

Ajuste de curvas de crescimento do comprimento do cladódio de *Nopalea Cochenillifera*

Leandro R.R. Lucena¹, Maurício L.M.V. Leite²,

Juliana S. Pereira³, Anderson B. Cavalcante⁴

Depto. Zootecnia, UAST – UFRPE, 56.909-535, Serra Talhada/PE.

Resumo A palma forrageira destaca-se como uma importante reserva alimentar animal, devido ao seu alto potencial de produção de fitomassa, tolerância à seca, alto valor energético, grande reserva de água e fácil propagação. Foram utilizadas 300 mudas de palma forrageira (*Nopalea cochenillifera*), onde foram avaliados a espessura, comprimento e largura no período de 51 a 93 dias após o plantio. Objetivando modelar o crescimento do comprimento do cladódio em relação a idade, espessura e largura do cladódio, foram ajustados os modelos de regressão Logístico, Gompertz, Weibull, Potência, Tangente hiperbólica, Gamma e Polinomial quadrático. Verificou-se que os modelos logístico, tangente hiperbólico e polinomial quadrático apresentaram as melhores estimativas para explicar o comportamento do crescimento dos cladódios. O modelo logístico apresentou grau de explicação de 99,35% e $AIC=-3.18$ e $SQ_{res}=0,4657$, já o modelo tangente hiperbólico apresentou R^2 de 99,9%, $AIC=-23,155$ e $SQ_{res}=0,076$, enquanto que o modelo polinomial quadrático apresentou grau de explicação de 99,97%, $AIC=-6,56$ e $SQ_{res}=0,041$. Optou-se pelo modelo tangente hiperbólico como o mais adequado para explicar o crescimento do comprimento do cladódio, pois o mesmo apresentou menor AIC e R^2 e SQ_{res} bem próximo ao modelo quadrático, além de apresentar uma variável a menos que o modelo quadrático.

Palavras-chave: Modelos de Regressão; Regressão Não-linear; Palma; Cladódio.

¹leandroricardo_est@yahoo.com.br

²nopalea21@yahoo.com.br

³julianasouza.uni@gmail.com

⁴andersonbarcante@outlook.com

1. Introdução

O Semiárido pernambucano é uma região que possui grande potencial pecuário, entretanto apresenta baixa disponibilidade e qualidade das forragens ao longo do ano, em função da sazonalidade das chuvas e dos longos períodos de seca, com chuvas concentradas em determinadas épocas, geralmente de três a quatro meses do ano.

Segundo Leite et al. (2014), a baixa capacidade de suporte forrageiro das caatingas, o manejo e aproveitamento inadequado das pastagens, além do reduzido uso de tecnologias de convivência com as secas ocasionam baixa produtividade dos rebanhos.

A palma forrageira destaca-se nesse cenário como uma importante reserva alimentar animal, devido ao seu alto potencial de produção de fitomassa, tolerância à seca, alto valor energético, boa aceitabilidade, boa digestibilidade, grande reserva de água e fácil propagação ((Oliveira et al., 2010); (Nunes, 2011); (Oliveira, 2011); (Almeida, 2012); (Júnior et al., 2014); (Leite et al., 2014)). Além disso, a palma pode ser mantida no campo, mesmo na seca, não necessitando assim de armazenamento.

A palma é amplamente utilizada no semiárido brasileiro, no entanto, houve uma considerável redução nos palmais durante os últimos anos, causada principalmente pela ação da Cochonilha-do-Carmim (*Dactylopius opuntiae* Cockerell), considerada a principal praga da palma no Nordeste brasileiro (Santos et al., 2010).

O conhecimento das curvas de crescimento de uma espécie fornece informações muito úteis no cultivo e manejo de populações naturais, e têm grande importância biológica, pois possibilitam a viabilidade do cultivo de uma espécie pela avaliação da taxa de crescimento. A curva descrevendo uma sequência de medidas de determinada característica de alguma espécie em função do tempo, geralmente peso, altura, espessura, largura ou diâmetro, é chamada de curva de crescimento (Fernandes et al., 2012). Em geral, este tipo de curva apresenta aspecto de crescimento exponencial ou sigmoidal (formato de "S"), que é muito bem modelado pela regressão não linear (Fernandes et al., 2012).

2. Objetivos

- Modelar o crescimento do comprimento do cladódio através de uma série de modelos de regressão (lineares, não lineares e polinomiais).

3. Metodologia

3.1. Dados

A pesquisa foi conduzido na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Unidade Acadêmica de Serra Talhada (UAST) situada no município de Serra Talhada. Foram utilizadas 300 mudas de palma forrageira (*Nopalea cochenillifera*), clone Doce Gigante, resistente à cochonilha-do-carmim. As mudas foram obtidas através do fracionamento de cladódios, provenientes de um palmal, com três anos de idade, situado na UAST.

As frações dos cladódios foram plantadas em sacos de poliéster contendo uma mistura de 1:1 de solo e adubo orgânico (esterco bovino curtido), e foram mantidas sobre o solo, em local aberto e irrigadas três vezes por semana. A primeira avaliação foi realizada aos 51 dias após o plantio e as seguintes aconteceram periodicamente a cada sete dias, sendo avaliados espessura, comprimento e largura do cladódio das mudas até o 93º dia. O material utilizado para a mensuração foi trena e paquímetro.

3.2. Modelos de Regressão

Para avaliar a relação entre o comprimento do cladódio e as variáveis explicativas idade, largura e espessura dos mesmos, foram escolhidos vários modelos de regressão para explicar tal relação. Os modelos utilizados para avaliar a relação foram os seguintes: Weibull, Logístico, Gompertz, Tangente hiperbólico, Potência, Gamma e Polinomial.

3.2.1 Modelo Weibull

Seja X é uma variável aleatória com distribuição weibull, então sua função de densidade de probabilidade é definida por:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\alpha^\gamma} x^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma\right\}, \quad x \leq 0 \quad (3.1)$$

logo, definimos o modelo de regressão weibull por:

$$Y_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 dias_i + \beta_2 esp_i + \beta_3 larg_i) \exp(\epsilon_i) \quad (3.2)$$

onde, $i=1,2,\dots,7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; $dias_i$ é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; $larg_i$ é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento e apresenta distribuição weibull de parâmetros α e γ . As incógnitas β_0 , β_1 , β_2 e β_3 são os parâmetros associados ao modelo.

3.2.2 Modelo Logístico

Seja X uma variável aleatória com distribuição Logística, definimos a função de densidade de probabilidade em (3.3)

$$f(x) = \frac{\omega \beta \exp(\alpha + \beta X)}{(\exp(\alpha) + \exp(\beta X))^2} \quad (3.3)$$

então, definimos o modelo Logístico por:

$$Y_i = \frac{w}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 dias_i + \beta_2 esp_i + \beta_3 larg_i)} + \epsilon_i \quad (3.4)$$

onde, $i = 1, 2, \dots, 7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; $dias_i$ é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; $larg_i$ é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento com função de distribuição normal com média 0 e variância σ^2 constante. As incógnitas ω , β_0 , β_1 , β_2 e β_3 são os parâmetros associados ao modelo.

3.2.3 Modelo Gompertz

Seja X uma variável aleatória com distribuição Gompertz, definimos a função de densidade de probabilidade em (3.5)

$$f(x) = \omega \beta \exp(-\exp(\alpha - \beta X)) \quad (3.5)$$

então, definimos o modelo Gompertz por:

$$Y_i = w * \exp(-\exp(\beta_0 + \beta_1 dias_i + \beta_2 esp_i + \beta_3 larg_i)) + \epsilon_i \quad (3.6)$$

onde, $i = 1, 2, \dots, 7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; $dias_i$ é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; $larg_i$ é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento com função de distribuição normal com média 0 e variância σ^2 constante. As incógnitas ω , β_0 , β_1 , β_2 e β_3 são os parâmetros associados ao modelo.

3.2.4 Modelo Potência

O modelo de regressão potência é definido em (3.7)

$$Y_i = (\beta_0 dias_i^{\beta_1} esp_i^{\beta_2} larg_i^{\beta_3}) \epsilon_i \quad (3.7)$$

onde, $i = 1, 2, \dots, 7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; $dias_i$ é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; $larg_i$ é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento com função de distribuição normal com média 0 e variância σ^2 constante. As incógnitas β_0 , β_1 , β_2 e β_3 são os parâmetros associados ao modelo.

3.2.5 Modelo Tangente hiperbólica

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição tangente Hiperbólica, então definimos a função de densidade de probabilidade em 3.8

$$f(x) = \beta \gamma X^{\gamma-1} (1 - \tanh(\beta X^\gamma))^2 \quad (3.8)$$

logo, o modelo de regressão tangente hiperbólico é dado por:

$$Y_i = \omega \tanh(\beta_0 dias_i^{\beta_1} esp_i^{\beta_2} larg_i^{\beta_3} \epsilon_i) \quad (3.9)$$

onde, $i = 1, 2, \dots, 7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; $dias_i$ é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; $larg_i$ é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento com função de distribuição normal com média 0 e variância σ^2 constante. As incógnitas ω , β_0 , β_1 , β_2 e β_3 são os parâmetros associados ao modelo.

3.2.6 Modelo Gamma

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição Gamma, definimos a função de densidade de probabilidade Gamma em 3.10

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (3.10)$$

Definimos o modelo de regressão Gamma com função de ligação identidade dado por:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \text{dias}_i + \beta_2 \text{esp}_i + \beta_3 \text{larg}_i + \epsilon_i \quad (3.11)$$

onde, $i = 1, 2, \dots, 7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; dias_i é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; larg_i é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento com função de distribuição gamma de parâmetros α e β . As incógnitas $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ e β_3 são os parâmetros associados ao modelo.

3.2.7 Modelo Polinomial

O modelo de regressão Polinomial é definido em (3.12)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \text{dias}_i + \beta_2 \text{esp}_i + \beta_3 \text{larg}_i + \beta_4 \text{dias}_i^2 + \beta_5 \text{esp}_i^2 + \beta_6 \text{larg}_i^2 + \epsilon_i \quad (3.12)$$

onde, $i = 1, 2, \dots, 7$; Y_i é o comprimento do i -ésimo cladódio após o plantio; dias_i é o i -ésimo dia de avaliação; esp_i é a espessura do i -ésimo cladódio após plantio; larg_i é a largura do i -ésimo cladódio após plantio e ϵ_i é o i -ésimo erro associado ao comprimento do cladódio, em que ϵ_i é o erro associado ao i -ésimo comprimento com função de distribuição normal com média 0 e variância σ^2 constante. As incógnitas $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ e β_6 são os parâmetros associados ao modelo.

3.3. Critérios de Seleção de Modelo

Os modelos foram avaliados pelos seguintes critérios: Coeficiente de determinação do modelo (R^2), critério de informação de Akaike (AIC) e pela soma dos quadrado dos resíduos (SQres).

3.3.1 Soma dos Quadrado dos Resíduos (SQres)

Seja \hat{Y}_i o i -ésimo valor do comprimento do cladódio após ajuste do modelo, então definimos a soma dos quadrados dos resíduos para este estudo pela seguinte expressão:

$$SQ_{res} = \sum_{i=1}^7 (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (3.13)$$

3.3.2 Coeficiente de Determinação do Modelo (R^2)

O coeficiente de determinação do modelo é expresso pela razão entre a soma de quadrado do modelo (SQM) e a soma de quadrados total (SQT), ou seja,

$$R^2 = \frac{SQ_{mod}}{SQ_{total}} = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{total}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^7 (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^7 (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (3.14)$$

3.3.3 Critério de Informação de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike (AIC) definido por Akaike (1974) é dado por:

$$AIC = -2 \ln L(x/\hat{\theta}) + 2(p) \quad (3.15)$$

onde, $L(x/\hat{\theta})$ é a função de máxima verossimilhança, definida como sendo o produtório da função de densidade.

4. Resultados

O modelo Weibull não apresentou boas estimativas dos valores observados para o comprimento do cladódio em relação aos períodos de avaliação, Figura 1. O modelo apresentou um $R^2=0.9558$, $AIC=-12.6$ e $SQ_{res}=5.4827$. O modelo weibull ajustado ficou definido por:

$$\hat{Y} = \exp(-1.623 + 0.012dias - 6.959esp)$$

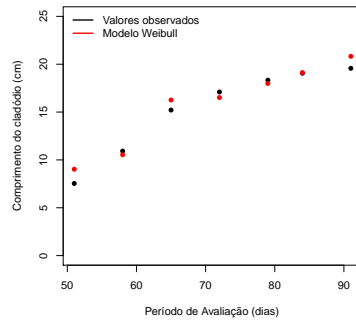


Figura 1: Ajuste do modelo de Weibull para comprimento dos cladódios

O modelo de regressão logístico apresentou estimativas muito próximas dos comprimentos do cladódio para todo período de avaliação, Figura 2.

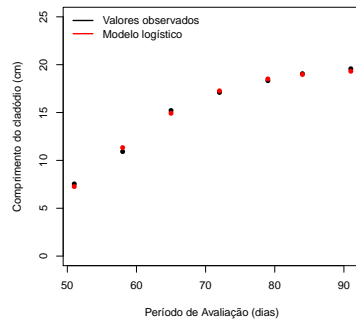


Figura 2: Ajuste do modelo de regressão logístico para comprimento dos cladódios

O modelo logístico apresentou grau de explicação de $R^2=0.9935$, $AIC=-3.18$ e $SQ_{res}=0.4657$. Após ajuste dos parâmetros o modelo logístico ficou definido por:

$$\hat{Y} = \frac{19.57}{1 + \exp(6.698 - 0.121dias)}$$

Na Figura 3 verifica-se que o modelo de Gompertz apresentou estimativas bem próxima dos valores observado para o comprimento do cladódio entre 65°

e 86º dia de avaliação, nos dois períodos iniciais de avaliação o modelo apresentou estimativas muito diferentes das observadas. O modelo de Gompertz apresentou grau de explicação de $R^2=0.9864$, $AIC=-0.286$ e $SQ_{res}=1.929$. A curva ajustada ao modelo Gompertz é dada por:

$$\hat{Y} = 19.57 * \exp(-\exp(5.528 - 0.106dias))$$

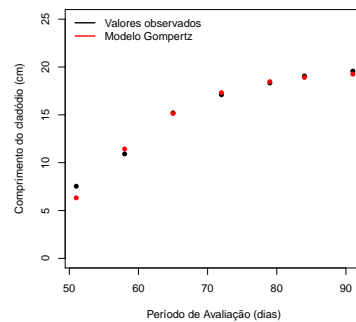


Figura 3: Ajuste do modelo Gompertz para comprimento dos cladódios

O modelo de regressão potência não conseguiu acompanhar os valores observados de comprimento do cladódio, o modelo apresentou estimativas bastante diferentes das observadas, Figura 4.

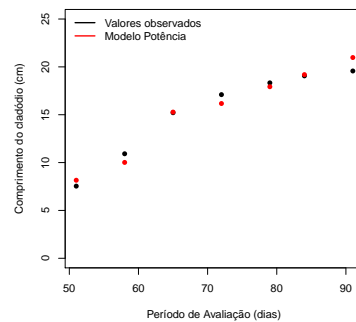


Figura 4: Ajuste do modelo potência para comprimento dos cladódios.

O modelo potência apresentou alto grau de explicação $R^2=0.9996$, $AIC=-14.448$ e $SQ_{res}=4.218$. A curva ajusta ao modelo potência ficou definida por:

$$\hat{Y} = dias^{1.111} esp^{2.923}$$

O modelo tangente hiperbólica apresentou ajustes similares aos valores observados do comprimento do cladódio para todo o período de avaliação, em alguns períodos de avaliação como o 72º e 86º dia de avaliação o modelo apresentou estimativas idênticas às observadas, Figura 5. O modelo apresentou um grau de explicação de $R^2=0.999$, $AIC=-23.155$ e $SQ_{res}=0.076$. A curva ajusta ao modelo de regressão tangente hiperbólica é dada por

$$\hat{Y} = 19.57 \tanh(0.00001 dias^{2.933} esp^{1.717})$$

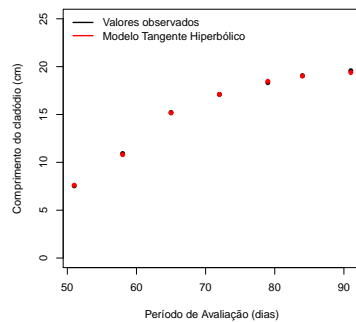


Figura 5: Ajuste do modelo tangente hiperbólico para comprimento dos cladódios

O modelo de regressão gamma conseguiu acompanhar o crescimento do cladódio, mas não apresentou boas estimativas em relação aos valores observados do comprimento do cladódio para todo período de avaliação, Figura 6. O modelo apresentou um altíssimo poder de explicação de $R^2=0.9799$, $AIC=20.97$ e $SQ_{res}=2.4965$. O modelo gamma ajustado é definido por:

$$\hat{Y} = -39.4 + 0.22 dias + 78.41 esp$$

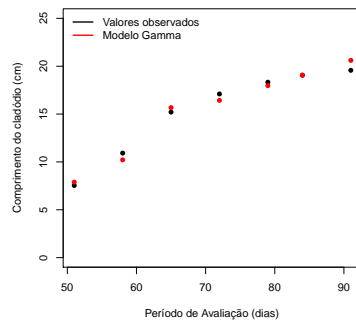


Figura 6: Ajuste do modelo gamma para comprimento dos cladódios

Assim como o modelo tangente hiperbólico o modelo polinomial apresentou estimativas bastante similares aos valores observados do comprimento do cladódio para todo período de estudo, em alguns momentos de avaliação o modelo apresentou estimativas idênticas às observadas como no 51º dia de avaliação, Figura 7. O modelo polinomial apresentou altíssimo poder de explicação $R^2=0.9997$, critério de informação de Akaike de $AIC=-6.56$ e $SQ_{res}=0.041$. A curva ajusta para o modelo polinomial ficou definida por:

$$\hat{Y} = -48.17 + 1.079dias + 34.06esp - 0.0058dias^2$$

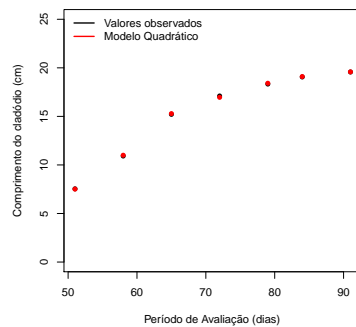


Figura 7: Ajuste do modelo polinomial quadrático para comprimento dos cladódios

Verificou-se que os modelos que melhor explicaram o ajuste do crescimento do cladódio foram os modelos logístico, tangente hiperbólico e polinomial. Estes apresentaram estimativas similares aos valores observados para o comprimento do cladódio nos períodos de avaliação. Os modelos apresentam coeficiente de determinação com elevado grau de explicação, baixo AIC e menores soma de quadrados dos resíduos.

Resultados similares para o ajuste de modelos foram observados nos estudos de Ramos et al. (2015) utilizou modelo de regressão polinomial de primeira ordem para explicar o crescimento do cladódio utilizando diferentes doses de adubação orgânica chegando a um grau de explicação de 93,0% para um determinada dosagem, já Silva et al. (2014) verificou que o modelo de regressão logístico é o mais adequado para explicar o crescimento da área do cladódio em relação aos dias após o plantio, enquanto Prado et al. (2013) observou em seu estudo que o modelo logístico se adequa muito bem para explicar o crescimento de frutos do coqueiro anão, Ramos et al. (2011) em seu estudo verificou que o modelo polinomial de primeira ordem é o mais adequado ($R^2=85,9\%$) para explicar o número de cladódio em relação aos dias após o plantio, enquanto que Terra et al. (2010) que verificou o modelo logístico o mais adequado para explicar o crescimento da tamareira-anã.

Os três critérios de seleção utilizados para escolha do modelo que melhor explicasse o comportamento do crescimento do cladódio determinaram os modelos logístico, tangente hiperbólico e polinomial como os mais adequados. Entretanto, como o modelo de regressão tangente hiperbólico apresentou menor AIC que os outros dois modelos, e R^2 e SQ_{res} bem próximo do modelo polinomial, além de apresentar uma variável a menos quando comparado com o modelo polinomial, optou-se como o mais adequado entre os três modelos para explicar o comportamento do comprimento do cladódio.

5. Conclusões

Os modelos logístico, tangente hiperbólico e polinomial foram os mais adequados para explicar o comportamento do crescimento do comprimento do cladódio. Os três modelos escolhidos como mais adequados apresentam coeficiente de determinação com elevado grau de explicação, baixo AIC e menores soma de quadrados dos resíduos. O modelo de regressão tangente hiperbólico foi dentre os três modelos selecionados como o mais adequado para explicar

o comportamento do comprimento do cladódio, pois apresentou menor AIC que os outros dois modelos, e R^2 e SQ_{res} bem próximo do modelo polinomial, além de apresentar uma variável a menos quando comparado com o modelo polinomial.

Referências

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19:716–723.
- Almeida, R. F. (2012). Palma forrageira na alimentação de ovinos e caprinos no semiárido brasileiro. *Revista Verde*, 7:08–14.
- Fernandes, T. L., Pereira, A. A., e Muniz, J. A. (2012). Comparação de modelos não-lineares no estudo das curvas de crescimento do carangueijo de água doce. *Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*, 2:2375–2387.
- Júnior, J. G. B. G., Silva, J. B. A., Moraes, J. H. G., e Lima, R. N. (2014). Palma forrageira na alimentação de ruminantes: cultivo e utilização. *Acta Veterinaria Brasílica*, 8:78–85.
- Leite, M. L. M. V., Silva, D. S., Andrade, A. P., Pereira, W. E., e Ramos, J. P. F. (2014). Caracterização da produção de palma forrageira no cariri paraibano. *Revista Caatinga*, 27:192–200.
- Nunes, C. S. (2011). Usos e aplicações da palma forrageira como uma grande fonte de economia para o semiárido nordestino. *Revista Verde*, 6:58–66.
- Oliveira, A. S. C. (2011). A palma forrageira: alternativa para o semi-árido. *Revista Verde*, 6:49–58.
- Oliveira, F. T., Souto, J. S., Silva, R. P., Filho, F. C. A., e Júnior, E. B. P. (2010). Palma forrageira: adaptação e importância para ecossistemas áridos e semiáridos. *Revista Verde*, 5:27–37.
- Prado, T. K. L., Muniz, J. A., Savian, T. V., e Sáfyadi, T. (2013). Ajuste do modelo logístico na descrição do crescimento de frutos de coqueiro anão por meio de algoritmos iterativos mcmc. *Revista Brasileira de Biometria*, 31:216–232.

- Ramos, J. P. F., Leite, M. L. M. V., Junior, S. O., Nascimento, J. P., e Santos, E. M. (2011). Crescimento vegetativo de *Opuntia ficus-indica* em diferentes espaçamentos de plantio. *Revista Caatinga*, 24:41–48.
- Ramos, J. P. F., Santos, E. M., Pinho, R. M. A., Bezerra, H. F. C., Pereira, G. A., ao, G. R. B., e Oliveira, J. S. (2015). Crescimento da palma forrageira em função da adubação orgânica. *Revista Eletrônica de Veterinária*, 16:01–11.
- Santos, M. V. F., Lira, M. A., e DubeuxJR, J. C. B. (2010). Palma forrageira. *Plantas Forrageiras*, 6:459–493.
- Silva, T. G. F., Miranda, K. R., Santos, D. C., Queiroz, M. G., Silva, M. C., Neto, J. F. C., e Araújo, J. E. M. (2014). área do cladódio de clones de palma forrageira: modelagem, análise e aplicabilidade. *Agrária - Revista Brasileira de Ciências Agrárias*, 9:633–641.
- Terra, M. F., Muniz, J. A., e Savian, T. V. (2010). Ajuste dos modelos logístico e gompertz aos dados de crescimento de frutos da tamareira-anã (*Phoenix roebelenii* obrien. *Magistra*, 22:01–07.