Biomatemática **28** *(2018), 115–130* **ISSN 1679-365X**
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Modelagem matemática da dinâmica populacional de afídeos com abordagem fuzzy

Gabriel S. Delgado[1],
Instituto Federal de São Paulo - IFSP, 12.460-000, Campos do Jordão/SP.

Michael M. Diniz[2].
Instituto Federal de São Paulo - IFSP, 12.223-201, São José dos Campos/SP.

Resumo. O objetivo deste artigo é propor e analisar dois modelos discretos para o crescimento populacional de afídeos baseado em um modelo já existente, porém fazendo uso da teoria fuzzy para incorporar informações incertas ao modelo. No primeiro modelo, a condição inicial será representada por um número fuzzy e a análise de estabilidade será baseada na sequência de números fuzzy gerada pela extensão de Zadeh da equação de diferenças. No segundo caso, o parâmetro m que representa a fração de mortalidade dos afídeos jovens será um número fuzzy e a sequência gerada será oriunda da defuzzificação da extensão de Zadeh da equação de diferenças de cada estágio. Como resultado foram obtidas condições de estabilidades para exemplos simulados em ambos os casos com base em teoremas da literatura e no Teorema 2 proposto nesse artigo.

Palavras-chave: *Teoria fuzzy; espaços métricos fuzzy; Biomatemática.*

1. Introdução

Insetos normalmente têm mais de uma fase no ciclo da vida entre o nascimento e o amadurecimento e, com o avanço da etologia, estudos mais específicos sobre diversas espécies se tornaram possíveis. Segundo Whitham (1978) o crescimento da população de afídeos (insetos de pequenas dimensões que se alimentam da seiva de plantas) do gênero *Pemphigus* em galhas de folhas de álamo é influenciado por diversos fatores como: época do ano, tamanho da folha e interação com outras espécies.

Edelstein-Keshet (1988) traz uma simplificação de como poderíamos modelar discretamente a população desses afídeos estudados por Whitham (1980). No modelo proposto em Edelstein-Keshet (1988) os parâmetros envolvidos são considerados exatos, entretanto, em situações práticas é comum haver incertezas na definição dos parâmetros ou na condição inicial de modelos desta natureza. Neste artigo faremos uso do modelo proposto por Edelstein-Keshet (1988), porém, em primeiro caso considerando a existência de uma incerteza na definição da condição inicial e em segundo caso, a fração de mortalidade dos afídeos jovens.

A ideia da incerteza é algo que permeia a humanidade há muito tempo e hoje em dia é tema de diversos estudos na área da Matemática. Zadeh (1965) propôs uma formalização matemática para tratar termos como "aproximadamente", "em torno de", "mais ou menos" e essa é a premissa principal para os conjuntos fuzzy, no qual cada elemento tem um grau de pertinência ao conjunto.

Este artigo tem por objetivo propor um modelo de crescimento populacional utilizando teoria fuzzy e modelos baseados em defuzzificação. Além disso, através do teorema da completude do espaço métrico

[1]gsd2005online@hotmail.com
[2]michael.diniz@ifsp.edu.br

dos números fuzzy $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D_\infty)$, e do teorema do ponto fixo para este espaço, estudaremos a estabilidade de modelos baseados em equações de diferenças cujas variáveis de estado são números fuzzy.

Alguns autores como Rodney C. Bassanezi e Laécio C. de Barros já utilizam a teoria fuzzy para modelar problemas da biologia (ver: Barros e Bassanezi, 2006). Estes trabalhos ganharam ênfase na área da biomatemática, principalmente pela sua versatilidade de trabalhar com valores não bem definidos.

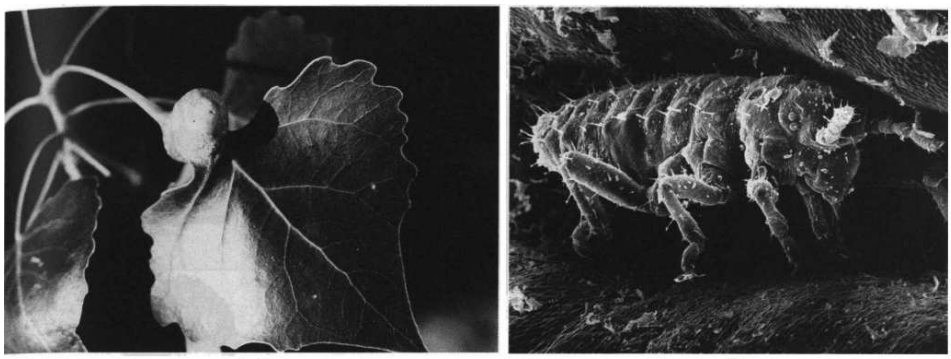
2. Preliminares

Nesta seção serão elencados os principais conceitos, definições e teoremas utilizados ao longo do artigo.

2.1. O modelo dos afídeos

Como descrito por Edelstein-Keshet (1988), os insetos geralmente têm mais de um estágio em seu ciclo de vida, desde a progênie até a maturidade. De fato, tal ciclo pode levar um tempo incerto, porém, como afirma a autora, é costume usar uma única geração como a unidade básica de tempo ao tentar escrever um modelo para o crescimento da população de insetos. Vários estágios do ciclo de vida de um inseto podem ser descritos por um sistema de equações de diferenças. Muitas vezes o sistema de equações condensa-se a uma única equação na qual aparecem as combinações de todos os parâmetros pré-estabelecidos.

Edelstein-Keshet (1988) nos apresenta a seguinte situação: Considere a reprodução de afídeos do gênero *Pemphigus* em galhas de folhas de álamo. Os afídeos fêmeas adultos produzem galhas nas folhas dos álamos. Toda a progênie de um único afídeo está contida em uma galha (Whitham, 1980, apud Edelstein-Keshet, 1988). Alguma fração destes emergirá e sobreviverá à idade adulta. Embora geralmente a capacidade de produzir descendentes (fecundidade) e a probabilidade de sobrevivência até a idade adulta (sobrevivência) dependa de suas condições ambientais, da qualidade de seus alimentos e dos tamanhos populacionais, vamos desconsiderar esses efeitos e estudar um modelo simplificado proposto em Edelstein-Keshet (1988), no qual todos os parâmetros são constantes.



(a) (b)

Figura 1: Galha ocupada por afideo do Gênero *Pemphigus*. (a) Uma galha produzida por afídeo na base de uma folha de álamo. (b) Imagem de micrografia eletrônica de uma fêmea de afídeo dentro da sua galha. Cortesia de Tom Whitham à obra (Alcock, 2016).

Sejam:

(i) a_n o número de afídeos fêmeas adultas na n-ésima geração;

(ii) p_n o número de descendentes na geração n-ésima;

(iii) f_n o número de progênies na n-ésima geração;

(iv) m a fração da mortalidade dos afídeos jovens;

(v) f o número de progênies por afídeo feminino;

(vi) r a proporção de afídeos fêmeas em relação ao total de afídeos adultos;

Então, escrevemos equações para representar as sucessivas populações de afídeos e as usamos para obter uma expressão para o número de fêmeas adultas na n-ésima geração, se inicialmente houvesse a_0 fêmeas: Cada fêmea produz f descendentes; portanto

$$p_{n+1} = fa_n$$

onde p_{n+1} é número de descendentes na geração $n+1$, destes, a fração $1-m$ sobrevive até a idade adulta, gerando uma proporção final de r fêmeas, portanto

$$a_{n+1} = r(1-m)p_{n+1}.$$

Note que estas duas equações podem ser combinadas em uma única equação

$$a_{n+1} = fr(1-m)a_n \tag{2.1}$$

Para o caso em que f, r e m são constantes, a solução a_n é dada por

$$a_n = [fr(1-m)]^n a_0 \tag{2.2}$$

eliminando assim a necessidade de sabermos o número de descendentes na geração $n+1$.

A Equação 2.1 é o que chamamos de uma Equação de Diferença Linear de primeira ordem, de modo que a solução (2.2) converge para zero caso $fr(1-m) < 1$, mantém-se constante caso $fr(1-m) = 1$ e diverge para $+\infty$ se $fr(1-m) > 1$. A expressão $fr(1-m)$ é o número per capita de fêmeas adultas que cada afídeo mãe produz.

2.2 Espaços Métricos Completos

Definição 1. *(Lima, 1983) Seja M um conjunto, se existir uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, chamada distância, e que satisfaça as seguintes condições para todo $x, y, z \in M$:*
d1) $d(x,x) = 0$;
d2) Se $x \neq y$ então $d(x,y) > 0$;
d3) $d(x,y) = d(y,x)$;[Comutatividade]
d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Então, M e d definem um Espaço Métrico denotado pelo par (M,d).

As condições **d1)** e **d2)** dizem que $d(x,y) \geq 0$ e que $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A condição **d3)** afirma que a distância $d(x,y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição **d4)** chama-se *desigualdade do triângulo*; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Dentro de um Espaço Métrico existem diversas propriedades já provadas, então, se a um conjunto pudermos atribuir uma função distância, poderemos verificar se este define um Espaço Métrico e teremos consequentemente, diversas propriedades válidas.

Podemos estabelecer em um Espaço Métrico (M,d) uma sequência definida por uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ em que $x(n)$, escrito como x_n, é o n-ésimo termo da sequência (x_n) (ver: Lima, 1983).

Definição 2. *(Lima, 1983) Dada uma sequência* (x_n) *num espaço métrico* (M, d) *de modo que* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. *Dizemos que* (x_n) *é uma sequência de Cauchy.*

Uma sequência que é chamada de *sequência de Cauchy* é tal que a distância entre termos consecutivos é cada vez menor a partir de certo elemento da sequência.

Definição 3. *Um Espaço Métrico é completo se toda sequência de Cauchy nele é convergente.*

Exemplo 1. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *não pode definir um Espaço Métrico completo utilizando a função distância usual de* $\mathbb{R}$ *dada por*

$$d(x, y) = |x - y|$$

pois, é possível definir em $\mathbb{Q}$ *uma sequência de Cauchy* (x_n) *tal que* $x_1 = 2$ *e* $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, *e nesse caso* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ *e desse modo a sequência converge para um valor que não pertence a* $\mathbb{Q}$, *logo não é convergente em* $\mathbb{Q}$.

Definição 4 (Ponto fixo)**.** *(Castelli, 2016) Um Ponto fixo da aplicação* $f : M \to M$ *é um ponto* $x \in M$ *tal que* $f(x) = x$.

Definição 5 (Contração)**.** *(Castelli, 2016; Lima, 1983) Se existir um número real* $0 < c < 1$ *tal que, para todo* $x, y \in M$ *tem-se* $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$, *então* f *é uma contração.*

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *(Castelli, 2016) Considere um Espaço Métrico* $M = (M, d)$, *onde* $M \neq \varnothing$. *Suponha que* M *seja completo e* $f : M \to M$ *seja uma contração. Então,* f *possui precisamente um único ponto fixo.*

2.3 Espaço métrico dos números fuzzy

Dado um conjunto clássico U (quando estamos falando sobre Teoria Fuzzy, conjuntos não-fuzzy são classificados como clássicos ou *crisp*, tendo eles o mesmo significado: ser um conjunto que não é fuzzy), este conjunto fica bem definido quando conseguimos definir quais elementos pertencem ou não a ele. Há diversas formas de se definir um conjunto fuzzy, seguiremos a adotada por Barros e Bassanezi (2006).

Definição 6. *Seja* U *um conjunto e* $\Omega \subset U$. *A função característica de* Ω *é dada por*

$$\mathcal{X}_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \Omega \\ 0, & se \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

Definição 7. *Seja* U *um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy* A *de* U *é caracterizado por uma função*

$$\mu_A : U \to [0, 1],$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy A.

Podemos assim definir um subconjunto fuzzy A como um conjunto clássico de pares ordenados da seguinte maneira:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), \text{com } x \in U\}$$

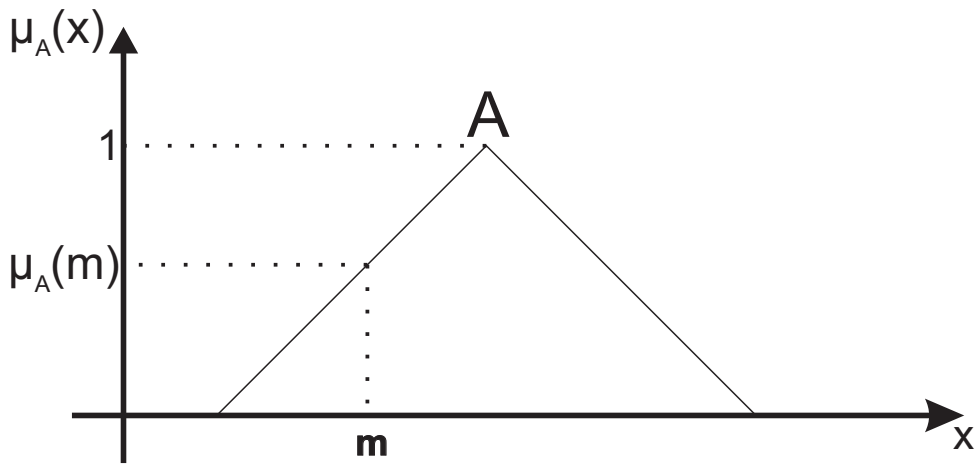


Figura 2: Função de pertinência de A.

A Figura 2 ilustra o gráfico da função de pertinência de um subconjunto fuzzy A.

Definição 8. *Definimos como o suporte de A o seguinte subconjunto clássico de U:*

$$suppA = \{x \in U, tal\ que\ \mu_A(x) > 0\}.$$

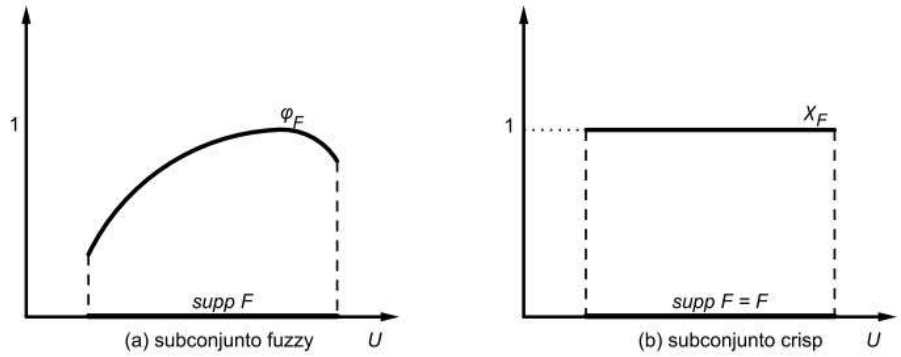


Figura 3: Ilustração do suporte de subconjuntos fuzzy (a) e crisp (b) (Conjuntos clássicos/não-fuzzy.) (Barros e Bassanezi, 2006, cf.)

Um conjunto fuzzy fica bem definido quando atribuímos a ele uma função de pertinência ou definimos seus $\alpha - n\acute{i}veis$.

Definição 9. *Seja A um subconjunto fuzzy de U e* $\alpha \in [0, 1]$. *O* $\alpha-$*nível é o subconjunto clássico de U definido por*

$$[A]^\alpha = \{x \in U, \mu_A(x) \geq \alpha\}\ \ para\ 0 < \alpha \leq 1.$$

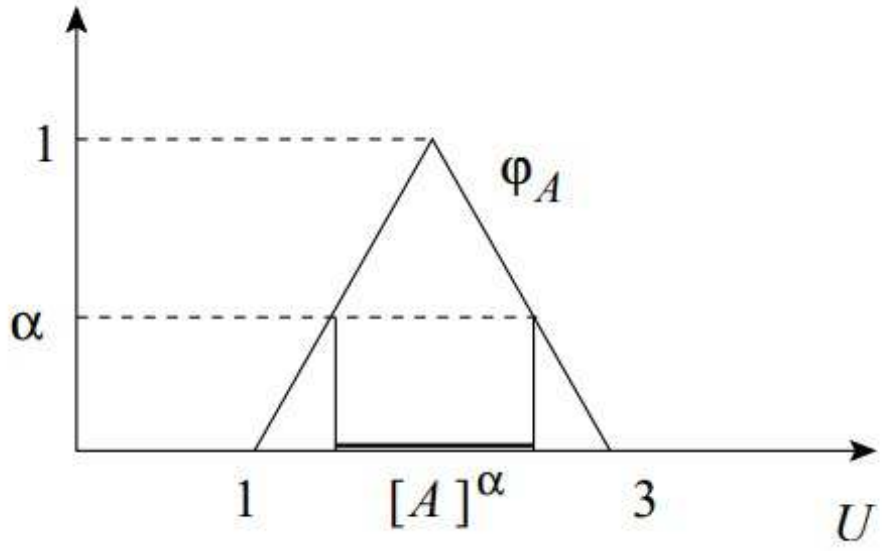


Figura 4: $\alpha-$*nível* $[A]^{\alpha}$ (Barros e Bassanezi, 2006, cf.)

Considera-se $[A]^0$ o fecho do suporte de A, ou seja, $[A]^0 = \overline{suppA}$.

Definição 10. *Chamamos de número fuzzy um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ que satisfaz:*

(i) todos os α -níveis de A são não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;

(ii) todos os α -níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;

(iii) $suppA = \{x \in \mathbb{R}, \mu_A(x) > 0\}$ é limitado.

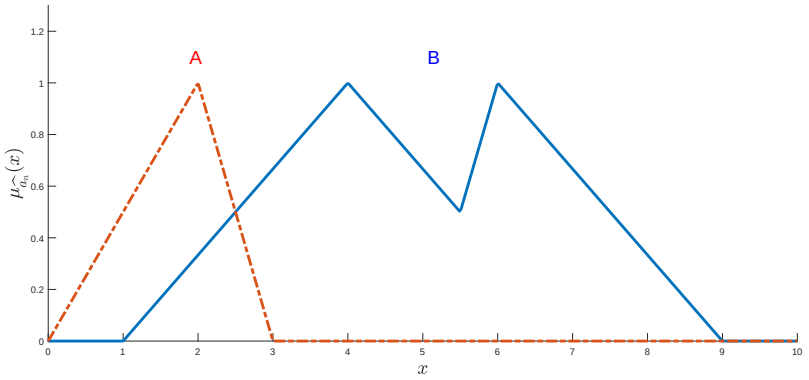


Figura 5: A é um número fuzzy e B não é um número fuzzy, pois não satisfaz a propriedade (ii) da Definição 10.

O conjunto dos números fuzzy é importante, pois possui boas propriedades topológicas que serão discutidas ao longo deste artigo.

Todo conjunto (clássico) A é subconjunto de um conjunto universo U, e as notações conjunto e subconjunto são usadas indistintamente para se referir à A, o mesmo será feito com conjuntos fuzzy. O conjunto dos números fuzzy é denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Definição 11. *(Barros e Bassanezi, 2006) Um número fuzzy A é dito triangular, se dados $a, b, u \in \mathbb{R}$ sua função de pertinência é da forma:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & se \quad a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & se \quad u < x \leq b \\ 0 & se \quad x > b \end{cases}$$

Nesse caso, o número A será representado pela terna ordenada $(a; u; b)$.

Observação 1. *Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e A um número fuzzy com α-nível dado por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$,a multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA cujos $\alpha-$níveis são $[\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & se \quad \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & se \quad \lambda < 0 \end{cases}$. Analogamente, se A for triangular $(a; u; b)$ então $\lambda A = \lambda(a; u; b) = (\lambda a; \lambda u; \lambda b)$.*

Ao realizar uma modelagem matemática com valores reais, espera-se como resultado um número real; ao se trabalhar com números fuzzy, teremos como resultado um número fuzzy. Uma maneira de interpretar soluções oriundas de modelos fuzzy é tratar o resultado por meio de um método de defuzzificação, método este que consiste em definir um valor pertencente a $\mathbb{R}$ que represente o número fuzzy. A seguir, definimos o principal método de defuzzificação utilizado na literatura. (ver: Barros e Bassanezi, 2006)

Definição 12 (Centro de Gravidade)**.** *(Barros e Bassanezi, 2006) O centro de gravidade dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. Entre todos os métodos de defuzzificação ele é o preferido, mesmo sendo talvez o mais complicado. A equação a seguir refere-se ao domínio contínuo, onde A é o conjunto ou número fuzzy a ser analisado, u é o número real do domínio e μ_A é a sua pertinência ao conjunto fuzzy.*

$$G(A) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u\mu_A(u)du}{\int_{\mathbb{R}} \mu_A(u)du}$$

Observamos que $G(A)$ é a abcissa do centro de massa da figura geométrica formada pela função de pertinência de A. No caso de um número fuzzy triangular, o centro de massa pode ser calculado conforme a Proposição 1.

Proposição 1. *Dado um número fuzzy triangular A com parâmetros $(a; u; b)$ então*

$$G(A) = \frac{a + b + u}{3}$$

.

Demonstração. Segue imediatamente das propriedades de baricentro do triângulo. □

Definição 13 (Princípio de Extensão de Zadeh)**.** *Seja a função $f : X \to Z$ e A um subconjunto fuzzy de X. A extensão de Zadeh de f é a função $\hat{f}$ que, aplicada a A, fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{x=f^{-1}(z)} \mu_A(x) & se \quad f^{-1}(z) \neq \varnothing \\ 0 & se \quad f^{-1}(z) = \varnothing \end{cases}$$

sendo $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$ é a pré-imagem de z.

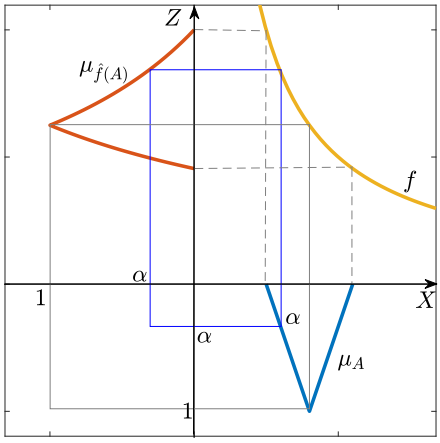


Figura 6: Imagem de um subconjunto fuzzy A a partir do princípio de extensão para uma função f.

Durante as pesquisas para esse artigo, após algumas simulações computacionais, notou-se uma propriedade interessante, que não foi encontrada em nenhuma bibliografia, e, deste modo, foi formulado o seguinte teorema:

Teorema 2. *Seja um número fuzzy triangular $A = (a; u; b)$ e uma função linear $f = px + q$ então $f(G(A)) = G(\hat{f}(A))$.*

Demonstração. Por f ser uma função linear e A ser um número fuzzy triangular, então pela Definição 13, $\hat{f}(A)$ também é triangular e com parâmetros $(f(a); f(u); f(b))$.

Pela Proposição 1 temos $G(A) = \left(\frac{a+b+u}{3}\right)$, portanto,

$$f(G(A)) = f\Big(\frac{a+b+u}{3}\Big) = p\Big(\frac{a+b+u}{3}\Big) + q = \frac{ap+bp+up}{3} + q = \frac{ap+bp+up+3q}{3} =$$
$$= \frac{ap+q+bp+q+up+q}{3} = \frac{f(a)+f(b)+f(u)}{3} = G(\hat{f}(A))$$

□

Há uma relação entre os α-níveis da imagem e do domínio e tal relação é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3 (Teorema de Nguyen)**.** *(Barros e Bassanezi, 2006) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X. Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ vale $[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$.*

Quando tratamos sobre Espaços Métricos fuzzy, a métrica comumente utilizada (função distância) é a métrica de Pompeiu-Hausdorf.

Definição 14 (Métrica de Pompeiu-Hausdorf)**.** *(Barros e Bassanezi, 2006) A distância entre dois números fuzzy A, B é dada por:*

$$D_\infty(A, B) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H([A]^\alpha, [B]^\alpha)$$

onde d_H é a métrica de Hausdorff para intervalos compactos de $\mathbb{R}$, cuja definição é

$$d_H(I, J) = \max(\sup_{x \in I} d(x, J), \sup_{y \in J} d(y, I)),$$

em que $d(x, J) = \inf_{j \in J} d(x, j)$ *e* $d(r, s) = |r - s|$.

Segundo Bede (2012), $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $D_\infty(A, B)$ formam um Espaço Métrico. Em (Bede, 2012; Puri et al., 1993), os autores mostram que o Espaço Métrico fuzzy é completo, usando a função de distância de Pompeiu-Hausdorff.

3. Principais resultados teóricos

3.1. Teorema de completude

A completude de um espaço métrico é uma propriedade muito importante, pois garante que toda sequência de Cauchy nesse espaço é convergente. O Teorema 4 garante que o espaço métrico nos números fuzzy, equipado com a distância de Pompeiu-Hausdorf, é completo.

Teorema 4. *[Completude fuzzy] (Bede, 2012) O Espaço Métrico* $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D_\infty)$ *é completo.*

A completude de um espaço métrico é importante, pois tal propriedade muitas vezes vigora como hipótese de importantes teoremas da topologia, como por exemplo, o teorema do ponto fixo apresentado na seção anterior.

3.2. Teorema do Ponto fixo

Definição 15. *Dizemos que uma aplicação* $f : M \to N$ *é de Lipschitz se existe* $c > 0$ *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|, \forall\, x, y \in M$.

Corolário 1. *Se* f *é de Lipschitz então* f *é contínua.*

Demonstração. Ver (Lima, 1983). □

Observação 2. *A recíproca é falsa. Defina* $f = \sqrt{x}$, f *é contínua mas não é contração em* $[0, 1]$. *De fato, seja* d *a métrica usual para* $\mathbb{R}$ *e* $a \in [0, 1]$. *Note que* $d(f(a), f(0)) > d(a, 0)$ *pois* $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a^2 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq \sqrt{a} \leq 1$. *Deste modo, mesmo sabendo que a população de afídeos pode mudar de forma constante, não dá para garantir que a mesma será de Lipschitz o tempo todo.*

Teorema 5. *(Barros et al., 1997) Considere uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *a sua extensão de Zadeh, então* f *é Lipschitz com constante* K *se, e somente se* $\hat{f}$ *é Lipschitz com a métrica* D_∞ *com a mesma constante* K.

Demonstração. Como f é Lipschitz, pelo Corolário 1 ela é contínua e então pelo Teorema 3 temos

$$D_\infty(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(f([u]^\alpha), f([v]^\alpha))$$

Agora

$$d_H(f([u]^\alpha), f([v]^\alpha)) = \max\{\sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} d(f(x), f(y)), \sup_{y \in [v]^\alpha} \inf_{x \in [u]^\alpha} d(f(x), f(y))\} \leq$$

$$\leq \max\{\sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} Kd(x, y), \sup_{y \in [v]^\alpha} \inf_{x \in [u]^\alpha} Kd(x, y)\} =$$

$$= K \max\{\sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} d(x, y), \sup_{y \in [v]^\alpha} \inf_{x \in [u]^\alpha} d(x, y)\} = Kd_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

Consequentemente,

$$D_\infty(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) \leq KD_\infty(u, v)$$

Para provar a volta, tendo que $\hat{f}$ é Lipschitz, logo é contínua e é a extensão de Zadeh de uma função f, então f deve ser contínua, pois

$$D_\infty(\hat{f}(\mathcal{X}_{\{x\}}), \hat{f}(\mathcal{X}_{\{y\}})) = ||f(x) - f(y)|| = d(f(x), f(y)), \forall x, y, \in \mathbb{R}^n$$

Assim obtemos

$$D_\infty(\hat{f}(\mathcal{X}_{\{x\}}), \hat{f}(\mathcal{X}_{\{y\}})) = d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

É fácil mostrar o outro lado do resultado. □

Teorema 6. *(Barros et al., 1997) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma contração, então $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tem apenas um ponto fixo em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior $\hat{f}$ é uma contração e desde que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D_\infty)$ é completo, $\hat{f}$ tem apenas um único ponto fixo. □

O Teorema 6 é fundamental para garantir a existência de ponto fixo em funções obtidas pela extensão de Zadeh. A aplicação deste teorema será ilustrada na próxima seção deste artigo.

3.3. Modelo fuzzy para a dinâmica populacional de Afídeos

Nesta seção, teremos como base o modelo descrito pela Equação 2.1. Divideremos nossa análise em dois casos. No primeiro caso, consideraremos a_0 como um número fuzzy e os elementos da sequência (a_n) serão obtidos através da extensão de Zadeh da Equação 2.1, i.e, sendo $a_{n+1} = f(a_n)$, onde $f(a_n) = fr(1-m)a_n$, então $\hat{a}_{n+1} = \widehat{f}(\widehat{a}_n)$. No segundo caso, o parâmetro m será considerado como número fuzzy e a sequência $(\hat{a}_n)$ será definida por $\hat{a}_{n+1} = G(fr(1-\hat{m})a_n)$. Os valores aqui utilizados foram escolhidos arbitrariamente.

3.3.1. Primeiro caso

A elaboração de modelos matemáticos que visam compreender aspectos da vida biológica envolve o uso de parâmetros cujos valores usualmente não são simples de serem calculados. Normalmente os valores destes parâmetros são obtidos por estimativas, as quais possuem fatores de incerteza inerentes. Um parâmetro importante na modelagem populacional é o número inicial da população, o a_0, de modo que é difícil determinar um valor exato para essa grandeza, por esse motivo, nesse caso foram feitas simulações com esse parâmetro sendo um número fuzzy.

A sequência $a_{n+1} = fr(1-m)a_n$ possui um único ponto fixo, dado por $a_n = 0$. Este ponto é importante, pois representa a extinção da população de afídeos. Conforme apresentado no início deste texto, $a_n \to 0$ se $fr(1-m) < 1$. Tal condição continua sendo verdadeira para o caso em que a_0 é um número fuzzy e $\hat{a}_{n+1} = \widehat{f}(\hat{a}_n)$, conforme garante o Teorema 6. Alguns casos serão ilustrados conforme as seguintes simulações.

3.3.2. Simulação 1

Vamos considerar inicialmente os seguintes valores de parâmetros: $f = 50; r = 0,04$ e $m = 0,45$, constantes e $\hat{a}_0 = (3; 6; 8)$, de modo que $\hat{a}_1$ seja calculado pela Extensão de Zadeh da Equação 2.1, de acordo com a Definição 13, e consequentemente todos valores $\hat{a}_{n+1}$ sigam da mesma maneira. Portanto, teremos que $\hat{a}_{n+1} = \widehat{f}(\hat{a}_n)$, onde $f(a_n) = 1,1a_n$.

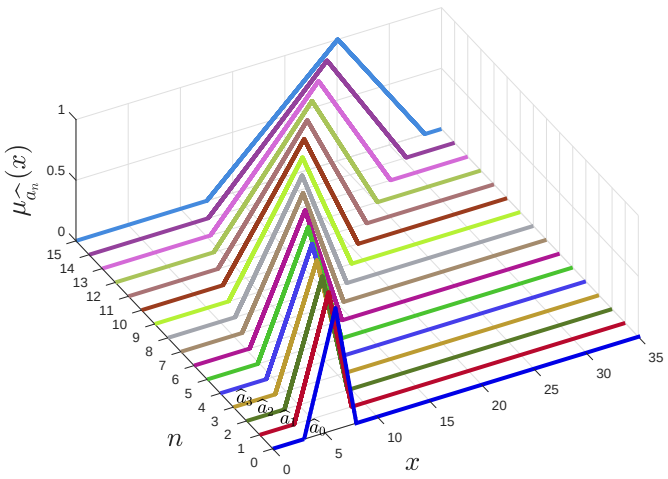


Figura 7: Primeiro caso com crescimento da população de afídeos a cada geração.

Observando a Figura 7, podemos notar que a cada nova geração $\inf(supp(\hat{a}_{n+1})) > \inf(supp(\hat{a}_n))$ e também que $\sup(supp(\hat{a}_{n+1})) > \sup(supp(\hat{a}_n))$, mais precisamente, pela linearidade da Equação 2.1 e de acordo com a Observação 1, temos $\hat{a}_0 = (3; 6; 8), \hat{a}_1 = (3, 3; 6, 6; 8, 8), \hat{a}_2 = (3, 63; 7, 26, 9, 68), ..., \hat{a}_n = (1, 1)^n(3; 6; 8)$. É possível então afirmar que esta é uma sequência divergente, visto que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = \lim_{n\to\infty} (1, 1)^n(3; 6; 8) = (3; 6; 8) \lim_{n\to\infty} (1, 1)^n = \infty.$$

Biologicamente, se nenhum agente externo os interromper (ou outra fêmea se interessar pela mesma folha — o que desencadearia uma briga territorial segundo Whitham (1978)) — isso significa que os afídeos conseguiriam proliferar-se de maneira extensiva pela folha em que estivessem e as próximas gerações seriam capazes de migrarem para outras folhas, crescendo exponencialmente.

3.3.3. Simulação 2

Alterando os parâmetros, fomos capazes de encontrar uma condição em que a sequência é constante, portanto, convergente.

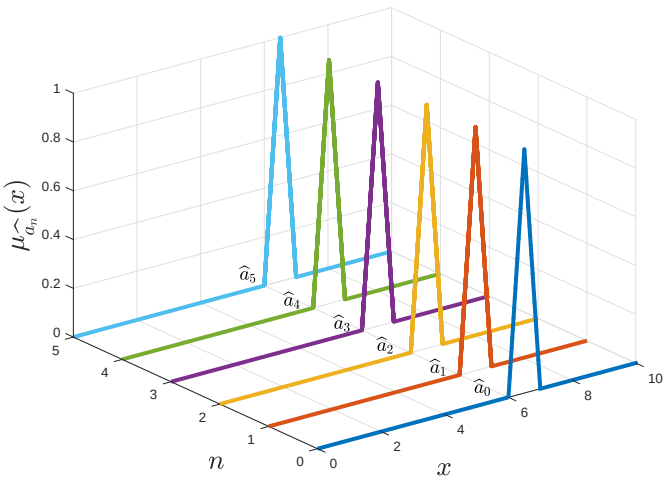


Figura 8: Primeiro caso com população constante.

Aqui, o número per capita de fêmeas adultas que cada afídeo mãe produz, $fr(1-m)$, é igual a 1, visto que temos $f = 50; r = 0,05; m = 0,6; \hat{a}_0 = (6; 6,50; 7)$. Neste caso, de acordo com a Equação 2.2, então $a_n = a_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Segundo Whitham (1978), isso significaria que o número de galhas por folha se tornou muito alto (acima de três) e cada nova geração não consegue superar mais o número médio de filhotes produzido. Nesse ritmo, o próximo passo no ciclo da vida desses afídeos é o que se encontra na simulação a seguir.

3.3.4. Simulação 3

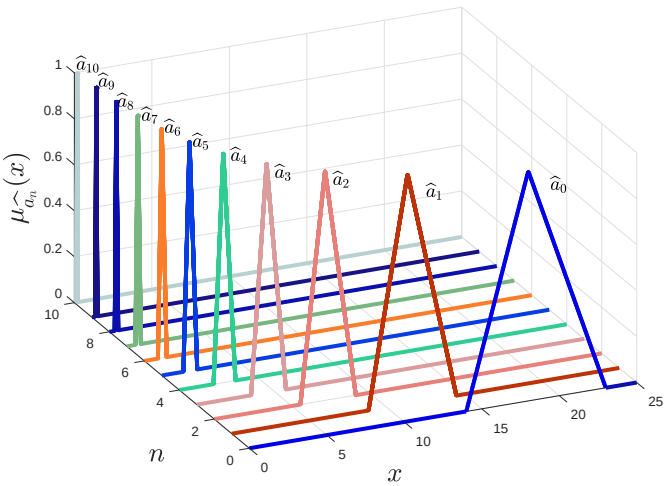


Figura 9: Primeiro caso com baixa na população de afídeos a cada geração.

A Figura 9 ilustra o caso em que $f = 30; r = 0,035; m = 0,40; \hat{a}_0 = (14; 18; 23)$ e, consequentemente, $fr(1-m) = 0,63$. Portanto, de maneira análoga à Simulação 1, temos $\hat{a}_n = (0,63)^n(14, 18, 23)$

e

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = \lim_{n\to\infty} (0,63)^n (14;18;23) = (14;18;23) \lim_{n\to\infty} (0,63)^n = 0. \tag{3.3}$$

Segundo o Teorema 5, a extensão de Zadeh aqui também é de Lipschitz (defina $k \geq fr(1-m) = 0,63$). De acordo com o Teorema 3, o Espaço Métrico $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D_\infty)$ é completo, logo, pelo Teorema 6, sabemos que $\hat{f}$ possui um único ponto fixo. Observando a Equação 3.3 e a Figura 9, podemos identificá-lo facilmente como o valor *zero*, ou seja, biologicamente, a esse ponto não há mais fêmeas na população de afídeos e, consequentemente, não são produzidos mais filhotes.

3.4. Segundo caso

Neste caso, adotamos uma abordagem diferente da anterior. Assim como é difícil encontrar um valor exato e correto para o número inicial da população, é difícil estimar quantos são os que chegam ao fim do ciclo da vida, ou seja, a mortalidade da população. Deste modo, decidimos representar o parâmetro m como um número fuzzy. Ao utilizar a Equação 2.1 para calcular $\hat{a}_{n+1}$, teríamos como resultado um valor fuzzy, e portanto no cálculo de $\hat{a}_{n+2}$ teríamos de trabalhar com uma equação com dois números fuzzy ($\widehat{m}$ e $\hat{a}_{n+1}$), algo que não foi contemplado neste artigo. Por esse motivo, resolvemos utilizar um modelo de defuzzificaçao segundo a Definição 12, de modo que

$$\hat{a}_{n+1} = \widehat{f}(\widehat{m})$$

sendo $f(m) = fr(1-m)G(\widehat{a}_n)$. Note que nos gráficos das Figuras 10, 11 e 12 os valores de $G(\widehat{a}_n)$ encontram-se apenas no plano xn por se tratarem de valores em $\mathbb{R}$.

3.4.1. Simulação 4

Nesta simulação, os parâmetros adotados foram os seguintes: $f = 50; r = 0.04; a_0 = 4; \hat{m} = (0.4; 0.42; 0.6)$. Os termos $(\hat{a}_n)$ da sequência são calculados por $\hat{a}_{n+1} = \widehat{f}(\widehat{m})$ onde $f(m) = 2(1-m)G(\widehat{a}_n)$. Como $\widehat{m}$ é um número fuzzy triangular e a função $f(m)$ é linear em m, pelo Teorema 2 podemos garantir que

$$G(\hat{a}_{n+1}) = G(\widehat{f}(\widehat{m})) = f(G(\widehat{m})),$$

ou seja, para calcular a sequência de $G(\hat{a}_{n+1})$ não é necessário fazer a extensão de Zadeh e o processo de Defuzzificação a cada interação, basta calcular a sequência considerando $G(\widehat{m})$ ao invés de $\widehat{m}$, economizando desta forma processamento computacional, visto que calcular a extensão de Zadeh de um número fuzzy demanda tempo, dependendo da complexidade do número fuzzy em questão.

As simulações foram feitas desconsiderando o Teorema 2, a fim de que pudéssemos visualizar o número fuzzy de cada geração, mas como dito previamente, caso queira-se saber apenas o valor de $G(\hat{a}_{n+1})$, basta calcular $f(G(\widehat{m}))$, algo que, dependendo da forma de m, pode ser calculado inclusive com uma planilha eletrônica simples.

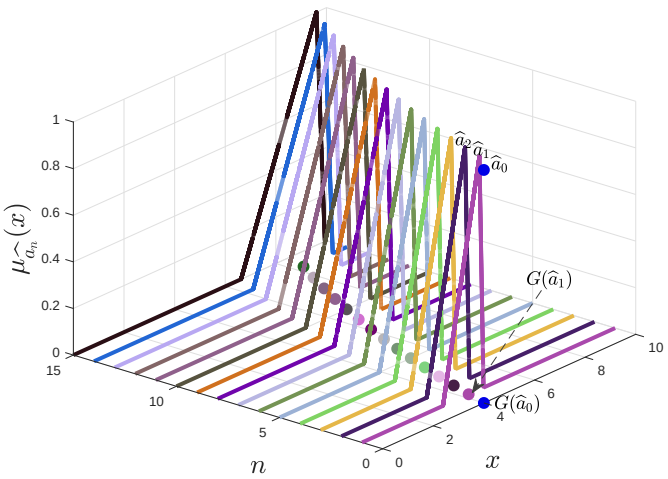


Figura 10: Segundo caso com crescimento da população de afídeos a cada geração.

Observando a Figura 10, percebe-se que a população tende a crescer. Note que $G(\hat{m}) = 0,47\overline{3}$ e que, desta forma, $fr(1-G(\hat{m})) = 1,05\overline{3}$, assim, isso já basta para afirmar que a sequência $(\hat{a}_{n+1})$ diverge. Como na Figura 7, a interpretação biológica aqui é a mesma.

3.4.2. Simulação 5

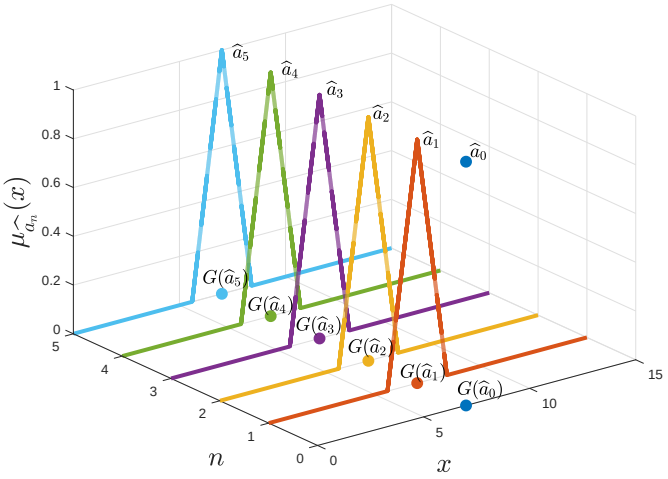


Figura 11: Segundo caso com população constante.

Nesta simulação, utilizamos os seguintes parâmetros $f = 50; r = 0,04; \widehat{m} = (0.4, 0.5, 0.6); a_0 = 7$. Podemos calcular $fr(1 - G(\widehat{m})) = 1$, consequentemente, como podemos ver na Figura 11, o valor da população de afídeos não se altera ao longo das gerações, e dessa forma seu gráfico e interpretação biológica se configuram de modo semelhante ao da Figura 8.

3.4.3. Simulação 6

Na Figura 12, foram alterados os parâmetros ($f = 50; r = 0,04; \hat{m} = (0.5, 0.55, 0.8); a_0 = 21$) e encontramos algo parecido com o que visto na Figura 9.

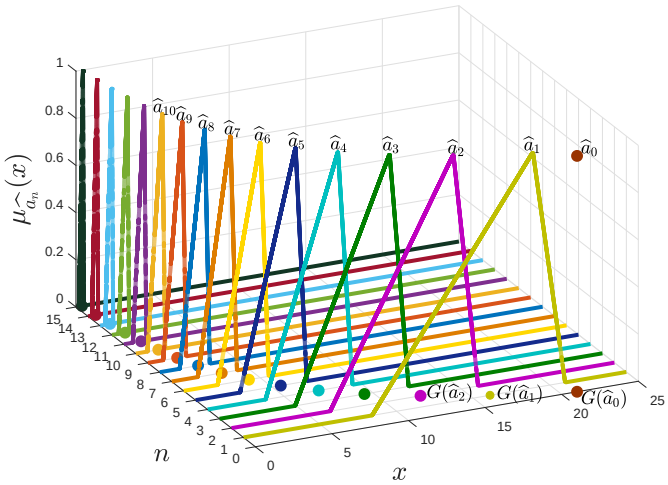


Figura 12: Segundo caso com baixa na população de afídeos a cada geração.

Utilizando a Equação 2.1, temos que $G(\hat{a}_{n+1}) = fr(1-G(\hat{m}))a_n$ e como nesse caso $fr(1-G(\hat{m})) < 1$ então $G(\hat{a}_{n+1})$ é Lipschitz com constante $k = G(a_0)$, e desse modo, pela Proposição 6 temos um Ponto fixo. Como $0 < G(\hat{a}_{n+1}) < G(\hat{a}_n)$, chegamos a mesma conclusão sobre a Figura 9, já que $f = 50; r = 0,04; \hat{m} = (0.5, 0.55, 0.8); a_0 = 21$, então a sequência $\hat{a}_n$ aqui é convergente e, pelas simulações realizadas, converge para o valor *zero* como podemos examinar na Figura 12.

4. Conclusão

A boa compreensão das propriedades de um Espaço Métrico aliados à teoria fuzzy e alguns teoremas provados em Barros et al. (2000) possibilitaram a simulação de dois casos em aplicações biomatemáticas envolvendo a população de afídeos.

No primeiro caso, analisamos a estabilidade do modelo de equações de diferenças a partir do Teorema 6 e da completude do espaço dos números fuzzy. No segundo caso, foi proposto um modelo baseado no Centro de Gravidade dos números fuzzy envolvidos e sua estabilidade analisada a partir do Teorema 2 e da análise clássica de estabilidade para equações de diferenças. Além disso, o Teorema 2, proposto nesse artigo, foi útil para viabilizar a obtenção dos termos da sequência, não necessitando assim calcular a Extensão de Zadeh para cada iteração. Confirmando o que foi descrito por Whitham (1978), verificamos durante as simulações (elaboradas com o *software* MATLAB)que mesmo com parâmetros definidos arbitrariamente, pequenas alterações nos parâmetros definidos previamente podem alterar de modo drástico as gerações posteriores de afídeos. Como trabalho futuro, uma sugestão seria uma generalização do Teorema 2.

Referências

Alcock, J. (2016). *Comportamento animal: uma abordagem evolutiva.* Artmed editora.

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de *Coleção Textos Didáticos*. IMECC–UNICAMP.

Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (1997). On the continuity of the zadeh's extension. In *Proc. Seventh IFSA World Congress*, volume 2, páginas 3–8.

Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (2000). Fuzzy modelling in population dynamics. *Ecological modelling*, 128(1):27–33.

Bede, B. (2012). *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer Publishing Company, Incorporated.

Castelli, M. (2016). Teoremas de ponto fixo. *Universidade Estadual De Maringá Centro De Ciências Exatas Departamento De Matemática Programa De Pós-graduação Em Matemática*.

Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in biology*, volume 46. Siam.

Lima, E. L. (1983). *Espaços métricos*, volume 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro.

Puri, M. L., Ralescu, D. A., e Zadeh, L. (1993). Fuzzy random variables. In *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, páginas 265–271. Elsevier.

Whitham, T. G. (1978). Habitat selection by pemphigus aphids in response to response limitation and competition. *Ecology*, 59(6):1164–1176.

Whitham, T. G. (1980). The theory of habitat selection: examined and extended using pemphigus aphids. *The American Naturalist*, 115(4):449–466.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.