Biomatemática ***29*** *(2019), 69–80* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Modelo epidemiológico para a aids em Manaus-AM com a solução interativa fuzzy

Luís E. S. Lopes[1], Roberto A. C. Prata[2]
Dept° Matemática, ICE – UFAM, 69.080-005, Manaus/AM.

Resumo. Neste trabalho apresentamos um modelo matemático epidemiológico para a aids na cidade de Manaus, capital do Amazonas, entre 2009 e 2014. A partir da observação do alto número de casos infectados pelo vírus HIV concentrado na cidade e uma elevada taxa de letalidade, verificamos a necessidade de analisar o aumento de casos desta doença. Para isso, utilizamos o modelo SI que divide a população em suscetível e infectado e as interações compartimentais foram modeladas por um sistema de equações diferenciais com os dados dos casos confirmados da aids em Manaus, fornecido pela Fundação de Vigilância em Saúde. Com isso, descobrimos o valor da taxa de transmissão da doença e a solução da equação do modelo, em seguida estabelecemos a solução interativa fuzzy que auxiliaram na análise da cidade que apresentou um crescimento de pessoas contaminadas pela aids.

Palavras-chave*: SI; epidemiologia; aids; interatividade fuzzy.*

1. Introdução

Segundo o Ministério da Saúde (Ministério da Saúde, 2019), a aids ou síndrome da imunodeficiência adquirida é uma doença infecto-contagiosa causada pelo vírus HIV (sigla em inglês do Vírus da Imunodeficiência Humana), que atacam as células fundamentais para a imunidade do corpo humano. O vírus é capaz de alterar o DNA das células linfócitos T CD4+ e fazer cópias de si mesmo. Depois de se multiplicar, rompe os linfócitos em busca de outros para continuar a infecção.

[1]luisdrd.80@gmail.com
[2]praroberto@gmail.com

A transmissão do HIV e, por consequência da aids, ocorre pelas relações sexuais desprotegidas, pelo uso de seringas contaminadas feito por mais de uma pessoa, por transfusão de sangue contaminado, por instrumentos que furam ou cortam não esterilizados, de mãe para filho durante a gravidez e a amamentação. A aids ainda não tem cura, mas existe tratamento capaz de controlar a síndrome. No Brasil, o Amazonas aparece em terceiro lugar no ranking dos estados brasileiros com uma das maiores casos confirmados de HIV. E Manaus ocupa a quarta posição na lista das capitais brasileiras com os maiores números de infectados pelo vírus, apontam a Organização das Nações Unidas (ONU, 2018).

Uma ferramenta que auxilia esse estudo é a modelagem matemática em epidemiologia. Esta baseia-se em transformar situações reais em modelos matemáticos que, após analisados, proporciona resultados que podem ser interpretados e aplicados na realidade. Deste modo, utilizamos o modelo SI (suscetível-infectado) com os dados das taxas de detecção do vírus HIV/AIDS da cidade de Manaus, capital do Amazonas, para analisar o comportamento da doença entre os anos de 2009 e 2014.

Para isso, apresentamos a formulação do modelo SI e sua análise, com o intuito de encontrar o parâmetro e a solução do modelo. Em seguida, abordamos a situação da doença na cidade estudada e a simulação com dados reais. Além dos tópicos abordados, constam neste trabalho os conceitos básicos e interatividade entre números fuzzy com sua solução interativa.

2 Objetivos

Os objetivos desse trabalho foram:

- Estudar o comportamento dos casos confirmados de aids em Manaus, a partir de uma análise do modelo SI.
- Estabelecer uma solução interativa fuzzy para os infectados registrados pelo vírus HIV em Manaus.

3 Modelo SI

O modelo matemático estudado é do tipo SI, permitindo analisar somentes os indivíduos que contraem a doença e não voltam a classe dos suscetíveis, ver Marcolino (2008). Esses indivíduos infectados estão ativos para transmitirem a doença, ou seja, são infecciosos. Este é o que melhor descreve a aids causada pelo vírus HIV, uma doença que ainda não existe cura.

Consideramos uma população total de humanos (N) constante e sem dinâmica vital, isto é, não são considerados o número de nascimentos e nem de mortes. A população é subdividida em duas classes de estado: as dos indivíduos suscetíveis (S) e as dos indivíduos infectados (I), assim $N = S + I$. Consideramos também α o coeficiente de transmissão da doença. Portanto, temos as seguintes equações diferenciais que descrevem o modelo SI:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI \end{cases} \tag{3.1}$$

com $\alpha > 0$.

Note que se $N(t) = S(t) + I(t)$ é constante, então $\frac{dN}{dt} = 0$ e se $N(t) = 1$, para todo $t \geq 0$, então pode-se escrever:

$$S(t) = 1 - I(t), \forall t \tag{3.2}$$

Substituindo a equação (3.2) na segunda equação do sistema (3.1), obtém-se a densidade de infectados através da equação

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha(1 - I)I \\ I_0 = \text{ dado} \end{cases} \tag{3.3}$$

Separando as variáveis da primeira equação do sistema (3.3), temos:

$$\frac{dI}{(1 - I)I} = \alpha dt \tag{3.4}$$

Resolvendo a equação (3.4) pelo método de separação de variáveis, obtemos:

$$\int \frac{1}{I} dI + \int \frac{1}{1 - I} dI = \int \alpha dt \tag{3.5}$$

Resultando em

$$I = \frac{e^{\alpha t + c}}{1 + e^{\alpha t + c}} \tag{3.6}$$

em que c é a constante de integração.

Com as condições iniciais, $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ e, fazendo $S_0 = 1 - I_0$, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{e^c}{1+e^c} &\Longrightarrow\\
I_0(1+e^{\alpha t+c}) &= e^{\alpha t+c} &\Longrightarrow\\
e^c &= \frac{I_0}{1-I_0} &\Longrightarrow\\
e^c &= \frac{I_0}{S_0}
\end{aligned}$$

Substituindo e^c na expresção (3.6):

$$I(t) = \frac{e^{\alpha t} \times \dfrac{I_0}{S_0}}{1 + e^{\alpha t} \times \dfrac{I_0}{S_0}} \tag{3.7}$$

Portanto, a solução analítica I é dada por:

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\alpha t}}{S_0 + I_0 e^{\alpha t}} \tag{3.8}$$

Daí também encontramos a solução analítica para os suscetíveis, usando (3.2) e (3.8), logo:

$$\begin{aligned}
S(t) &= 1 - I(t) &\Longrightarrow\\
S(t) &= 1 - \frac{I_0 e^{\alpha t}}{S_0 + I_0 e^{\alpha t}} &\Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$S(t) = \frac{S_0}{S_0 + I_0 e^{\alpha t}} \tag{3.9}$$

Podemos observar que quando $t \to \infty$ temos que $I(t) = 1$ e $S(t) = 0$. Logo, por essa informação observada toda a população será infectada, isto é, haverá uma epidemia.

4. A situação da aids em Manaus

Os índices de infectados do HIV em todo o Brasil são motivos de grande preocupação, principalmente nos âmbitos estruturais e de saúde. Sabemos que a região norte é uma das que mais sofrem com a falta de serviços públicos de saúde, assim, um estudo epidemiológico nesta região é de suma importância devido a carência da população. Com isso, demos ênfase na cidade de Manaus, capital do Amazonas, que teve suas altas variações em relação aos casos de aids. Segue abaixo os dados do número de casos de infectados pelo vírus HIV em Manaus entre os anos de 2009 e 2014, conforme em Fundação de Vigilância em Saúde (2019).

Tabela 1: Números de infectados e suscetíveis da aids em Manaus entre os anos de 2009 e 2014.

Ano	Número de Infectados	Número de Suscetíveis
2009	229	1.738.412
2010	551	1.802.463
2011	599	1.831.825
2012	674	1.861.164
2013	957	1.981.222
2014	988	2.019.313

A Tabela 1 apresenta o número de infectados e uma estimativa do número de suscetíveis por HIV/AIDS, fornecidos pela Fundação de Vigilância em Saúde (Fundação de Vigilância em Saúde, 2019).

Figura 1: População da Cidade de Manaus Infectada pelo Vírus HIV

Na Figura 1 temos a ilustração dos casos confirmados da aids em Manaus dos anos de 2009 a 2014, obtida pelos comandos do Microsoft Office Excel. Note o crescimento de pessoas infectadas pelo vírus HIV em um intervalo de 6 anos na capital amazonense.

Durante esses anos o estado do Amazonas apresentou um índice de infecciosidade bastante elevado. E, em Manaus, concentrou a maior incidência de contaminação e apenas seis dos 62 municípios não registraram novos casos de HIV, conforme Fundação de Vigilância em Saúde (2019). No estado, a maior concentração de infectados por HIV estava entre 20 e 35 anos de idade, sendo o maior público homens jovens e heterossexuais, apesar de existirem pessoas que temeram informar a orientação sexual.

Esse aumento do número de casos foi de encontro a ampliação da oferta de diagnósticos de teste rápido para HIV, sendo o atendimento descentralizado para o diagnóstico e visou a crescer mais ainda o número de casos, alertou Fundação de Vigilância em Saúde (2019), pelo fato de muitas pessoas não saberem de terem aids. Atualmente o teste leva entorno de 15 minutos, enquanto antes demorava quase 10 dias para realizar o exame. Essa rapidez no diagnóstico é uma vantagem para reduzir o número de óbitos, pois as pessoas infectadas podem iniciar de imediato o tratamento, controlando a doença.

De acordo com a Tabela 1 durante os anos de 2009 a 2014 foram registrados 3.998 infectados e 11.234.399 suscetíveis. Então, os valores proporcionais são $I_0 = 666,3$ e $S_0 = 1.872.399,8$.

5. Simulação com dados reais em Manaus

Temos como objetivo obter a solução numérica do modelo proposto com dados reais. Para isso, será preciso determinar o parâmetro α.

O parâmetro α é fundamental em modelos que estudam doenças infecto-contagiosas, uma vez que determina eventuais crescimentos de indivíduos infectados. Para estimar o valor de α, foi preciso aplicar a técnica de análise de regressão linear ao gráfico da Figura 1 com o intuito de observar a relação entre o número de infectados e o tempo, essa técnica foi utilizada por Falcão et al. (2017).

Ao obter a reta de regressão linear, dada por $y = ax + b$, calculamos o α.

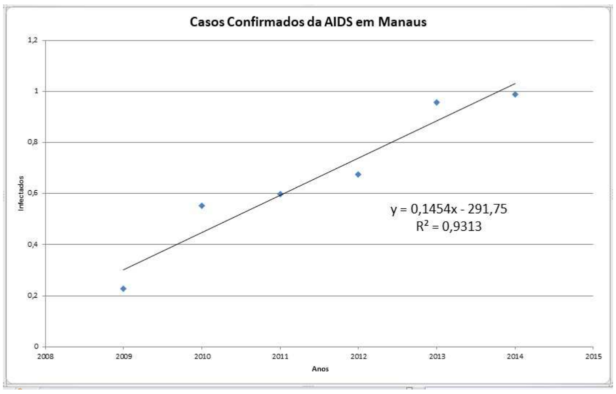

Figura 2: População da Cidade de Manaus Infectada pelo Vírus HIV e a Reta de Regressão Linear.

Assim, definimos a reta de regressão linear, sendo o coeficiente angular a uma estimativa para o valor referente ao parâmetro α (ver Figura 2).

$$y = 0,1454x + 291,75 \tag{5.10}$$

Logo, temos o valor da taxa de transmissão da doença:

$$\alpha = 0,1454 \tag{5.11}$$

Com esses dados obtivemos as equaçõs das soluções das populações infectada e suscetível de Manaus, respectivamente:

$$I(t) = \frac{0,6663e^{0,1454t}}{1.872,399 + 0,6663e^{0,1454t}} \tag{5.12}$$

$$S(t) = \frac{1.872,399}{1.872,399 + 0,6663e^{0,1454t}} \tag{5.13}$$

E, a partir das equações (5.12) e (5.13), foi possível plotar o gráfico da solução do modelo ilustrado conforme a Figura 3 abaixo.

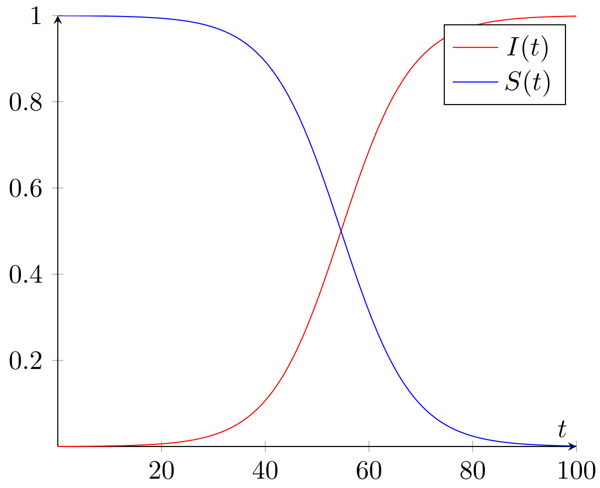

Figura 3: Gráfico da solução com os dados da população infectada de Manaus.

Note que a Figura 3 apresenta um crescimento de indivíduos infectados na capital amazonense. A solução pode ser verificada quando $S_0 = 1.872, 399$, $I_0 = 0, 6663$ e o parâmetro $\alpha = 0, 1454$ nas equações (3.8) e (3.9).

6. Conceitos básicos e interatividade entre números fuzzy

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos da teoria fuzzy (Barros et al., 2016) e também apresentaremos algumas das propridades de números fuzzy interativos Carlsson et al. (2006, 2004).

Definição 1 *Um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ é dado por uma função $\mu_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$. Os α-níveis de A são definidos da seguinte maneira*

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Se $\alpha = 0$, $[A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) > 0\}}$ (o fecho do suporte de A).

Denotamos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$ cujos α-níveis são compactos e não vazios.

Definição 2 *O subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é chamado um número fuzzy se todos os α-níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$ e o suporte de A*

$$supp(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) > 0\}$$

é limitado.

A família de todos os números fuzzy é denotada por $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Definição 3 *Uma distribuição de possibilidade sobre $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fuzzy C de $\mathbb{R}^n$ com função de pertinência $\mu_{_C} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ satisfazendo $\mu_{_C}(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

A família das distribuições de possibilidade de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4 *Considere $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ então $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ é chamada uma distribuição de possibilidade conjunta se $\max\limits_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} \mu_C(x_1, ..., x_n) = \mu_{_A}(x_i)$. Além disso, $A_1, ..., A_n$ são chamados as distribuições marginais de C.*

Neste caso,
$\mu_{_C}(x_1, ..., x_n) \leq min(\mu_{_{A_1}}(x_1), ..., \mu_{_{A_n}}(x_n))$ e $[C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha$.

Definição 5 *Dois números fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C for dada por*

$$\mu_{_C}(x, y) = min\{\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(x)\}.$$

Caso contrário, são ditos interativos.

Para números fuzzy não interativos temos:

$$[C]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e todo $\alpha \in [0,1]$.

Definição 6 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma função, $A_1, ..., A_n$ números fuzzy interativos com distribuição de possibilidade conjunta C. A extensão de f aplicada a $(A_1, ..., A_n)$ segundo C é o subconjunto fuzzy $f_{_C}(A_1, ..., A_n)$ cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{f_C(A_1,...,A_n)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} \mu_C(\mu_{A_1}(x_1), \cdots, \mu_{A_n}(x_n)), & se\ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ,\ se\ f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

sendo $f^{-1}(y) = \{(x_1, ..., x_n) : f(x_1, ..., x_n) = y\}$.

Com relação ao princípio de extensão segundo C temos:

Proposição 1 *Sejam $A_1, ..., A_n$ números fuzzy, C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais $A_1, ..., A_n$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$[f_C(A_1, ..., A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0,1]$. Além disso, $f_C(A_1, A_2, ..., A_n)$ é sempre um número fuzzy.

7. Solução interativa fuzzy para os casos de aids em Manaus

Utilizando a definição 7 e a condição $S + I = 1$ encontramos a solução fuzzy interativa da seguinte forma:

Se $[S]^\alpha = [B]^\alpha = f([A]^\alpha = [I]^\alpha)$, $\forall \alpha \in [0,1]$ e pelas condições acima temos que os α-níveis da distribuição de possibilidade conjunta entre I e S são establecido por:

$$[C]^\alpha = \{(I, 1-S) : x \in [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\} \tag{7.14}$$

Assim a solução interativa fuzzy em que S e I são correlacionados é dada por:

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\alpha t}}{I_0(e^{\alpha t} - 1) + 1} \tag{7.15}$$

Agora para $\alpha = 0,1454$ obtido em (5.11) na seção 5 e I_0 um número fuzzy, temos:

$$I(t) = \frac{\hat{I}_0 e^{0,1454t}}{\hat{I}_0(e^{0,1454t} - 1) + 1} \tag{7.16}$$

8. Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado, inicialmente, o modelo SI com N constante e sem dinâmica vital, conforme Marcolino (2008). Para analisar o modelo para a aids em Manaus foi apresentado com uma breve apresentação da epidemiologia da doença, em seguida feito o estudo do sistema de equações diferenciais que descreve o modelo e também a aplicação do modelo com os dados dos casos confirmados pelo vírus HIV na cidade estudada.

Através dessa análise e utilização dos dados das taxas de detecção da aids, foi possível calcular o parâmetro α e a solução do sistema (3.1). Com isso, ajustamos o gráfico na dinâmica dos casos confirmados. E também encontramos a solução interativa fuzzy para o número de infectados, com I_0 fuzzy. Assim, com os dados e resultados encontrados, observamos que a falta de estrutura e interesse por parte do governo durante os anos estudados foi um dos fatores que resultou no crescimento de pessoas contaminadas pelo vírus HIV e, é evidente que uma população sem diagnóstico eficiente e acessível e sem informações suficientes não se mobilizará para tentar conter a doença.

Referências

Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2016). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Springer, Berlin.

Carlsson, C., Füller, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, Jul 25-29*, volume 1, páginas 535–539, Budapest, Hungary. IEEE Ed.

Carlsson, C., Füller, R., e Majlender, P. (2006). On possibilistic correlation. *Fuzzy Sets and Systems*, 155:425–445.

Falcão, D. L., Leite, J. C. S., e Marcolino, R. (2017). Modelagem matemática para a hanseaníase em Codó-MA. *Biomatemática*, 27:63–74.

Fundação de Vigilância em Saúde (2019). Boletim Epidemiológico em Saúde. http://www.fvs.am.gov.br Acesso em: 04/02/2019.

Marcolino, R. S. (2008). Modelos matemáticos epidemiológicos de tuberculose em codó-ma. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.

Ministério da Saúde (2019). Aids/HIV: o que é, causas, sintomas, diagnóstico, tratamento e prevenção. URL: http://portalms.saude.gov.br Acesso em: 01/08/2019.