

# Sistemas p-fuzzy utilizando conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar

Rosana S. M. Jafelice<sup>1</sup>,

FAMAT – UFU, 38.408-236, Uberlândia/MG.

Nathali V. Cabrera<sup>2</sup>,

FEMEC – UFU, 38.408-236, Uberlândia/MG.

Marcos A. Câmara<sup>3</sup>,

FAMAT – UFU, 38.408-236, Uberlândia/MG.

**Resumo.** O objetivo deste trabalho é substituir uma equação diferencial e um conjunto de dados por sistemas baseados em regras fuzzy do tipo 2 intervalar. Inicialmente, o modelo parcialmente fuzzy (p-fuzzy) de Malthus é obtido através de um sistema baseado em regras fuzzy do tipo 2 intervalar utilizando o método de inferência de Mamdani generalizado e o método de defuzzificação é o centróide generalizado; em seguida, um modelo é obtido para sete dados populacionais do Peru no período de 1961 a 2016, utilizando o método de Takagi-Sugeno-Kang. A ANFIS (Adaptative Neuro-Fuzzy Inference Systems) é utilizada para obter o sistema baseado em regras fuzzy do tipo 1, que é comparado com o sistema baseado em regras fuzzy do tipo 2 intervalar para verificar qual se aproxima melhor dos dados da população. Nos dois estudos, calculamos o máximo do erro relativo em relação a solução determinística e em relação aos dados populacionais, respectivamente; o sistema baseado em regras fuzzy do tipo 2 intervalar se aproximou melhor destes pontos do que o sistema baseado em regras fuzzy do tipo 1.

**Palavras-chave:** *Método de Mamdani para Conjuntos Fuzzy do Tipo 2; Método de Takagi-Sugeno-Kang para Conjuntos Fuzzy do Tipo 2; Modelo de Malthus; População do Peru.*

---

<sup>1</sup>rmotta@ufu.br

<sup>2</sup>nathy232\_@hotmail.com

<sup>3</sup>camara@ufu.br

## 1. Introdução

A teoria dos conjuntos fuzzy do tipo 2 é um dos avanços recentes da teoria dos conjuntos fuzzy. Esta abordagem pretende ampliar a eficiência já comprovada da teoria clássica dos conjuntos fuzzy, atualmente conhecidos como conjuntos fuzzy do tipo 1, para situações reais de tomada de decisões (Jafelice e Bertone, 2016). Em (Peixoto, 2005) tivemos o primeiro trabalho que apresentou os sistemas parcialmente fuzzy (p-fuzzy). Nestes tipos de sistemas, as equações diferenciais são substituídas por Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) nos quais a relação que descreve as variações das funções com as suas respectivas variáveis de estado é descrita por uma base de regras ao invés de equações diferenciais. O método de inferência utilizado foi o Método de Mamdani e o método de defuzzificação, o Centro de Gravidade. Em (Ferreira, 2012) foi feito um estudo sobre aplicações de sistemas p-fuzzy modelando equações diferenciais parciais, o método de inferência utilizado foi o de Takagi-Sugeno-Kang. Ressaltando que os sistemas p-fuzzy em (Ferreira, 2012) foram obtidos utilizando a função ANFIS do software Matlab. A ANFIS é uma rotina de treinamento de sistemas de inferência fuzzy do tipo Takagi-Sugeno-Kang, que utiliza um algoritmo de aprendizagem, a partir de um conjunto de dados para determinar os parâmetros e as funções de pertinência de um SBRF.

O trabalho é organizado da seguinte forma: os objetivos são descritos na próxima seção, na seção 3 apresentamos os conceitos sobre conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar e os métodos de inferência para os conjuntos fuzzy do tipo 2, na seção 4 apresentamos o sistema p-fuzzy com conjuntos fuzzy do tipo 2 para o modelo de Malthus, descrevemos na seção 5 o sistema p-fuzzy com conjuntos fuzzy do tipo 2 para os dados populacionais do Peru; para finalizar temos as conclusões na última seção.

## 2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é utilizar SBRF do tipo 2 intervalar em sistemas p-fuzzy para descrever uma melhor aproximação à solução determinística e aos dados populacionais do Peru. Apresentamos dois modelos, inicialmente o modelo p-fuzzy de Malthus obtido através de um SBRF do tipo 2 intervalar utilizando o método de inferência de Mamdani e o método de defuzzificação é o centróide generalizado; em seguida, o modelo p-fuzzy obtido para sete da-

dos populacionais do Peru no período de 1961 a 2016, utilizando o método de Takagi-Sugeno-Kang. Neste caso, o SBRF do tipo 1, que é usado para comparar com o SBRF do tipo 2 intervalar é obtido utilizando a ANFIS. Depois determinamos o SBRF do tipo 2 intervalar empiricamente. Nos dois casos, calculamos o máximo do erro relativo em relação a solução determinística e em relação aos dados populacionais, respectivamente; o SBRF do tipo 2 intervalar se aproximou melhor destes pontos do que o SBRF do tipo 1, com uma pequena vantagem.

### 3. Preliminares

Nesta seção revisamos alguns conceitos básicos de conjuntos fuzzy do tipo 2, que serão usados nas próximas seções.

**Definição:** Um conjunto fuzzy tradicional ou conjunto fuzzy tipo 1,  $A$ , definido no conjunto universo  $X$  é a função

$$\begin{aligned} \mu_A & : X \rightarrow [0, 1] \\ x & \rightarrow \mu_A(x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, um conjunto fuzzy do tipo 1  $A$  é dado por:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}.$$

**Definição:** Um conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{A}$ , definido no conjunto universo  $X$  é a função

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}} & : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ (x, u) & \rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x, u). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) | (x, u) \in X \times [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) \in [0, 1]\}.$$

A função de pertinência primária do conjunto fuzzy do tipo 1 superior e inferior são denotadas por  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ ,  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ ,  $x \in X$ , respectivamente, e definidas em (Mendel et al., 2016):

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \sup\{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\},$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \inf\{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}.$$

A pertinência primária é definida como  $I_x = \{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}$ . Outro componente importante de  $\tilde{A}$  é,

$$J_x = \{(x, u) | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\},$$

assim, se  $J_x$  é conexo, então,

$$J_x = \{(x, u) | u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]\}.$$

O Domínio de Incerteza (DOU) para um conjunto fuzzy do tipo 2 é uma união de conjuntos ( $J_x$ ), dado em (Mendel et al., 2016):

$$DOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x$$

A Pegada de Incerteza (FOU) é a DOU para domínios conexos, definida em (Mendel et al., 2016):

$$FOU(\tilde{A}) = \{(x, u) | x \in X \text{ e } u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]\},$$

Em particular, quando  $\mu_{\tilde{A}}(x, u(x)) = 1$  para todo  $u(x) \in J_x$  e  $x \in X$ , o conjunto fuzzy é denominado conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar.

A estrutura de blocos do SBRF do tipo 2 é apresentado na Figura 1. O SBRF do tipo 2 é composto por cinco componentes: fuzzificador, inferência, base de regras, redutor do tipo e defuzzificador. A descrição de cada bloco do SBRF do tipo 2 é apresentada na figura 1.

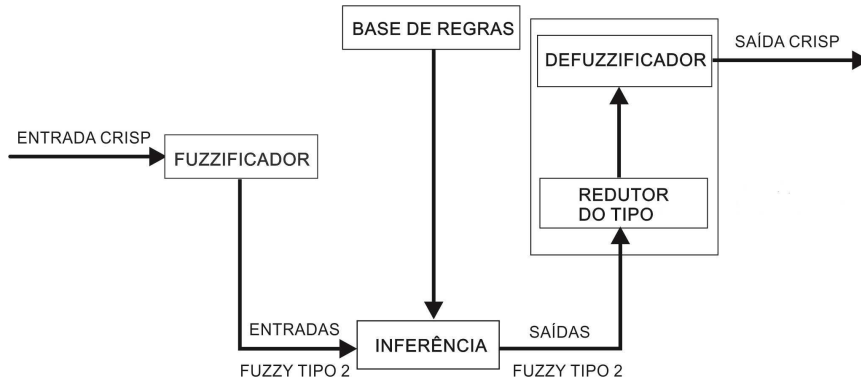


Figura 1: Sistema baseado em regras fuzzy tipo 2 (Castillo, 2014; Castillo e Jafelice, 2016; Rizol et al., 2011).

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar (SBRFT2I) é um sistema fuzzy que tem pelo menos um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar no antecedente ou no conseqüente de uma regra (Karnik e Mendel, 1999). Neste trabalho utilizamos dois métodos de inferência: o de Mamdani generalizado e o de Takagi-Sugeno-Kang. A seguir, descrevemos o SBRFT2I para cada um dos métodos de inferência:

1. SBRFT2I com o Método de Inferência de Mamdani para o tipo 2

- **Fuzzificador:** Seja  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_l) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_l$ , sendo  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, l$  universos dados. Cada coordenada recebe uma imagem pela função de pertinência relacionada aos conjuntos fuzzy do tipo 2,  $\tilde{X}_i$   $i = 1, 2, \dots, l$ ;
- **Base de Regras:** a base de regras do SBRF do tipo 2 permanece da mesma forma do tipo 1. A diferença entre o SBRF do tipo 1 e SBRF do tipo 2 está na natureza das funções de pertinência;  
 $R_1$ : Se  $x'_1$  é  $\tilde{A}_1$  e  $x'_2$  é  $\tilde{B}_1$  então  $y$  é  $\tilde{C}_1$ ;  
 $R_2$ : Se  $x'_1$  é  $\tilde{A}_2$  e  $x'_2$  é  $\tilde{B}_2$  então  $y$  é  $\tilde{C}_2$ .
- **Método de Inferência de Mamdani:** o bloco de inferência realiza as operações lógicas para conjuntos do tipo 2 com base nas regras fuzzy;
- **Redutor de Tipo:** o bloco redutor de tipo tem como objetivo utilizar o algoritmo de Karnik-Mendel (KM) que determina o mínimo ( $y_L$ ) e o máximo ( $y_R$ ) dos centróides de conjuntos fuzzy do tipo 1;
- **Defuzzificador:** um método convencional de defuzzificação é utilizado, por exemplo, o método do Centróide que é definido posteriormente.

Outros conceitos importantes nesta seção são:

- *t-norma:* é uma função  $\tau : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  comutativa, associativa e monótona com condições de fronteira  $0\tau x = 0$  e  $1\tau x = x$ . Um exemplo de *t-norma* é  $a\tau b = \min\{a, b\}$  (Pedrycz e Gomide, 1998).
- *s-norma:* é uma função  $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  comutativa, associativa e monótona com condições de fronteira  $0\gamma x = x$  e  $1\gamma x = 1$ . Um exemplo de *s-norma* é  $a\gamma b = \max\{a, b\}$  (Pedrycz e Gomide, 1998).

O método de inferência é uma generalização do que foi proposto por Mamdani. O esquema da figura 2 descreve este método com a entrada  $x' = (x'_1, x'_2)$ . Considerando as regras,  $R_1$  e  $R_2$  dadas anteriormete, com dois antecedente e um consequente dados por um conjunto fuzzy tipo-2 intervalar.

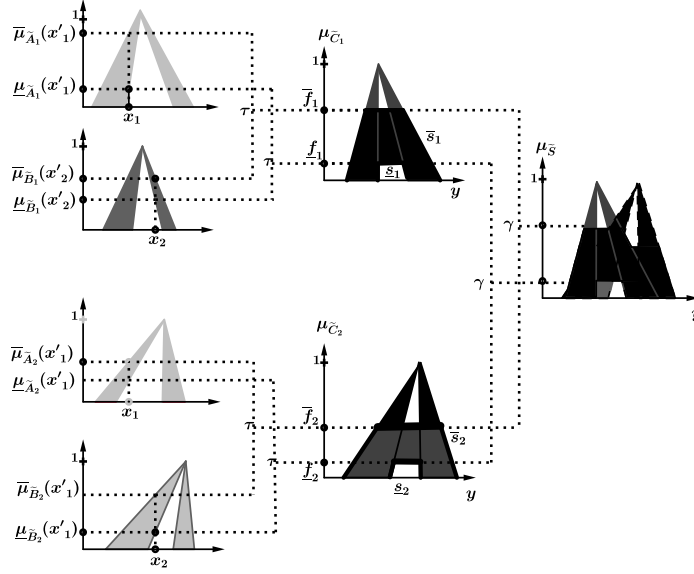


Figura 2: Método de inferência de Mamdani para um conjunto fuzzy tipo-2 intervalar utilizando a  $\tau$ -norma mínimo e a  $\gamma$ -norma máximo (Rizol et al., 2011) e (Cabrera, 2014).

Primeiro o grau de ativação inferior e superior das regras  $R_1$  e  $R_2$  são calculados. Calculamos

$$\underline{f}_n = \underline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1) \tau \underline{\mu}_{\tilde{B}_n}(x'_2) \text{ e } \bar{f}_n = \bar{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1) \tau \bar{\mu}_{\tilde{B}_n}(x'_2), \quad n = 1, 2.$$

Depois, a função de pertinência do resultante a partir do processo de inferência é calculada:

$$\mu_{\tilde{S}}(y) = [\underline{s}_1(y) \gamma \underline{s}_2(y), \bar{s}_1(y) \gamma \bar{s}_2(y)],$$

em que,

$$\underline{s}_n = \underline{f}_n \tau \underline{\mu}_{\tilde{C}_n}(y) \text{ e } \bar{s}_n = \bar{f}_n \tau \bar{\mu}_{\tilde{C}_n}(y), \quad n = 1, 2.$$

Observe que no esquema da figura 2 a saída obtida é um conjunto fuzzy do tipo-2. Em seguida, é utilizado o algoritmo de Karnik-Mendel (Mendel e Wu, 2007), para defuzzificar este conjunto. Também, é necessário introduzir algumas ferramentas teóricas importantes.

O conjunto,  $A_e$ , um conjunto fuzzy tipo-1, é dito imerso em  $\tilde{A}$  se,

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{A_e}(x) \leq \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X.$$

Na figura 3 é apresentado um conjunto fuzzy tipo 1,  $A_e$ , imerso em um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar  $\tilde{A}$ .

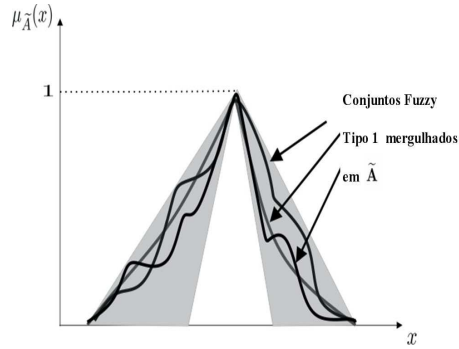


Figura 3: Conjuntos fuzzy tipo 1 imersos em conjunto fuzzy tipo 2 intervalar  $\tilde{A}$  (Mendel, 2007).

Dado um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar,  $\tilde{A}$ , definido em  $X$  com função de pertinência  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ , o centróide,  $C(\tilde{A})$ , é definido como a coleção dos centróides de todos os conjuntos fuzzy do tipo 1 imersos. Determinamos o centróide de  $\tilde{A}$ , considerando um conjunto fuzzy do tipo 1 imerso  $A_e(l)$  definido como

$$\mu_{A_e}(l) = \begin{cases} \bar{\mu}(x_i) & \text{if } x_i \leq l \\ \underline{\mu}(x_i) & \text{if } x_i > l \end{cases}$$

em que  $l$  é denominado o ponto switch de  $A_e(l)$ . Então, está demonstrado em (Mendel e Wu, 2007) que  $c_L(\tilde{A}) = \min_{l \in \mathbb{N}} \text{centroid}(A_e(l))$  existe e o ponto switch do correspondente conjunto imerso é  $L \in \mathbb{N}$ . Da mesma forma, dado o conjunto fuzzy  $A_e(r)$  definido por

$$\mu_{A_e}(r) = \begin{cases} \underline{\mu}(x_i) & \text{if } x_i \leq r \\ \bar{\mu}(x_i) & \text{if } x_i > r, \end{cases}$$

em que  $r$  é o ponto switch de  $A_e(r)$ ,  $c_R(\tilde{A}) = \max_{r \in \mathbb{N}} \text{centroid}(A_e(r))$  existe, com  $R \in \mathbb{N}$  como um ponto switch do correspondente conjunto imerso. Também, é mostrado em (Mendel e Wu, 2007) que

$$\text{centroid}(A_e(l)) = \frac{\sum_{i=1}^L x_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^L \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}.$$

$$\text{centroid}(A_e(r)) = \frac{\sum_{i=1}^R x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N x_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^R \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}.$$

O algoritmo de Karnik-Mendel (Mendel e Wu, 2007) determina os pontos switch  $L$  e  $R$  e como uma consequência o centróide de  $\tilde{A}$ . O valor defuzzificado do centróide é dado por:

$$C = \frac{c_L + c_R}{2}. \quad (3.1)$$

## 2. SBRFT2I com o método de inferência de Takagi-Sugeno-Kang

- **Fuzzificador:** transforma o vetor entrada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$  em um conjunto fuzzy do tipo 1 ou conjuntos fuzzy do tipo 2.
- **Base de Regras:** a base de regras do SBRFT2I tem uma estrutura similar como o SBRF do tipo 1. Geralmente o método de inferência de Takagi-Sugeno-Kang de primeira ordem é uma base de regras de  $k$  regras, cada uma tendo  $l$  antecedentes. A  $i$ -ésima regra pode ser expressa como:  
 $R^i$ : Se  $x_1$  é  $\tilde{A}_1^i$  e ... e  $x_l$  é  $\tilde{A}_l^i$  então  $Y^i = D_0^i + D_1^i x_1 + \dots + D_l^i x_l$ ;  $i = 1, \dots, k$ . Os consequentes  $D_j^i$  ( $j = 1, \dots, l$ ) são conjuntos fuzzy do tipo 1;  $Y^i$ , a saída da  $i$ -ésima regra é também um conjunto fuzzy do tipo 1 (porque é uma combinação linear de conjuntos fuzzy do tipo 1); e  $\tilde{A}_n^i$  ( $n = 1, \dots, l$ ) são conjuntos fuzzy antecedentes do tipo 2.
- **Método de Inferência de Takagi-Sugeno-Kang:** Esta pesquisa também utiliza método inferência de Takagi-Sugeno-Kang tipo 2 com uma entrada, o consequente na  $i$ -ésima regra é  $Y^i = D_0^i + D_1^i x_1$ , sendo  $i = 1, 2, 3$ . Seja  $D_0^i = [c_0^i - a_0^i, c_0^i + a_0^i]$  e  $D_1^i = [c_1^i - a_1^i, c_1^i +$



$a_1^i]$  em que  $c_0^i$  e  $c_1^i$  são centros;  $a_0^i$  e  $a_1^i$  são amplitudes de  $D_0^i$  e  $D_1^i$ , respectivamente. Considerando SBRFT2I com uma entrada, obtemos

$$\alpha^i = [\underline{\alpha}^i, \bar{\alpha}^i] = [\underline{\mu}_{\tilde{A}_1^i}(x_1), \bar{\mu}_{\tilde{A}_1^i}(x_1)].$$

O conseqüente é dado por  $Y^i = [Y_L^i, Y_R^i]$ , que é expresso por:

$$Y_L^i = c_1^i \cdot x_1 + c_0^i - a_1^i \cdot |x_1| - a_0^i;$$

$$Y_R^i = c_1^i \cdot x_1 + c_0^i + a_1^i \cdot |x_1| + a_0^i.$$

Utilizando o algoritmo de Karnik-Mendel (Mendel e Wu, 2007) determinamos:

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^3 \underline{\alpha}^i \cdot Y_L^i}{\sum_{i=1}^3 \underline{\alpha}^i};$$

$$C_R = \frac{\sum_{i=1}^3 \bar{\alpha}^i \cdot Y_R^i}{\sum_{i=1}^3 \bar{\alpha}^i}$$

- **Defuzzificador:** O valor defuzzificado é dado por  $C = \frac{C_L + C_R}{2}$ .

## 4. Sistema p-fuzzy do tipo 2 para o modelo de Malthus

O modelo contínuo de Malthus é dado por

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

cuja solução de (4.2) é dada por  $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$ , em que  $\alpha$  é uma taxa de crescimento constante. Em (Barros e Bassanezi, 2016) é apresentado o sistema p-fuzzy do tipo 1 para o modelo de Malthus tendo como variável de entrada ( $P$ ) e variável de saída  $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ . Utilizamos integração numérica, Regra do Trapézio, para obter o próximo valor da população. Inspirados neste sistema, construímos o SBRFT2I. Os gráficos das funções de pertinência da variável de entrada e de saída, população e  $\frac{dP}{dt}$ , são apresentados nas figuras 4 e 5, respectivamente. Os termos linguísticos das duas variáveis linguísticas são: muito baixa, baixa, média e alta.

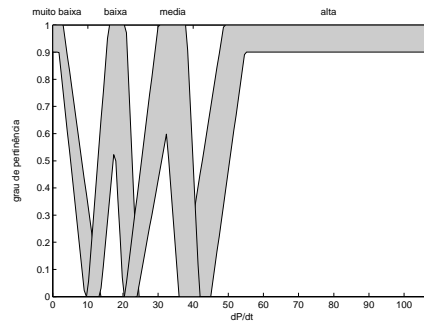
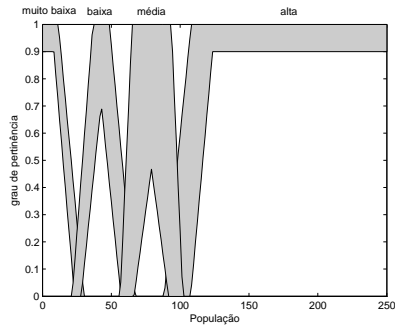


Figura 4: Funções de pertinência da variável linguística de entrada. Figura 5: Funções de pertinência da variável linguística de saída.

A base de regras fuzzy é dada por:

Se a população ( $P$ ) é muito baixa então  $\frac{dP}{dt}$  é muito baixa;

Se a população ( $P$ ) é baixa então  $\frac{dP}{dt}$  é baixa;

Se a população ( $P$ ) é média então  $\frac{dP}{dt}$  é média;

Se a população ( $P$ ) é alta então  $\frac{dP}{dt}$  é alta.

O método de inferência que utilizamos é o de Mamdani generalizado. Também, utilizamos integração numérica, Regra do Trapézio, para obter o próximo valor da população. Na Figura 6 são apresentados os gráficos da solução determinística, da curva da população em função do tempo obtida pelo p-fuzzy do tipo 1 e da curva da população em função do tempo obtida pelo p-fuzzy do tipo 2.

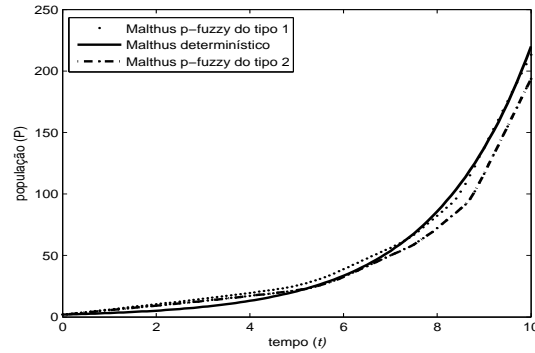


Figura 6: População em função do tempo.

O sistema p-fuzzy obtido pelo SBRF do tipo 1 para o Modelo de Malthus tem o máximo erro relativo em relação a solução determinística em todo instante estudado é igual a 1.038, enquanto o SBRF do tipo 2 intervalar tem 0.819.

## 5. Sistema p-fuzzy do tipo 2 para dados populacionais do Peru

A partir de dados coletados nos últimos censos da população do Peru de 1961 a 2016, Tabela 1, determinamos o SBRF do tipo 1 através da ANFIS.

Tabela 1: Dados da população do Peru

Ano	População (milhões)
1961	10.420357
1972	14.121564
1981	17.762231
1993	22.639443
2007	28.220764
2013	30.475000
2016	31.488655

O SBRF do tipo 1 tem como variável de entrada ( $p$ ) com suporte  $[10.43, 31.98]$  em milhões de habitantes e variável de saída  $\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)$ . A ANFIS utiliza o

método de inferência de Takagi-Sugeno-Kang e calculamos o próximo valor da população ( $P$ ), com integração numérica, aplicando a Regra de Simpson. Construímos o SBRFT2I baseado no SBRF do tipo 1. Os gráficos da figura 7 são das funções de pertinência da variável de entrada, população; os termos linguísticos são baixa, média e alta.

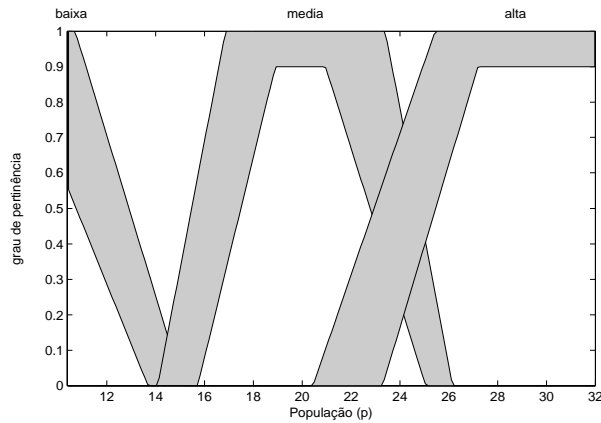


Figura 7: Funções de pertinência da variável linguística de entrada.

A base de regras fuzzy é dada por:

Se a população ( $p$ ) é baixa então  $[0.128, 0.172] + [0.01, 0.039]p$ ;

Se a população ( $p$ ) é média então  $[0.4331, 0.6069] + [-0.011521, -0.001521]p$ ;

Se a população ( $p$ ) é alta então  $[0.9169, 1.0831] + [-0.03914, 0.00086]p$ .

O método de inferência que utilizamos é o de inferência de Takagi-Sugeno-Kang, apresentado na seção 3. Também, utilizamos integração numérica, Regra de Simpson, para obter o próximo valor da população. Na figura 8 são apresentados os dados da população do Peru, e os gráficos das curvas da população em função do tempo obtida pelo p-fuzzy do tipo 1 e do tipo 2. Através deste estudo podemos estimar os valores da população todo o ano porque a simulação é realizada com espaçamento  $h = 1$ .

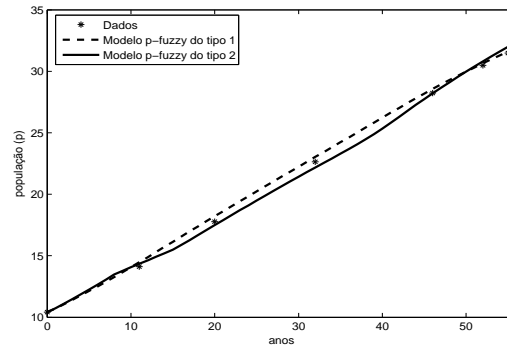


Figura 8: População(milhões) em função dos anos.

O sistema p-fuzzy obtido pelo SBRF do tipo 1 para os dados da população do Peru através da ANFIS tem o máximo erro relativo nos instantes calculados em relação aos dados de 0.0255, enquanto o SBRFT2I tem 0.0205.

## 6. Conclusões

Os sistemas p-fuzzy do tipo 2 intervalar obtiveram uma melhor aproximação da solução determinística no modelo de Malthus e dos dados populacionais do Peru, quando determinamos o máximo erro relativo nos instantes calculados. Ressaltamos que a ANFIS utiliza um algoritmo de aprendizagem para identificar, a partir de dados, os parâmetros e funções de pertinências do SBRF com o método de inferência de Takagi-Sugeno-Kang. Assim, mesmo o SBRF do tipo 1 sendo obtido através de uma rotina de treinamento; o SBRF do tipo 2 intervalar ainda se aproximou melhor dos dados.

## Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2016). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 of *Coleção Textos Didáticos*. IMECC - UNICAMP, Campinas/SP, 3ª edition.
- Cabrera, N. (2014). Aplicação da extensão de zadeh para conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-Brasil.

- Castillo, E. R. (2014). Modelagem da dinâmica de um grupo de indivíduos HIV positivos com parâmetro fuzzy do tipo 2. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - Brasil.
- Castillo, E. R. e Jafelice, R. M. (2016). *Modelagem de Indivíduos HIV Positivos com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 - Um aporte na Biomatemática*. Novas Edições Acadêmicas, Niemcy, 1<sup>a</sup> edition.
- Ferreira, D. P. L. (2012). Sistema p-fuzzy aplicado às equações diferenciais parciais. Dissertação de Mestrado, FAMAT - UFU, Uberlândia/MG.
- Jafelice, R. S. M. e Bertone, A. M. A. (2016). Conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar: Teoria e aplicações. In *Mini-curso apresentado no IV Quarto Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy*, Campinas/SP.
- Karnik, N. N. e Mendel, J. M. (1999). Applications of type-2 fuzzy logic systems to forecasting of time-series. *Information Sciences*, 120(1–4):89–111.
- Mendel, J. (2007). A reprint “type-2 set and systems: An overview”. *Supplement to IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2(1):20–29.
- Mendel, J. e Wu, H. (2007). New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule. *Information Sciences*, 177:360–377.
- Mendel, J. M., Rajati, M. R., e Sussner, P. (2016). On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets as well as some recommended changes. *Information Sciences*, 340–341:337–345.
- Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT Press, Cambridge.
- Peixoto, M. S. (2005). *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo*. Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP.
- Rizol, P. M. S., Mesquita, L., e Saotome, O. (2011). Lógica fuzzy tipo-2. *Revisata Sodebras*, 6:27–46.