

Um modelo de percolação em rede de Bethe não-homogênea para fogo em floresta

Heliton R. Tavares¹, Raimundo N.C Souza², M.R. Madruga³, T.F. Oliveira⁴
FAEST-PPGME, ICEN – UFPA, 66.075-110, Belém/PA.

Resumo: Modelos de percolação não-homogênea podem ser apropriados para simular o avanço de um tumor em um organismo vivo com diferentes situações imunológicas ou tipo celular, bem como a proliferação de insetos que dependem da temperatura e umidade, que variam entre dia e noite, ou no alastramento de fogo em uma floresta sujeita a variações topológicas e climáticas, que podem ser parcialmente sistemáticas. Este artigo trata de uma nova classe de modelos de percolação, a rede de Bethe não-homogênea, cuja probabilidade de um elo no nível n estar aberto muda de acordo com n . Consideramos o caso em que a probabilidade de um elo e_n do nível n estar aberto é dada pela função senóide $\bar{p}(e_n) = p + (1 - p)|\sin(n\pi/180)|$. Para este modelo será provada a existência de um ponto crítico p_c não trivial a partir do qual o evento se alastra. São apresentados ainda resultados de simulações que mostram o comportamento da probabilidade de percolação com transição de fase de segunda ordem em p_c .

Palavras chave: Percolação não-homogênea, Rede de Bethe, Ponto crítico.

1. Introdução

Os impactos causados pelo fogo na vegetação da Amazônia são pouco conhecidos, apesar de previsões sugerirem que os incêndios florestais se tornarão ainda mais frequentes e mais intensos no futuro (Balch, 2008). Os autores ressaltam que as florestas de transição são extremamente vulneráveis a

¹heliton@ufpa.br

²raimundo-de.souza@hotmail.com

³madruga@ufpa.br

⁴tfo@ufpa.br

incêndios recorrentes. A mortalidade de árvores e cipós aumentam em torno de 100%. Além disso, os incêndios florestais diminuem a quantidade de espécies em 50% em relação a florestas não afetadas pelo fogo. Estas áreas, segundo Balch (2008), tornam-se mais suscetíveis à invasão de gramíneas não nativas, dificultando a regeneração natural da vegetação. Ainda, um terço de toda a biomassa viva da floresta é perdida após as primeiras queimadas, tornando uma grande ameaça para a biodiversidade da floresta. Secas mais intensas e frequentes previstas para a região terão graves consequências na dinâmica dessas florestas.

Um incêndio florestal superficial sempre começa através de um pequeno foco (fósforo aceso, toco de cigarro, fagulha, pequena fogueira etc.), e inicialmente tende a se propagar para todos os lados, de forma aproximadamente circular, tendo em um segundo estágio sua forma alterada pela ação do vento, umidade e da topografia e tipo da floresta. Na Figura 1(a) temos um exemplo de alastramento do fogo, enquanto na Figura 1(b) temos dados climáticos de uma região da amazônia.

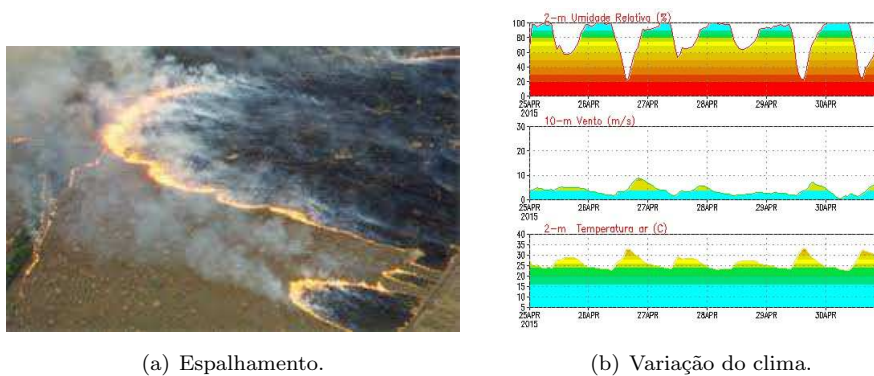


Figura 1: Comportamento não homogêneo de condições climáticas.

O estudo do comportamento do fogo é imprescindível para a avaliação dos efeitos da queima sobre as árvores e o ambiente de forma geral. Sendo assim o presente trabalho tem como objetivo principal apresentar, através de um modelo de percolação não-homogênea, algumas considerações sobre propagação do fogo.

2. O modelo de Percolação e a Rede de Bethe

A Teoria da Percolação trata genericamente do fenômeno da propagação de um fluido em meio poroso, seja água ou gás no interior de uma rocha. Broadbent e Hammersley (1957) propuseram o primeiro modelo deste fenômeno. Desde então, muitos outros modelos têm sido propostos para representar o meio poroso.

Nos últimos anos, grande progresso tem sido alcançado relativamente às técnicas usadas para resolver problemas de percolação e, também substancial expansão dos modelos de percolação e suas aplicações em várias áreas do conhecimento científico, tais como física, química, biologia, geologia, engenharia, dentre outras. Algumas aplicações consideram a expansão de incêndios florestais, enquanto outros consideram o crescimento de tumores em organismos vivos ou condução de eletricidade em materiais semicondutores.

Usualmente, os modelos de percolação consideram que, por exemplo, uma árvore queimando pode incendiar outra vizinha com uma determinada probabilidade positiva, e que a floresta é um campo homogêneo, de forma que essa probabilidade é a mesma em qualquer parte da floresta. Porém, no mundo real podem existir sistemas não homogêneos em que tal probabilidade pode variar em função do clima, do espaço (densidade das árvores no campo) ou do tempo, por exemplo. Ainda, essa probabilidade pode variar sistematicamente, de forma que um modelo mais realista pode ser baseado em uma probabilidade não uniforme para todo meio, mas que ainda permita estudar analiticamente características do sistema.

A rede de Bethe ou árvore Cayley foi introduzida em Bethe (1935) no contexto da mecânica estatística. Ela pode ser usada para fazer aproximação de modelos de percolação em grandes dimensões. Em geral, a rede de Bethe é definida como um grafo $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, onde \mathbb{V} é um conjunto de pontos, também chamados vértices ou sítios, e $\mathbb{E} = (e_{xy})$ é o conjunto não ordenado de pares de vértices distintos e_{xy} , chamados elos ou arestas (veja Braga et al. (2005), por exemplo). Então, a rede de Bethe é um grafo onde qualquer vértice está conectado com r outros, onde r é chamado de *número de coordenação*. Vamos denotar por B_r a rede de Bethe com número de coordenação r (veja a Figura 2 para ilustração de B_3). Na Figura 2(a) pode ser visto a estrutura das árvores que emanam de um vértice central, e todos os vértices estão organizados em níveis sequenciais em torno de um vértice central. O vértice central pode ser chamado de raiz ou origem da rede. A Figura 2(b) mostra uma representação

alternativa similar à água saindo de uma fonte.

Em B_r , a distância de qualquer vértice x até a origem é conhecida como *nível* do vértice, e é denotada por $l(x)$. Para qualquer elo e_x finalizado em x , diremos que este pertence ao nível $l(x)$. Por simplicidade de notação, vamos representar por e_n todos os elos e_x tais que $l(x) = n$.

É usual considerar o subgrafo $B_r(n)$ de B_r , formado pelos vértices x tal que $l(x) \leq n$ e pelos elos conectados a estes vértices. O conjunto $B_r(n)$ é conhecido por ser a rede de Bethe com “volume finito”. A fronteira de $B_r(n)$, denotada por $\partial B_r(n)$, é o conjunto de todos os vértices do nível n , e podemos ver que o número de vértices até n é igual a $|\partial B_r(n)| = r(r-1)^{n-1}$ pela representação da Figura 2(a), e igual a $(r-1)^n$ pela representação da Figura 2(b).

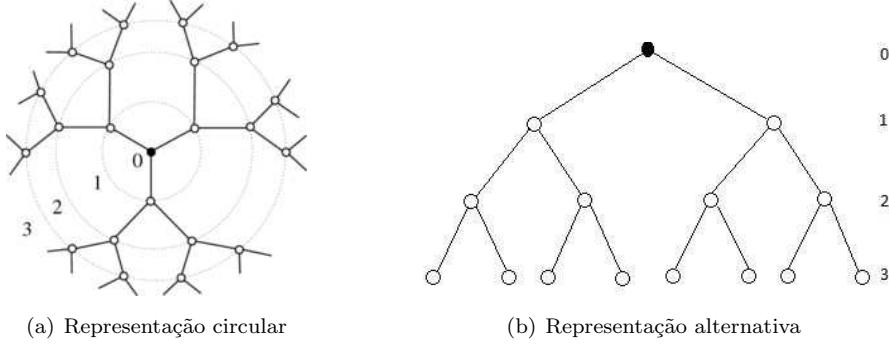


Figura 2: Rede de Bethe com $r = 3$.

Na rede de Bethe homogênea, a cada elo $e \in E$ associamos uma variável aleatória independente X_e com distribuição de Bernoulli e parâmetro p que chamamos de *medida de probabilidade* ou *densidade*. Se $X_e = 1$ diremos que e está *aberto*, caso contrário e está *fechado*. Para $x, y \in B_r$, diremos que x está conectado a y e denotamos por $x \xrightarrow{p} y$ se existir uma sequência de vértices distintos $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$, tais que os elos e_{x_{i-1}, x_i} , $i = 1, \dots, n$, estejam abertos.

A *função de conectividade*, denotada por $\tau_{xy}(p)$, é a probabilidade dos vértices x e y estarem conectados por um caminho de elos abertos, i.e., $\tau_{xy}(p) = P(\{x \xrightarrow{p} y\})$. Pode-se mostrar que a função conectividade em B_r decresce exponencialmente quando $\|x - y\| \rightarrow \infty$ para todo $p < 1$ (Braga et al., 2005). Isto pode ser facilmente visto, pois $\tau_{xy}(p) = \exp(-\|x - y\|/\zeta(p))$, com

$\zeta(p) = (-\log(p))^{-1}$. A função $\zeta(p)$ é usualmente referida como *comprimento de correlação*. Portanto, em uma rede de Bethe, o comprimento de correlação é finito para todo $0 < p < 1$.

O *Aglomerado da Origem* (\mathbf{O}) é definido por $C_r(p) = \{x \in B_r : \mathbf{O} \stackrel{p}{\leftrightarrow} x\}$ e a *função probabilidade de percolação* é dada por $\theta(r, p) = P_p(|C_r(p)| = \infty)$, onde $|C_r(p)|$ representa o número de vértices em $C_r(p)$. Diremos que *ocorreu percolação* se $|C_r(p)| = \infty$. Com isso, definimos o *ponto crítico* do sistema (também nomeado *probabilidade crítica* ou *densidade crítica*) por $p_c(r) = \sup\{p \geq 0 : \theta(r, p) = 0\}$, a partir do qual o sistema percola com probabilidade positiva, ou seja, há uma *transição de fase* em $p_c(r)$. Em não havendo problema de entendimento, o número de coordenação r será omitido das quantidades $\theta(r, p)$ e $p_c(r)$, passando a representá-las simplesmente por $\theta(p)$ e p_c , respectivamente.

3. Resultados importantes na rede de Bethe

O caso $r = 2$ não é teoricamente interessante, pois se $p < 1$ teremos uma infinidade de elos fechados à direita e à esquerda da origem, tais que $\theta(p) = 0$ se $p < 1$. Então, concluímos que $p_c = 1$, e não ocorre a transição de fase para $p \in (0, 1)$. Para $r \geq 3$ pode ser provado que existe um $p_c \in (0, 1)$, tal que $\theta(p) = 0$ para $p < p_c$ e $\theta(p) > 0$ para $p > p_c$. A forma da função $\theta(p)$ para $p > p_c$ pode ser obtida implicitamente por $1 - \theta(p) = (1 - p\theta(p))^{r-1}$ (Braga et al., 2005). Para $r = 3$ temos que $\theta(p) = 1 - [(1 - p)/p]^2$ e para $r = 4$, $\theta(p) = (3 - \sqrt{4/p - 3})/(2p)$, por exemplo. Também é amplamente conhecido que $p_c = 1/(r - 1)$ e que $\theta(p_c) = 0$.

Se considerarmos $\theta_n(p)$ a probabilidade da origem estar conectada a fronteira $\partial B_r(n)$, dada por $\theta_n(p) = P_p\{\mathbf{O} \stackrel{p}{\leftrightarrow} \partial B_r(n)\}$, então a função probabilidade de percolação pode ser escrita como o limite de $\theta_n(p)$ quando $n \rightarrow \infty$. Para $r = 3$, no nível $n = 1$ temos $\theta_1(p) = p(2 - p)$; para $n = 2$ temos $\theta_2(p) = 4p^2 - 2p^3 - 4p^4 + 4p^5 - p^6$, e a expressão polinomial para $\theta_n(p)$ vai ficando cada vez mais complexa com o aumento de n .

Para obtermos uma expressão geral para $\theta_n(p)$, seja $S_r^\bullet(n, p)$ uma variável aleatória representando o número de vértices em $\partial B_r(n)$, $n \geq 1$, com caminho de elos abertos até a origem, onde $S_r^\bullet(0, p) \equiv 1$. Sejam ainda,

$$c_{r,i,j}^{(n)}(p) = P(S_r^\bullet(n, p) = j | S_r^\bullet(n - 1, p) = i) \quad (3.1)$$

a probabilidade condicional de passarmos de i vértices no nível $n - 1$ para j

vértices no nível n conectados à origem, e

$$u_{r,j}^{(n)}(p) = P(S_r^\bullet(n, p) = j) \quad (3.2)$$

a probabilidade incondicional de termos j vértices no nível n conectados à origem. Por condicionamento em $S_r^\bullet(n-1, p)$, temos que

$$u_{r,j}^{(n)}(p) = \sum_i c_{r,i,j}^{(n)}(p) u_{r,i}^{(n-1)}(p). \quad (3.3)$$

Podemos representar estas probabilidades matricialmente por $\mathbf{C}_r^{(n)}(p) = (c_{r,i,j}^{(n)}(p))$, com $|\partial B_r(n)| + 1$ linhas e $|\partial B_r(n-1)| + 1$ colunas e, do mesmo modo, $\mathbf{u}_r^{(n)}(p) = (u_{r,j}^{(n)}(p))_{j \geq 0}$ é o vetor de dimensão $|\partial B_r(n)| + 1$. Com isso, temos que para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r^{(n)}(p) &= \mathbf{C}_r^{(n)}(p) \times \mathbf{u}_r^{(n-1)}(p) \\ &= \mathbf{C}_r^{(n)}(p) \times \mathbf{C}_r^{(n-1)}(p) \times \mathbf{C}_r^{(n-2)}(p) \times \cdots \times \mathbf{C}_r^{(1)}(p) \times \mathbf{C}_r^{(0)}(p) \\ &= \prod_{k=0}^n \mathbf{C}_r^{(n-k)}(p), \end{aligned}$$

com a convenção

$$\mathbf{C}_r^{(0)}(p) = \mathbf{u}_r^{(0)}(p) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $r = 3$ e fazendo $q = 1 - p$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3^{(1)}(p) &= \begin{pmatrix} 1 & q^2 \\ 0 & 2pq \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_3^{(2)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & q^2 & q^4 \\ 0 & 2pq & 4pq^3 \\ 0 & p^2 & 6p^2q^2 \\ 0 & 0 & 4p^3q \\ 0 & 0 & p^4 \end{pmatrix} \text{ e} \\ \mathbf{C}_3^{(3)}(p) &= \begin{pmatrix} 1 & q^2 & q^4 & q^6 & q^8 \\ 0 & 2pq & 4pq^3 & 6pq^5 & 8pq^7 \\ 0 & p^2 & 6p^2q^2 & 15p^2q^4 & 28p^2q^6 \\ 0 & 0 & 4p^3q & 20p^3q^3 & 56p^3q^5 \\ 0 & 0 & p^4 & 15p^4q^2 & 70p^4q^4 \\ 0 & 0 & 0 & 6p^5q & 56p^5q^3 \\ 0 & 0 & 0 & p^6 & 28p^6q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8p^7q^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^8 \end{pmatrix}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

As colunas de $\mathbf{C}_r^{(n)}(p)$ são o desenvolvimento de $(q+p)^k$ em termos binomiais para $k \in \{|\partial B_r(0)|, |\partial B_r(1)|, \dots, |\partial B_r(n)|\}$. Então, $\mathbf{C}_r^{(n-1)}(p)$ é uma submatriz de $\mathbf{C}_r^{(n)}(p)$, $n \geq 1$, como podemos ver em (3.4).

O primeiro elemento de $\mathbf{u}_r^{(n)}(p)$ é a probabilidade incondicional de não existir nenhum vértice ocupado no nível n . Portanto, temos que

$$\theta_n(p) = 1 - u_{r,0}^{(n)}(p). \quad (3.5)$$

Podemos notar que para n pequeno ($n > 1$), a função $\theta_n(p)$ tem formato sigmoide em $[0,1]$, ficando mais íngreme em p_c quando n cresce. A Figura 3 mostra o comportamento de $\theta_n(p)$ para $r = 3$ e vários valores de n . Um dos métodos usados para determinar o ponto crítico do sistema consiste em obter o limite, quando $n \rightarrow \infty$, do ponto de inflexão das curvas $\theta_n(p)$, ou seja, resolvendo a equação $d^2\theta_n(p)/dp^2 = -d^2u_{r,0}^{(n)}(p)/dp^2 = 0$ (Vogel et al., 2010).

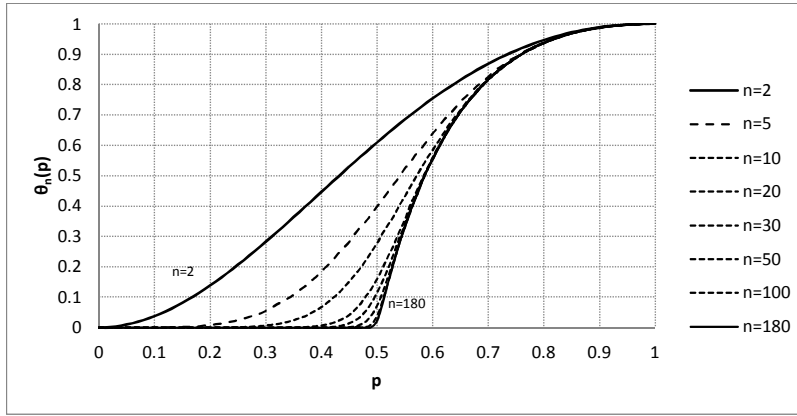


Figura 3: Função probabilidade $\theta_n(p)$ para $r = 3$.

4. Percolação em ondas: modelando a probabilidade não-homogênea $\bar{p}(\cdot)$

A maioria dos modelos de percolação propostos na literatura considera que o meio é homogêneo, ou seja, a probabilidade de um elo qualquer da rede estar aberto é constante para todo meio, ou possui dois ou três possíveis valores de acordo com sua categoria, o que possivelmente não se aproxime da realidade em alguns casos (Grimmett e Manolescu, 2013).

No caso em foco, de incêndio florestal, podemos ter uma certa região mais úmida, em que a probabilidade do fogo se espalhar é menor do que em outra região mais seca. Neste modelo, a altitude e tipo de árvores também podem ser consideradas importante no modelo. Assim, a probabilidade associada à posição (i, j) pode ser modelada, por exemplo, por uma função logística tal como $\bar{p}(i, j) = 1/(1 + \exp(-(\beta_1 X_{1ij} + \beta_2 X_{2ij})))$, com $|\beta_i|$ representando a importância da variável padronizada X_i .

Neste trabalho adotaremos uma função do tempo ou distância da origem na Rede de Bethe. Consideraremos que um elo e_n no nível n da rede de Bethe tem probabilidade de estar aberto dada por

$$\bar{p}(e_n) = p + (1 - p)|\text{sen}(n\pi/180)|. \quad (4.6)$$

Com esta estrutura, que denominaremos por *modelo de ondas senoide*, precisamos avaliar o comportamento da probabilidade de percolação e a probabilidade crítica em função de p , a densidade mínima que a rede pode assumir. O valor numérico de $\bar{p}(e_n)$ será igual a p periodicamente nos níveis n múltiplos de 180, porque teremos $\text{sen}(n\pi/180) = 0$. Também, $\bar{p}(e_n)$ será periodicamente igual a 1, nos níveis n tais que $n = 90 + 180k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Em todos os outros elos, $\bar{p}(e_n)$ estará sempre entre p e 1.

É claro que $\bar{p}(e) \geq p, \forall e \in \mathbb{E}$. Tal como no caso regular, para todo elo $e \in \mathbb{E}$ associamos uma variável aleatória independente \bar{X}_e com distribuição Bernoulli de parâmetro $\bar{p}(e)$. Por analogia, sejam $\bar{C}_r(p)$, $\bar{\theta}(p)$ e \bar{p}_c para o modelo de ondas senoide. Por acoplamento, temos que $\bar{X}_e \geq X_e$, cujas consequências são

$$C_r(p) \subset \bar{C}_r(p), \quad \bar{\theta}(p) \geq \theta(p) \quad \text{e} \quad \bar{p}_c \leq p_c. \quad (4.7)$$

Antes de obtermos analiticamente as principais características deste modelo, apresentaremos alguns resultados obtidos por simulações Monte Carlo para estimar a função $\bar{\theta}(p)$. Usaremos $M = 10^6$ réplicas do processo de percolação para valores de p de zero até 1 com incremento de 0.001. O nível máximo da rede de Bethe será $n = 10^5$.

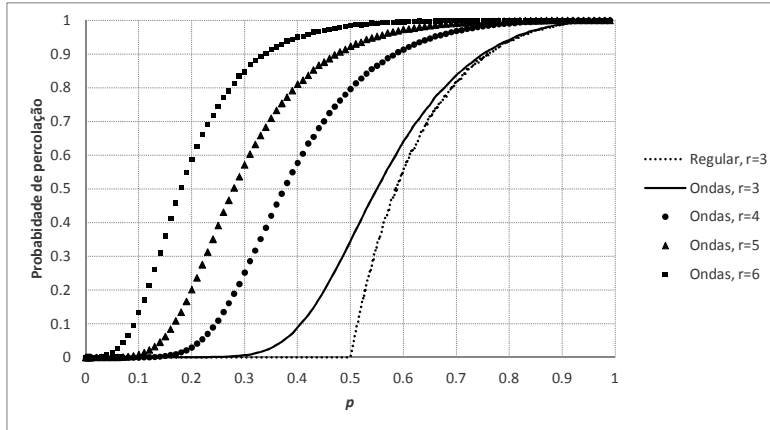


Figura 4: Probabilidade de percolação não-homogênea para $r = 3, 4, 5, 6$ e caso homogêneo para $r = 3$ com $p_c = 1/(r - 1)$.

A primeira curva à direita na Figura 4 refere-se à rede de Bethe homogênea com $r = 3$, muito próximo da função de probabilidade teórica, mostrando que o algoritmo funciona apropriadamente. As outras curvas referem-se ao modelo de percolação não-homogênea em (4.6), indicando que a função de percolação $\bar{\theta}(p)$ comporta-se como uma função sigmoide, isto é, tal como uma função de distribuição acumulada, característica que não ocorre no modelo homogêneo $[\bar{p}(e) = p]$ para n grande, como podemos ver que na Figura 3.

O comportamento da Figura 4 induz uma importante questão: podemos dizer que $\bar{p}_c > 0$? Com o comportamento sigmoide, não é trivial afirmar que $\bar{p}_c > 0$, principalment no caso em que $r \geq 6$. Uma prova formal de que \bar{p}_c é ou não positivo é necessária, pois é uma das principais características do modelo.

5. A existência de um limiar de percolação não trivial no modelo de ondas senóide

Nesta seção verificaremos que existe um limiar de percolação não trivial para este sistema, isto é, $\bar{p}_c > 0$. Primeiro vamos encontrar um função similar ao comprimento de correlação que, para n grande, aproxima a função conectividade e então usamos essa função para obter um majorante para a probabilidade de percolação $\bar{\theta}(p)$.

5.1. A função conectividade e o comprimento de correlação

A função conectividade $\tau_{0x}(p) = P(\{\mathbf{O} \xrightarrow{p} x\})$ é probabilidade do vértice x estar conectado à origem por um caminho de elos abertos e_1, e_2, \dots, e_n , com e_1 partindo da origem e e_n finalizando em x . Por conta da independência entre as variáveis aleatórias $X(e_k)$, podemos escrever

$$\tau_{0x}(p) = \prod_{k=1}^n \bar{p}(e_k). \quad (5.8)$$

Vamos mostrar que existe uma função positiva monotônica $\zeta(p)$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ existe um $n > n(\epsilon)$ temos

$$\tau_{0x}(p) \leq \exp\{-n/(\zeta(p) + \epsilon)\}. \quad (5.9)$$

Para provar (5.9), notemos que $\tau_{0x}(p) = \prod_{k=1}^n \bar{p}(e_k) = \exp\left\{\sum_{k=1}^n \ln \bar{p}(e_k)\right\} = \exp\left\{n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \bar{p}(e_k)\right\}$.

Seja

$$\zeta_n(p) = \left[-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \bar{p}(e_k)\right]^{-1}. \quad (5.10)$$

Para encontrar o limite da sequência em (5.10), primeiro notemos que $\bar{p}(e_k)$ é cíclico com período $T = 180$, com $\sin(k\pi/180) \geq 0$ para $k \in \{1, \dots, T\}$. Assim, as somas consecutivas de T elementos são constantes e, então, $\zeta_n(p)$ converge para $\zeta_T(p)$ quando $n \rightarrow \infty$, com

$$\begin{aligned} \zeta_T^{-1}(0) &= -\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \ln(\sin(k\pi/180)) \geq -\frac{1}{T} \ln(\sin(T\pi/180)) = \infty, \\ \zeta_T^{-1}(1) &= -\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \ln(1) = 0. \end{aligned}$$

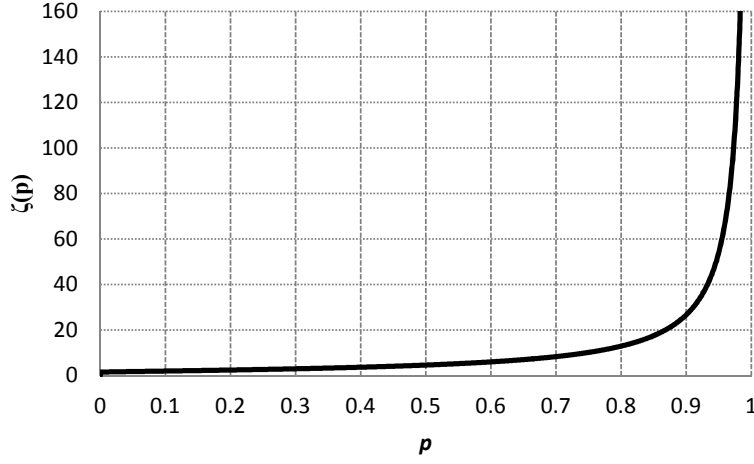


Figura 5: Comportamento de $\zeta(p)$.

Temos então que $\zeta(p) = \zeta_T(p)$, com $\zeta(0) = 0$ e $\zeta(1) = \infty$. Na Figura 5 apresentamos o gráfico de $\zeta(p)$.

Por conta da convergência $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(p) = \zeta(p)$, temos, por definição, que para qualquer $\epsilon > 0$ e $p \in (0, 1)$ existe um $n^* = n(\epsilon, p)$ tal que $|\zeta_n(p) - \zeta(p)| \leq \epsilon$, $\forall n \geq n^*$ e, portanto,

$$\exp(-n\zeta_n^{-1}(p)) \leq \exp(-n(\zeta(p) + \epsilon)^{-1}). \quad (5.11)$$

5.2. O limiar de percolação não-trivial

Nesta seção mostraremos que na rede de Bethe com probabilidade dada por (4.6) o ponto crítico é estritamente positivo. Para ver isto, primeiro notemos que, $\forall n$

$$\{|\bar{C}| = \infty\} \subset \bigcup_{\{x:l(x)=n\}} \{\mathbf{0} \overset{p}{\leftrightarrow} x\}.$$

Como isso, temos que para $\epsilon > 0$ e $n \geq n^*$,

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(p) = P_p(|\bar{C}| = \infty) &\leq P_p \left(\bigcup_{\{x:l(x)=n\}} \{\mathbf{O} \leftrightarrow x\} \right) \\
&\leq \sum_{\{x:l(x)=n\}} P_p(\{\mathbf{O} \leftrightarrow x\}) \\
&= \sum_{\{x:l(x)=n\}} \tau_{0x} \\
&= \sum_{\{x:l(x)=n\}} e^{-n\zeta_n^{-1}(p)} \\
&\leq \sum_{\{x:l(x)=n\}} e^{-n(\zeta(p)+\epsilon)^{-1}} \\
&= \left[e^{-(\zeta(p)+\epsilon)^{-1}} \right]^n \sum_{\{x:l(x)=n\}} 1 \quad (5.12) \\
&= \left[e^{-(\zeta(p)+\epsilon)^{-1}} \right]^n |\partial B_r(n)| \\
&= \left[e^{-(\zeta(p)+\epsilon)^{-1}} \right]^n (r-1)^n \\
&= \left[e^{-(\zeta(p)+\epsilon)^{-1}} (r-1) \right]^n, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

onde em (5.12) o somatório produz a contagem dos vértices na borda de $B_r(n)$, para o qual adotou-se o cardinal da Figura 2(b), sem perda de generalidade.

Portanto, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ teremos $n^* \rightarrow \infty$ e concluímos que se $e^{-\zeta(p)^{-1}}(r-1) < 1$ obteremos que $\bar{\theta}(p) = 0$ por (5.13), e esta condição é verdadeira se $\zeta(p) < [\ln(r-1)]^{-1}$. Como $\zeta(0) = 0$, para qualquer $r \geq 3$ existe $p^* > 0$ tal que $\forall p \in (0, p^*)$ temos $\zeta(p) < [\ln(r-1)]^{-1}$, de forma que $\bar{\theta}(p) = 0$ se $p < p^*$. Assim sendo, temos que $\bar{p}_c \geq p^* > 0$, concluindo a prova.

6. Conclusões

Apresentamos um modelo de percolação de rede de Bethe não-homogênea para modelar o fenômeno de fogo em floresta, considerando a probabilidade de um elo e_n no nível n estar aberto em função da distância $l(e_n)$ deste até a origem, dada por uma função senóide $\bar{p}(e_n) = p + (1-p)|\text{sen}(n\pi/180)|$. De forma geral, outras formas podem ser consideradas para esta função de probabilidade ou para outros tipos de rede. Não existe na literatura nenhum modelo periódico similar usado em percolação em outros contextos.

Um estudo de simulação preliminar indicou que a função probabilidade de percolação não é uma função abrupta, diferente do caso regular (homogêneo), caracterizando que a rede de Bethe não-homogênea apresenta uma transição de fase de segunda ordem e tornando imprecisa a conclusão sobre se o limiar de percolação é ou não trivial (zero). O programa para a simulação foi construído na linguagem *Ox* (Doornik e Ooms, 2007) e mostra o comportamento da probabilidade de percolação $\bar{\theta}(p)$ baseados em $M = 10^6$ réplicas do processo percolação para cada valor de p variando de zero até 1 com incremento 0.001 e nível máximo da rede de $n = 10^5$. Demonstramos que a probabilidade crítica é estritamente positiva, de forma que para qualquer $p > 0$, existe uma probabilidade também positiva de o fogo se alastrar por toda a floresta.

A mesma conclusão se dá para outras situações, tal como a proliferação de mosquitos cuja reprodução dependa de temperatura e umidade, claramente variando entre o dia e a noite.

Referências

- Balch, J. K. (2008). *Effects of recurrent fire on transitional forest dynamics in the Amazon's wildfire frontier, Mato Grosso, Brazil*. Yale University.
- Bethe, H. A. (1935). Statistical theory of superlattices. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 150(871):552–575.
- Braga, G. A., Sanchis, R., e Schieber, T. A. (2005). Critical percolation on a Bethe lattice revisited. *SIAM review*, 47(2):349–365.
- Broadbent, S. R. e Hammersley, J. M. (1957). Percolation processes. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 53 (03), páginas 629–641. Cambridge Univ Press.
- Doornik, J. A. e Ooms, M. (2007). *Introduction to Ox: An Object-Oriented Matrix Language*. Timberlake Consultants Ltd.
- Grimmett, G. R. e Manolescu, I. (2013). Inhomogeneous bond percolation on square, triangular and hexagonal lattices. *The Annals of Probability*, 41(4):2990–3025.

Vogel, E., Lebrecht, W., e Valdés, J. (2010). Bond percolation for homogeneous two-dimensional lattices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(8):1512–1520.