Biomatemática ***29*** *(2019), 49–58* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Interatividade fuzzy no modelo generalizado de von Bertalanffy

Silvia D.Souza[1], Roberto A.C.Prata[2]
Dept^{o} Matemática, ICE – UFAM, 69.080-005, Manaus/AM.

Resumo. O metabolismo corporal animal é constantemente composto por dois processos, a saber: o anabolismo (síntese de proteína nos organismos) e o catabolismo (quebra de proteínas nos organismos), ressalta-se que o anabolismo e o catabolismo dependem do meio no qual o animal vive, pois o peso de um animal depende da resultante do anabolismo e do catabolismo. Neste trabalho encontramos uma função f que correlaciona fuzzy interativamente o peso do animal (peixe) e o seu parâmetro de anabolismo e calculamos o índice de interatividade entre estes dois parâmetros.

Palavras-chave: *Modelo von Bertalanffy; números fuzzy interativos; princípio de extensão de Zadeh; Biomatemática.*

1. Introdução

O metabolismo animal corporal está constatemente sendo reposto por dois processos o anabolismo (síntese de proteína nos organismos) e o catabolismo (quebra de proteínas nos organismos), em que o peso de qualquer animal depende da resultante do anabolismo e do catabolismo (Melo et al., 2012). Diante do exposto, pretendemos com este trabalho encontrar uma função f que correlaciona fuzzy interativamente o peso do animal e o parâmetro de anabolismo. Mostraremos também que a correlação entre os parâmetros citados é perfeita, ver Carlsson et al. (2006).

Este trabalho está dividido da seguinte forma, na secção 2 apresentamos alguns conceitos básicos sobre interatividade fuzzy, na secção 3 definimos

[1]silviadss@gmail.com
[2]praroberto@gmail.com

números fuzzy f-correlacionados assim como também serão vistas algumas das propriedades dos números fuzzy f-correlacionados, na secção 4.1 apresentamos os principais resultados deste trabalho.

2. Conceitos básicos e interatividade entre números fuzzy

Nesta secção apresentaremos alguns conceitos básicos da teoria fuzzy (Barros et al., 2016) e também apresentaremos algumas das propridades de números fuzzy interativos (Carlsson et al., 2006, 2004).

Definição 1 *Um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ é dado por uma função $\mu_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$. Os α-níveis de A são definidos da seguinte maneira*

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Se $\alpha = 0$, $[A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) > 0\}}$ (o fecho do suporte de A).

Denotamos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$ cujos α-níveis são compactos e não vazios.

Definição 2 *O subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é chamado um número fuzzy se todos os α-níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$ e o suporte de A*

$$supp(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$$

é limitado.

A família de todos os números fuzzy é denotada por $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Definição 3 *Uma distribuição de possibilidade sobre $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fuzzy C de $\mathbb{R}^n$ com função de pertinência $\mu_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ satisfazendo $\mu_C(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

A família das distribuições de possibilidade de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4 *Considere $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, então $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ é chamada uma distribuição de possibilidade conjunta se $\max\limits_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} \mu_C(x_1, ..., x_n) = \mu_A(x_i)$. Além disso, $A_1, ..., A_n$ são chamadas as distribuições marginais de C.*

Neste caso,
$\mu_C(x_1, ..., x_n) \leq min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n))$ e $[C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha$.

Definição 5 *Dois números fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C for dada por*

$$\mu_C(x, y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Caso contrário, são ditos interativos.

Para números fuzzy não interativos temos:

$$[C]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 6 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma função, $A_1, ..., A_n$ números fuzzy interativos com distribuição de possibilidade conjunta C. A extensão de f aplicada a $(A_1, ..., A_n)$ segundo C é o subconjunto fuzzy $f_C(A_1, ..., A_n)$ cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{f_C(A_1,...,A_n)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} \mu_C(\mu_{A_1}(x_1), \cdots, \mu_{A_n}(x_n)), & se\ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , se\ f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

sendo $f^{-1}(y) = \{(x_1, ..., x_n) : f(x_1, ..., x_n) = y\}$.

Com relação ao princípio de extensão segundo C temos:

Proposição 1 *Sejam $A_1, ..., A_n$ números fuzzy, C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais $A_1, ..., A_n$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$[f_C(A_1, ..., A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Além disso, $f_C(A_1, A_2, ..., A_n)$ é sempre um número fuzzy.

2.1. Números fuzzy f-correlacionados

Nesta seção apresentaremos algumas definições e propriedades sobre os números fuzzy f-correlacionados (Cabral et al., 2015).

Definição 7 *Sejam* $f : X \longrightarrow Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$ *uma função monótona injetora e* $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ *números fuzzy. Dizemos que* A *e* B *são correlacionados segundo a função* f *ou f-correlacionados, se sua distribuição de possibilidade conjunta* C *é dada por*

$$\mu_C(x,y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x,y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x,y) \tag{2.1}$$

em que

$$\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad y = f(x) \\ 0 & se \quad y \neq f(x) \end{cases}$$

é a função característica da curva $\gamma(x) = (x, f(x))$.

Neste caso, temos

$[B]^\alpha = f([A]^\alpha), \forall \alpha \in [0,1]$,

$\mu_B(x) = \mu_A(f^{-1}(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ se $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$,

$$\begin{aligned} [C]^\alpha &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mu_C(x,y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x,y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, f(x)) : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, f(x)) : x \in [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\}. \end{aligned}$$

É interessante notar que a partir de (2.1) os únicos elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que tem pertinência não nula a C são os que estão sobre a curva $\gamma(x) = (x, f(x))$.

Quando $f(x) = qx + r$ com $q \neq 0$, os números fuzzy A e B são chamados completamente correlacionados (Carlsson et al., 2006). Neste contexto, a distribuição de possibilidade conjunta de A e B é dada por

$$\mu_C(x,y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) \tag{2.2}$$

sendo

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad qx + r = y \\ 0 & \text{se} \quad qx + r \neq y \end{cases}$$

a função característica da reta $\gamma(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x, qx + r)\}$.

Quando $f(x) = \frac{q}{x} + r$, com $x > 0$ e $q \neq 0$, os números fuzzy A e B são chamados hiperbolicamente correlacionados. Neste contexto, a distribuição de possibilidade conjunta C de A e B tem a seguinte função de pertinência.

$$\mathcal{X}_{\{\frac{q}{x}+r=y\}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \frac{q}{x}+r=y \\ 0 & \text{se} \quad \frac{q}{x}+r\neq y \end{cases}$$

cuja função característica da reta $\gamma(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x, \frac{q}{x}+r)\}$.

3. Modelo de von Bertalanffy generalizado

Nesta secção apresentaremos a solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (Scapim e Bassanezi, 2008; Scapim, 2008). O modelo de von Bertalanffy clássico foi criado em 1938 por um biólogo austríaco para descrever o comportamento do crescimento do peixe e tal modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} &= \theta P^{\frac{2}{3}} - \beta P \\ P(0) &= P_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

sendo que $P(t)$ é a massa do peixe em função do tempo, P_0 é a masaa inicial, α e β são as constantes de anabolismo e de catabolismo, respectivamente. O Valor $\frac{2}{3}$ vem da relação alométrica do peso do peixe com a área corporal do peixe.

Em 2008 uma generalização do modelo de von Bertalanffy foi proposto por Scapim e Bassanezi (2008) no estudo do crescimento em peso de vários animais sendo dada por;

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} &= \theta P^{\gamma} - \beta P \\ P(0) &= P_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

em que $P = P(t)$ é a massa do animal, P_0 é a massa inicial do animal, θ e β são os parâmetros de anabolismo e catabolismo, respectivamente, e γ é o parâmetro de alometria que depende da espécie estudada e estima-se que $0 < \gamma < 1$.

A solução da equação 3.4 é dada por:

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\frac{P_0}{p_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t} \right\}^{\dfrac{1}{1-\gamma}} \tag{3.5}$$

em que P_∞ é o peso final do animal (Scapim e Bassanezi, 2008).

Utilizamos os dados do peixe tambaqui $P_\infty = 25.6$, $\beta = 1.0288$, $\gamma = 0.687$, $\theta = 2,8367$ e $P_0 = 0.2$, obtidos em Scapim e Bassanezi (2008). Para encontrarmos a solução do modelo de von Bertalanffy generalizado, tais dados podem ser obtidos em Scapim (2008). Assim, a curva da solução determinística do modelo de von Bertalanffy é dada pela Figura 1.

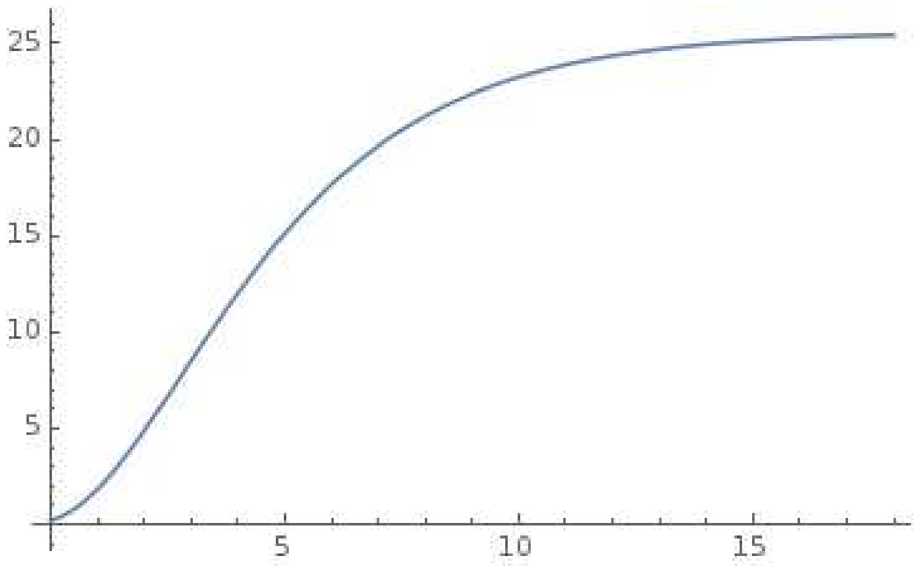

Figura 1: Solução do Modelo de von Bertalanffy

4. Resultados

4.1. Um estudo para o modelo de von Bertalanffy em que a condição inicial e o parâmetro de anabolismo são f-correlacionados

Nesta secção faremos um estudo utilizando interatividade fuzzy para condição inicial e o parâmetro de anabolismo do peixe tambaqui. Para isto, iremos considerar os parâmetros de anabolismo fuzzy e a condição inicial fuzzy completamente correlacionadas pela função $f(x) = 2.1x + 2.52$. Observa-se que a função $f(x)$ foi obtida através de uma regressão linear, onde os dados do peso inicial do peixe tambaqui podem ser encontrados em Scapim (2008).

Pelo o exposto acima, temos que se $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ então
$f([A]^\alpha) = [B]^\alpha = 2.1[a_1^\alpha, a_2^\alpha] + 2.52 = [2.1a_1^\alpha + 2.31, 2.1a_2^\alpha + 2.52]$.

Agora para obtenção do gráfico da solução fuzzy interativa façamos

$\hat{P}_0 = [A]^\alpha = [0.1\alpha + 0.1, 0.3 - 0.1\alpha]$ e $\hat{\theta} = [B]^\alpha = [0.21\alpha + 2.52, 2.52 - 0.21\alpha]$. O gráfico da solução interativa fuzzy para o modelo de von Bertalanffy, em que a condição inicial e o parâmetro de anabolismo são completamente correlacionados, conforme apresentado pela figura 2.

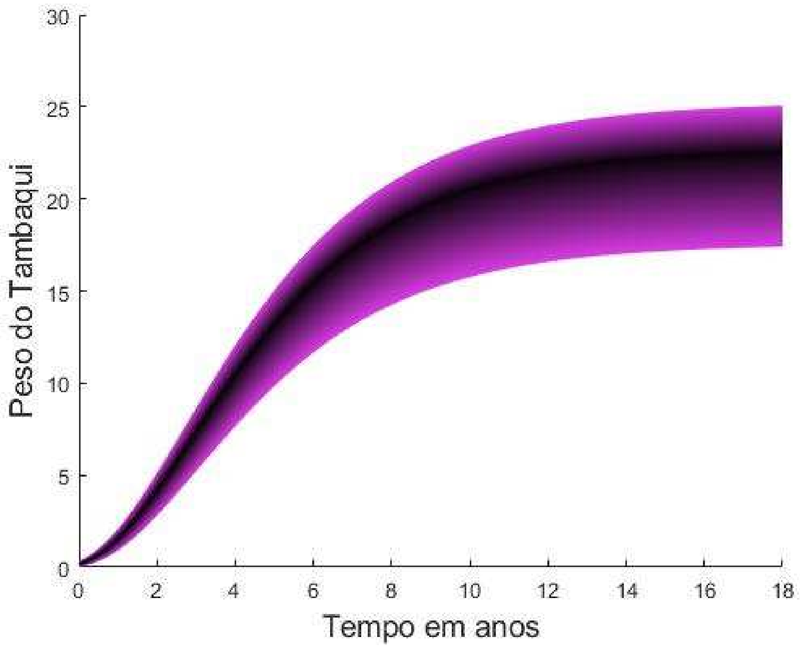

Figura 2: Solução fuzzy

4.2. Índice de interatividade entre o parâmentro de anabolismo e o peso inicial do peixe tambaqui

Nesta seção utilizaremos Carlsson et al. (2004) para encontrarmos o índice de interatividade fuzzy entre o parâmetro de anabolismo e o peso inicial do peixe tambaqui. Para isto, precisamos da seguinte definição a seguir.

Definição 8 *Seja A um número fuzzy com $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, com $\alpha \in [0,1]$. A função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de ponderação se f é não negativa, monótona crescente e satisfaz a seguinte condição de normatização:*

$$\int_0^1 g(\alpha) d\alpha = 1$$

De acordo com Carlsson et al. (2004) temos o índice de interatividade para dois números fuzzy A e B é dado por:

$$\rho_g(A,B) = \frac{CoV_g(A,B)}{\sqrt{Var_g(A)Var_g(B)}} \tag{4.6}$$

em que $CoV_g(A,B)$ é a covariância dos números fuzzy A e B , $Var_g(A)$, $Var_g(B)$ são, respectivamente, as variâncias dos números fuzzy A e B.

Agora, para o cálculo do índice de interatividade façamos $\hat{P}_0 = [A]^\alpha = [0.1\alpha + 0.1, 0.3 - 0.1\alpha]$ e $\hat{\theta} = [B]^\alpha = [0.21\alpha + 2,52, 2,52 - 0.21\alpha]$.

Por 4.6 a covariância entre $\hat{P}_0$ e $\hat{\theta}$ é dada por:

$$\begin{aligned} COV_g(\hat{P}_0, \hat{\theta}) = \frac{1}{12} \int_0^1 & [0.3 - 0.1\alpha - (0.1\alpha + 0.1)] \times \\ & [2.4(0.3 - 0.1\alpha - (0.1\alpha + 0.1))] \, g(\alpha) d\alpha \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$COV_g(\hat{P}_0, \hat{\theta}) = \frac{2.4}{12} \int_0^1 [0.3 - 0.1\alpha - (0.1\alpha + 0.1)]^2 g(\alpha) d\alpha, \tag{4.8}$$

e as variâncias são dadas por:

$$V_g(\hat{P}_0) = \frac{1}{12} \int_0^1 [0.3 - 0.1\alpha - (0.1\alpha + 0.1)]^2 g(\alpha) d\alpha, \tag{4.9}$$

$$V_g(\hat{\theta}) = \frac{1}{12} \int_0^1 [0.3 - 0.1\alpha - (0.1\alpha + 0.1)]^2 g(\alpha) d\alpha, \tag{4.10}$$

Desta forma, concluímos que o índice de interatividade entre os parâmetros de anabolismo e o peso inicial do peixe tambaqui é

$$\rho_g(\hat{P}_0, \hat{\theta}) = \frac{CoV_g(\hat{P}_0, \hat{\theta})}{\sqrt{Var_g(\hat{P}_0)Var_g(\hat{\theta})}} = 1.$$

Sendo desta forma, uma correlação perfeita.

5. Conclusões

Neste artigo encontramos uma solução fuzzy para o modelo de von Bertalanffy cuja constante de anabolismo e o peso inicial do peixe tambaqui são números fuzzy f-correlacionados pela função $f(x) = 2.1x + 2.31$. Ressalta-se que a solução determinística do modelo de von Bertalanffy é uma das curvas da solução fuzzy encontrada.

Neste trabalho nós também calculamos o índice de interatividade fuzzy entre os parâmetros acima citados e concluímos que a correlação entre eles é dita perfeita, ou seja, $\rho_g(\hat{P}_0, \hat{\theta}) = 1$.

Referências

Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2016). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics.* Springer, Berlin.

Cabral, V. M., Prata, R. A. C., e Barrros, L. C. (2015). f-correlted fuzzy numbers applied to hiv model with protease inhibitor therary. *Mathware and Solt Computing Magazine*, 22:46–64.

Carlsson, C., Füller, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, Jul 25-29*, volume 1, páginas 535–539, Budapest, Hungary. IEEE Ed.

Carlsson, C., Füller, R., e Majlender, P. (2006). On possibilistic correlation. *Fuzzy Sets and Systems*, 155:425–445.

Melo, D. C., Texeira, E., Costa, L. S., e Ribeiro, A. P. (2012). Manejo nutricional e alimentar de peixes de água doce. Relatório técnico, Univ. Federal de Minas Gerais, Escola de Veterinária, B.Horizonte/MG.

Scapim, J. (2008). Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado as curvas de crescimento animal. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.

Scapim, J. e Bassanezi, R. (2008). Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado as curvas de crescimento animal. *Biomatemática*, 18:1–14.