leq 1 \\ -\frac{1}{0.9}(T - 1.9) & \text{se} \quad 1 < T \leq 1.9 \\ 0 & \text{se} \quad T > 1.9 \end{cases} \tag{6.7}$$

O suporte do número fuzzy é dado por $[0.1, 1.9]$. A figura 3 apresenta a solução numérica do sistema (6.6), obtida atráves do Princípio da Extensão de Zadeh da solução determinística para T como parâmetro fuzzy triangular com suporte no intervalo $0.1 \leq T \leq 1.9$, para cada instante t fixo. Observa-se que na região central o grau de pertinência aproxima-se de 1. Esta região é a que melhor representa o fenômeno biológico do ponto de vista de credibilidade (pertinência).

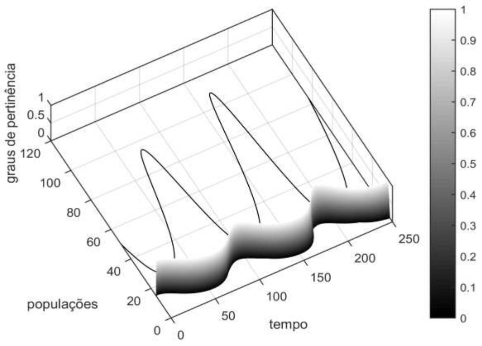

Figura 3: Gráfico da solução do sistema (6.6) com $T = (0.1; 1; 1.9)$.

7. Modelo presa-predador com retardo

O segundo modelo presa-predador com retardo estudado é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = b_1 N_1(t-T) - a_{12} N_1(t) N_2(t) \\ \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -b_2 N_2(t) + a_{21} N_2(t) N_1(t-T) \end{cases} \tag{7.8}$$

em que $T > 0$ é o retardo.

7.1. Estudo da estabilidade

Os pontos de equílibrio são $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_1}{a_{12}})$, os mesmos pontos de equílibrio do sistema (2.1). Para o ponto de equílibrio $P_2 = (\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_1}{a_{12}})$ a equação obtida para os autovalores é:

$$\lambda^2 - (b_1\beta - b_1)\lambda + b_1 b_2 \beta = 0 \tag{7.9}$$

sendo $\beta = \frac{dN_1(t-T)}{dN_1}$. Os autovalores são dados por:

$$\lambda = \frac{(b_1\beta - b_1) \pm \sqrt{(b_1\beta - b_1)^2 - 4b_1 b_2 \beta}}{2}. \tag{7.10}$$

Estudamos o sinal do $\Delta = (b_1\beta - b_1)^2 - 4b_1b_2\beta$ da equação (7.10), que é uma equação de segundo grau na variável β. A equação

$$(b_1\beta - b_1)^2 - 4b_1b_2\beta = 0 \tag{7.11}$$

tem o valor do delta positivo, logo, a concavidade da parábola é para cima e os valores de β são:

$$\beta_1 = \frac{2b_1^2 + 4b_1b_2 - \sqrt{16b_1^3b_2 + 16b_1^2b_2^2}}{2b_1^2}.$$

$$\beta_2 = \frac{2b_1^2 + 4b_1b_2 + \sqrt{16b_1^3b_2 + 16b_1^2b_2^2}}{2b_1^2}.$$

Temos vários casos para estudar a estabilidade do ponto de equílibrio dependendo dos autovalores.

- Se $\beta = \beta_1$ então o valor do delta da equação (7.11) é nulo. Neste caso, temos;
  - Se $\beta = \beta_1 = 1$ os autovalores da equação (7.9) são iguais a zero.
  - Se $\beta = \beta_1 < 1$ ou $\beta = \beta_1 > 1$ os autovalores são negativos ou positivos, respectivamente, temos um ponto de equílibrio impróprio.
- Se $\beta = \beta_2$ então o valor do delta da equação (7.11) é nulo. Neste caso, temos;
  - Se $\beta = \beta_2 = 1$ os autovalores da equação (7.9) são iguais a zero.
  - Se $\beta = \beta_2 < 1$ ou $\beta = \beta_2 > 1$ os autovalores são negativos ou positivos, respectivamente, temos um ponto de equílibrio impróprio.
- Se $\beta < \beta_1$ ou $\beta > \beta_2$ então o valor do delta da equação (7.11) é positivo. Os autovalores da equação (7.9) são reais. Estudamos alguns casos para os autovalores:
  - Se $\beta < \beta_1$ e $\beta < 0$ então os autovalores da equação (7.9) tem sinais contrários e o ponto de equílibrio é ponto de sela.
  - Se $\beta < \beta_1$ e $0 < \beta < 1$ então os autovalores da equação (7.9) são negativos e o ponto de equílibrio é estável.
  - Se $\beta < \beta_1$ e $\beta > 1$ então os autovalores da equação (7.9) são positivos e o ponto de equílibrio é instável.

- Se $\beta > \beta_2$ e $\beta < 0$, então os autovalores da equação (7.9) tem sinais contrários e o ponto de equílibrio é ponto de sela.
- Se $\beta > \beta_2$ e $0 < \beta < 1$ então os autovalores da equação (7.9) são negativos e o ponto de equílibrio é estável.
- Se $\beta > \beta_2$ e $\beta > 1$ então os autovalores da equação (7.9) são positivos e o ponto de equílibrio é instável.

- Se $\beta_1 < \beta < \beta_2$ então o valor do delta da equação (7.11) é negativo. Os autovalores da equação (7.9) são complexos. Estudamos alguns casos para os autovalores:
  - Se $\beta_1 < \beta < \beta_2$ e $\beta = 1$ então o ponto de equílibrio é centro.
  - Se $\beta_1 < \beta < \beta_2$ e $\beta < 1$ então o ponto de equílibrio é estável.
  - Se $\beta_1 < \beta < \beta_2$ e $\beta > 1$ então o ponto de equílibrio é instável.

A figura 4 apresenta o gráfico da solução do sistema sem retardo (2.1) e o gráfico da solução do sistema com retardo (7.8) com $T = 1$. Pelo comportamento das soluções podemos observar como o retardo, que ocorre nos fenômenos biológicos, modifica a solução do sistema (2.1).

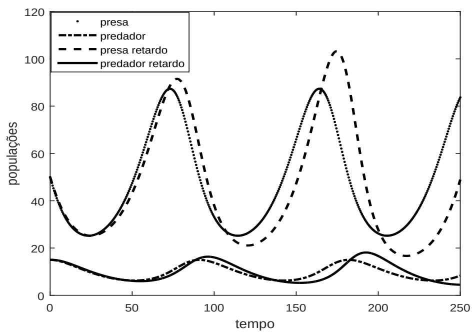

Figura 4: Gráfico da solução do sistema sem retardo (2.1) e do sistema com retardo (7.8).

8. Modelo presa-predador com retardo fuzzy

O modelo presa-predador com retardo fuzzy é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = b_1 N_1(t-T) - a_{12} N_1 N_2 \\ \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -b_2 N_2 + a_{21} N_2 N_1(t-T) \end{cases} \tag{8.12}$$

com $T = (0.1; 1; 1.9)$ sendo um número fuzzy triangular apresentado na figura 2. O suporte do número fuzzy é dado por $[0.1, 1.9]$. Obtemos a solução fuzzy do sistema (8.12) utilizando o Princípio da Extensão de Zadeh da solução determinística com o parâmetro fuzzy T em cada instante t fixo, veja figura 5. O gráfico do plano de fase do sistema (8.12) é apresentado na figura 6.

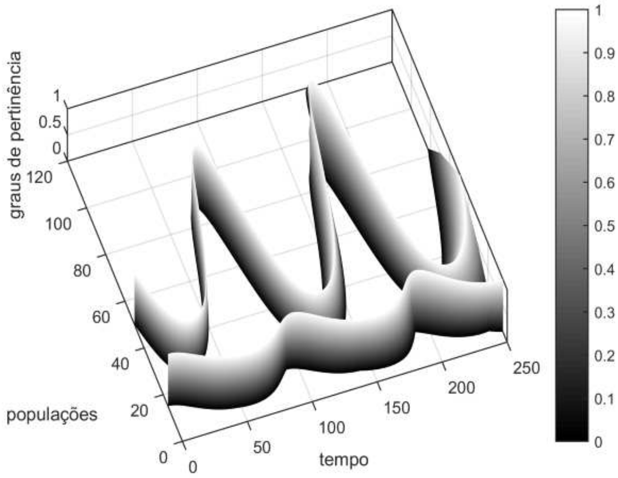

Figura 5: Gráfico da solução do sistema (8.12).

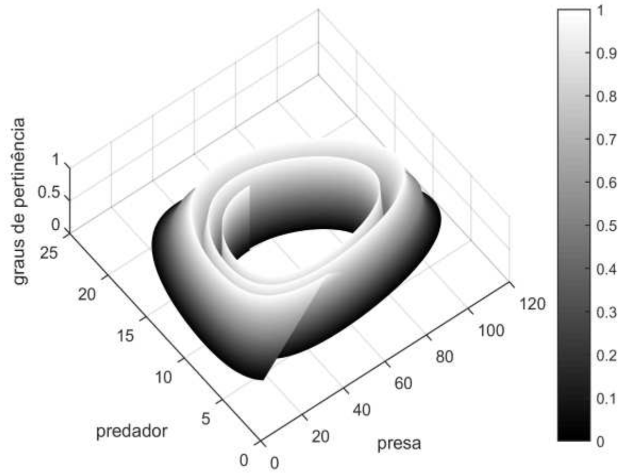

Figura 6: Plano de fase do sistema (8.12).

A solução fuzzy do sistema (8.12) foi defuzzificada pelo centro de gravidade em cada instante t. Na figura 7 apresentamos os gráficos da solução defuzzificada do sistema (8.12) e a solução determinística com $T = 1$.

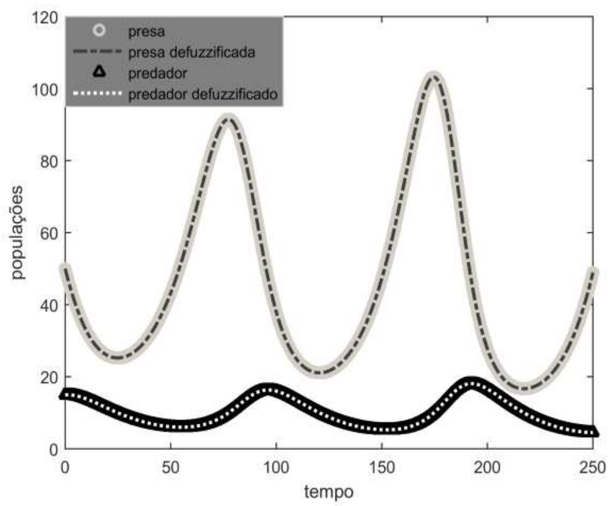

Figura 7: Solução defuzzificada do sistema (8.12).

9. Conclusão

Os pontos de equílibrio dos sistemas de equações diferenciais com retardo (5.4) e (7.8) apresentam os mesmos pontos de equílibrio do sistema de equações diferenciais sem retardo (2.1), pois não dependem do retardo T. Consequentemente, os sistemas de equações diferenciais com retardo fuzzy (6.6) e (8.12) têm os mesmos pontos de equílibrio de (2.1). Os gráficos das soluções destes sistemas são apresentados por faixas, cuja a região central tem o grau de pertinência que proxima-se de 1, representando melhor o fenômeno biológico do ponto de vista de credibilidade, pois considera possíveis "tolerância" no valor do retardo biológico em questão.

Agradecimentos

O segundo autor agradece o CNPq pelo auxílio financeiro (Processo n^{o} 306546/2017-5).

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2010). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Coleção Textos Didáticos - volume 5. IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.

Bassanezi, R. C. e Ferreira, W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. Ed. Harbra Ltda, S. Paulo.

Hale, J. (1971). *Functional Differential Equations - Appl. Math. Sci.*, volume 3. Springer-Verlag.

Jafelice, R. S. M., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2014). Study of the dynamics of HIV under treatment considering fuzzy delay. *Computational & Applied Mathematics*, 33:45–61.

Mittler, J., Sulzer, B., Neumann, A., e Perelson, A. (1998). Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. *Mathematical Biosciences*, 152:143–163.

Volterra, V. (1928). Sur la théorie mathématique des phénomènes hérèditaires. *J. Math. Pures Appl.*, 7:248–298.