Biomatemática ***26*** *(2016), 13–24* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

A programação dinâmica na solução de problemas de controle ótimo com incerteza intervalar

José Renato Campos[1],
Área de Indústria – IFSP, 15.503-110, Votuporanga/SP.

Edvaldo Assunção[2],
Depto̲ de Engenharia Elétrica – UNESP, 15.385-000, Ilha Solteira/SP.

Geraldo N. Silva[3],
Depto̲ de Matemática Aplicada – UNESP, 15.054-000, São José do Rio Preto/SP.

Weldon A. Lodwick[4],
Department of Mathematical and Statistical Sciences – CU, 80217, Denver/Colorado.

Resumo.

Problemas de controle ótimo com incerteza são amplamente estudados e a incerteza geralmente corresponde à estocasticidade ou utiliza a teoria dos conjuntos fuzzy. Aqui introduzimos um novo tipo de incerteza nos problemas de controle ótimo denominada incerteza intervalar. Para ilustrar este novo tipo de incerteza resolvemos uma aplicação encontrada na Agricultura. A solução do problema utiliza a programação dinâmica e a aritmética intervalar restrita de níveis simples.

Palavras-chave: *Controle biológico; Modelo matemático intervalar; Análise Intervalar.*

[1]jrcifsp@ifsp.edu.br, jrcifsp@gmail.com
[2]edvaldo@dee.feis.unesp.br
[3]gsilva@ibilce.unesp.br
[4]Weldon.Lodwick@ucdenver.edu

1. Introdução

A programação dinâmica é uma técnica de solução de problemas de controle ótimo que foi proposta por Bellmann na década de 1950. Desde então, a programação dinâmica é utilizada na solução de uma série de problemas de controle ótimo, em particular problemas de controle ótimo em tempo discreto com funcional quadrático e restrições lineares (ver: Bertsekas, 1995; Campos, 2007, 2010).

Problemas relacionados à Agricultura e que utilizam a programação dinâmica podem ser encontrados em Kennedy (1986) e Campos (2007). Além disso, a programação dinâmica também é utilizada na solução de problemas que envolvem a incerteza estocástica (Bertsekas, 1976; Kennedy, 1986) ou a teoria de conjuntos fuzzy (Diniz e Bassanezi, 2013).

Trabalhos envolvendo as teorias de controle ótimo e conjuntos fuzzy são encontrados em Filev e Plamen (1992), Pereira et al. (2013) e Diniz e Bassanezi (2013). Já trabalhos sobre a teoria de controle ótimo e Agricultura são encontrados em Kennedy (1986), Jones e Cacho (2000) e Odom et al. (2002).

Nesse trabalho ilustramos o uso da programação dinâmica para a solução de problemas de controle ótimo com incerteza intervalar. Entre as várias aritméticas intervalares existentes (Moore, 1966; Moore et al., 2009; Markov, 1977) utilizamos a aritmética intervalar restrita de níveis simples (Chalco-Cano et al., 2014) para o problema apresentado. Esta aritmética é um caso particular da aritmética proposta por Lodwick (1999) ou Lodwick (2007). Além disso, as operações básicas dessa aritmética elimina problemas encontrados em outras aritméticas tais como $X - X \neq 0$, X intervalo.

O problema abordado neste trabalho altera o modelo proposto em Rafikov e Maleico (2000). Nesse, Rafikov e Maleico (2000) estudam uma aplicação de controle de pragas para a cultura de soja com duas variáveis de estado e duas entradas de controle.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 traz o modelo biológico, determinístico e associado a Agricultura. A Seção 3 traz o problema intervalar. Este problema será uma adaptação do modelo proposto na Seção 2. A Seção 4 indica a metodologia de solução para os problemas intervalares. A Seção 5 traz um exemplo explicitando o problema intervalar. A Seção 6 propõe a interpretação da solução intervalar. Na Seção 7 apresentamos as contribuições do trabalho assim como as conclusões.

2. O modelo determinístico

Problemas relacionados ao controle de pragas e plantas daninhas na Agricultura estão cada vez mais presentes. Com o objetivo de melhorar a eficiência no controle dessas pragas e plantas, a sustentabilidade e o manejo integrado tem sido amplamente discutidos.

Em Doyle (1997) e em Jones (2005) a sustentabilidade e o manejo integrado de pragas e plantas daninhas são considerados, e as técnicas mais comuns para o controle dessas pragas e plantas daninhas correspondem à aplicação de herbicida, inseticida, fungicida, controle biológico e controle manual, de maneira isolada ou em conjunto correspondendo a forma integrada.

O herbicida, o inseticida e o fungicida são defensivos químicos e consequentemente traz danos ambientais e danos à saúde humana (ver: Jones, 2005). O controle manual, em geral, tem custos elevados. A técnica do controle biológico tem sido bastante utilizada, porém, caso seja aplicada de forma incorreta, pode causar um desiquilíbrio ambiental. Consequentemente, determinar valores ótimos para o controle de modo a fornecer o equilíbrio desejado para a plantação (níveis abaixo de danos ambientais e prejuízos econômicos) é de fundamental importância.

Rafikov e Maleico (2000) apresentaram uma aplicação do modelo presa-predador representado pela lagarta da soja (Anticarsia gematalis) e seus predadores (Nabis spp, Geocoris, Aracnideo,...). Além disso, Rafikov e Maleico (2000) realizaram a simulação dinâmica do sistema sem aplicação de controle e mostrou-se que a população de presas no sistema cresce rapidamente (em torno de 165 presas no vigésimo quinto dia) ficando acima do valor de equilíbrio desejado. Assim, surge a necessidade de aplicação de controle nos períodos anteriores, e no problema a aplicação de controle corresponde à introdução de predadores e à retirada de presas. Em Rafikov e Maleico (2000) esse problema foi resolvido utilizando o princípio do máximo de Pontryagin.

O modelo de Lokta-Volterra apresentado em Rafikov e Maleico (2000), com a introdução do controle, é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x\, f(x,y) - k_1\, u \\ \dot{y} = y\, g(x,y) + k_2\, v \end{array} \right. , \tag{2.1}$$

sendo que x é a quantidade de presas e y é a quantidade de predadores. As variáveis u e v representam o controle, sendo u o número de presas retiradas e v o número de predadores introduzidos no sistema.

O ponto de equilíbrio desejado para a presa e o predador, representado por x^* e y^*, respectivamente, é considerado como $(19,94 \quad 12,1)$ conforme Rafikov e Maleico (2000). Para o modelo (2.1) temos $f(x,y) = a - \alpha\, y$ e $g(x,y) = -b + \beta\, x$, sendo que a, α, b e β são parâmetros a serem determinados.

Logo, o modelo dinâmico (2.1) representa um modelo para o problema da lagarta da soja e seus predadores, sendo que os coeficientes a, α, b, β, k_1 e k_2 são dados em Rafikov (1997) e estão na tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Coeficientes para o modelo de Lokta-Volterra

Coeficientes	a	α	b	β	k_1	k_2
Valores	0,216	0,0108	0,173	0,0029	1	1

Logo, linearizamos (2.1) conforme Monteiro (2002) e obtemos

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} a - \alpha\, y^* & -\alpha\, x^* \\ \beta\, y^* & -b + \beta\, x^* \end{pmatrix} z \; + \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

sendo que $z = (x - x^*,\, y - y^*)^t$ e z representa a translação do ponto de equilíbrio $(x^*,\, y^*)$ para a origem.

Com os valores expostos na Tabela 1 e $x^* = 19,94$ e $y^* = 12,1$, obtemos

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0,0853 & -0,2154 \\ 0,0351 & -0,1152 \end{pmatrix} z \; + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Este é o sistema linearizado e na forma contínua para o problema determinístico. Desta forma, o problema de controle ótimo linearizado e semelhante ao proposto em Rafikov e Maleico (2000) é dado por

$$min\, C = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x - x^*)^2 + 1,7\,(y - y^*)^2 + u^2 \; + v^2 \; dt$$

sujeito a equação dinâmica (2.2). As condições iniciais são $x(t_0) = 15$ e $y(t_0) = 30$ e as condições finais são $x^*(t_f) = 19,94$ e $y^*(t_f) = 12,1$.

A discretização do problema proposto em Rafikov e Maleico (2000) é realizada conforme Dontchev et al. (2000) e Chen (1999). Logo, o problema determinístico discreto torna-se

$$min\, C = \frac{h}{2} \sum_{t=0}^{N} z_{1\,t}^2 + 1,7\, z_{2\,t}^2 + u_t^2 + v_t^2$$

sujeito a

$$z_{t+1} = \begin{pmatrix} 1,085 & -0,212 \\ 0,035 & 0,888 \end{pmatrix} z_t + \begin{pmatrix} -1,043 & -0,107 \\ -0,017 & 0,943 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

sendo que $z_t = (z_{1\,t},\, z_{2\,t})^t$ e $z = (x - x^*,\, y - y^*)^t$ representa a translação do ponto de equilíbrio para a origem. As condições iniciais foram estabelecidas anteriormente e as variáveis u_t e v_t são os controles discretos. Aqui tomaremos $N = 18$ períodos e assim $t_f = h\,N = 18$ dias.

3. O modelo intervalar

Em problemas práticos uma série de parâmetros devem ser determinados para que o modelo descreva a situação real. A obtenção destes parâmetros, geralmente, é acompanhada de erros de medições ou mesmo falta de conhecimento. Em Agricultura, fatores como o preço de um produto, a taxa de crescimento de uma planta, a taxa de reprodução de pragas, a quantidade de chuvas previstas ou mesmo a resposta da planta à aplicação de inseticida ou herbicida são situações que ilustram erros de medições ou falta de informação. Para lidarmos com estas incertezas geralmente utiliza-se a teoria de probabilidade ou a teoria dos conjuntos fuzzy. Em ambos os casos, porém, são dados como conhecidas as funções de distribuição de probabilidade ou as funções de pertinência.

Neste sentido, torna-se interessante o uso da incerteza intervalar para as situações descritas acima, ou seja, podemos supor que o preço varie em um dado intervalo e todos os valores possíveis para o preço estão presentes nele; ou podemos supor que a taxa de crescimento de uma planta possa variar também em um determinado intervalo e assim não ser uma única taxa para todas as plantas presentes neste ambiente; consequentemente não seria exatamente um valor fixo.

Portanto, é interessante do ponto de vista da teoria de controle ótimo considerar problemas com incerteza intervalar.

Vamos então reescrever o problema (2.3) no contexto intervalar. Supondo que o parâmetro $0,888$ da segunda equação dinâmica é incerto devido a falta de informação, substituímos o mesmo pelo intervalo $[0,688\ 1,088]$. Logo, o problema intervalar é escrito como

$$min\, \mathbf{C} = \frac{h}{2}\sum_{t=0}^{N} Z_{1\,t}^2 + 1,7\, Z_{2\,t}^2 + U_t^2 + V_t^2$$

sujeito a

$$Z_{t+1} = \begin{pmatrix} 1,085 & -0,212 \\ 0,035 & [0{,}688 \quad 1{,}088] \end{pmatrix} Z_t + \begin{pmatrix} -1,043 & -0,107 \\ -0,017 & 0,943 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

sendo que Z_t, U_t e V_t são intervalos que representam o estado intervalar (X e Y intervalares) e os controles intervalares para cada período analisado, respectivamente. As demais expressões foram definidas anteriormente e não foram alteradas. O intervalo $[0,688\ 1,088]$ representa um parâmetro intervalar para o problema.

4. Metodologia de solução

Segundo Lodwick e Jenkins (2013) a solução de problemas intervalares se assemelha ao processo de solução dado pela transformada de Laplace, onde transformamos um intervalo em uma função real com inclinação não negativa no intervalo [0 1], resolvemos o problema no espaço de polinômios e em seguida retornamos para o espaço de intervalos utilizando a minimização e a maximização no conjunto compacto [0 1] desde que o mínimo e o máximo existam. O ponto principal desta transformação é que, o chamado problema transformado, e que 'equivale' ao problema original, pode ser bem mais simples de ser resolvido por possuir mais propriedades. Além disso, posteriormente podemos retornar a solução do problema originalmente proposto.

Logo, o processo de solução para o problema de controle ótimo em tempo discreto com incerteza intervalar seguirá o processo descrito em Lodwick e Jenkins (2013). Além disso, a solução do problema proposto (3.4) também utiliza a programação dinâmica (Bertsekas, 1995) e a aritmética intervalar restrita de níveis simples (Chalco-Cano et al., 2014).

Resumidamente, para a solução do problema de controle ótimo em tempo discreto com incerteza intervalar escrevemos, inicialmente, o problema (3.4) de acordo com a aritmética intervalar restrita de níveis simples. Em seguida, aplicamos o método de programação dinâmica e finalmente realizamos a minimização e a maximização para retornarmos para o espaço dos intervalos e assim concluirmos o processo de solução.

5. Exemplo

A seguir estudaremos o problema de controle ótimo com incerteza intervalar (3.4). Este problema foi resolvido de acordo com a metodologia descrita na Seção 4 e com o software Matlab 7.4 em um micro-computador Dual-Core, processador E 300 da AMD e memória de 3 Gb. Para o período considerado ($N = 18$) temos que o tempo de processamento foi de aproximadamente 23 minutos. Desta forma, a exigência computacional para o problema de controle ótimo em tempo discreto com incerteza intervalar é grande e proporcional ao número de iterações e quantidade de variáveis como ocorre no caso determinístico.

A solução para o problema determinístico e a solução para o problema intervalar são apresentadas nas figuras a seguir. Especificamente, a Figura 1 apresenta a solução para o estado x e X (solução determinística e intervalar, respectivamente). A Figura 2 apresenta a solução para o estado y e Y. Já as Figuras 3 e 4 apresentam as soluções para os controles. As soluções para o modelo determinístico também foram consideradas nas Figuras 3 e 4. As soluções dadas pelos valores mínimos e máximos correspondem às soluções intervalares. Temos ainda que os pontos que representam os intervalos são ligados por semi-retas apenas para facilitar a visualização da evolução temporal.

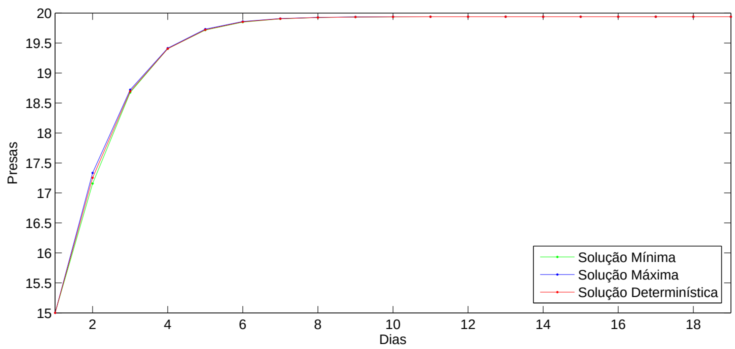

Figura 1: Estado x e X.

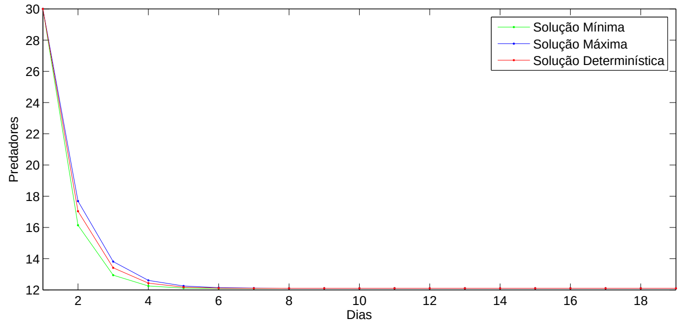

Figura 2: Estado y e Y.

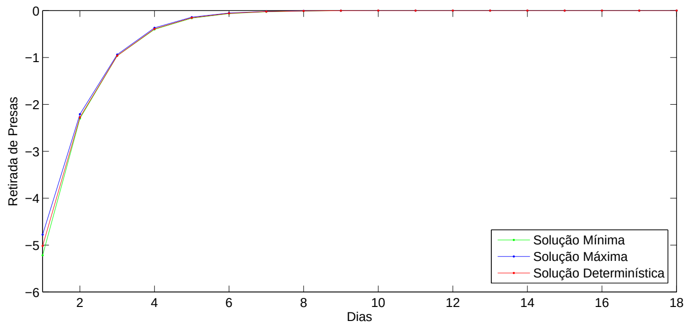

Figura 3: Controle u e U.

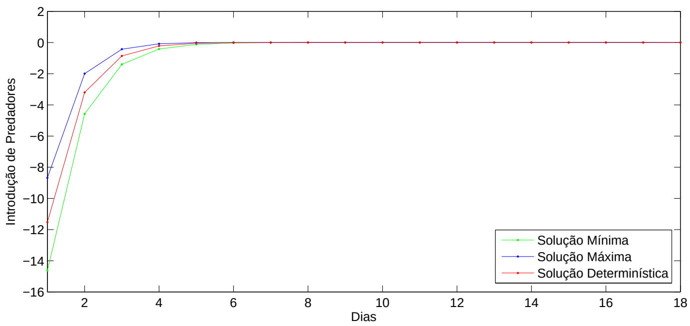

Figura 4: Controle v e V.

Analisando a solução apresentada, os extremos dos intervalos que representam a solução para o estado intervalar X se aproximaram do valor determinístico e desejado de $19,94$. Já os extremos da solução do estado intervalar Y (predadores) também se aproximaram do valor desejado depois de 12 iterações. De outra forma, houve aproximação da solução intervalar para o ponto de equilíbrio proposto pelo problema determinístico. Assim, a solução do problema intervalar segue as mesmas características da solução do problema determinístico que foi apresentado em Rafikov e Maleico (2000).

A introdução de predadores V também apresentou uma oscilação maior do que a do controle intervalar U uma vez que a incerteza foi inserida na segunda equação dinâmica.

O valor para o funcional determinístico é $399,075$. Já o custo intervalar, isto é, o intervalo que representa o funcional para o problema intervalar é $[360,463\ 451,105]$. Logo, a incerteza intervalar dada pelo intervalo $[0,688\ 1,088]$ na equação dinâmica proporcionou uma variação no custo de aproximadamente 22,71 %.

Finalmente, destacamos que a solução do problema de controle ótimo determinístico está contida na solução do problema de controle ótimo em tempo discreto com incerteza intervalar; e isso ocorre para as variáveis de estado, de controle e com o funcional.

6. Interpretação da solução intervalar

No exemplo analisado a equação dinâmica apresenta parâmetro intervalar pois os dados são, em geral, imprecisos e podem ser representados por intervalos. Consequentemente, isso acarreta numa variação no funcional (custo representado por um intervalo) e também numa variação para o estado e o controle a cada iteração (estado e controle representados por intervalos). Logo, o tomador de decisão deve analisar se é viável executar o modelo para os valores obtidos nestes intervalos, ou seja, deve analisar se é viável implementar a solução para estes valores.

Logo, surgem as seguintes questões sobre a viabilidade do modelo.

- É viável ou aceitável termos os valores mínimo e máximo encontrados no funcional? Financeiramente, a empresa teria condições de arcar com o custo máximo?

- É viável ou aceitável termos os valores mínimo e máximo encontrados para o controle a cada iteração? De outra forma, é viável introduzirmos o valor mínimo ou o máximo para os predadores?

- É viável ou aceitável termos os valores mínimos e máximos encontrados para o estado? Para os exemplos abordados, é tolerável ou aceitável as quantidades mínimas e máximas de presas? Se a quantidade de presas assumir os valores mínimos ou máximos, há algum prejuízo financeiro ou dano ambiental? A mesma análise é feita para os predadores.

De modo geral, a análise ajudaria no planejamento do tomador de decisão.

7. Conclusões

Apresentamos aqui um novo tipo de incerteza nos problemas de controle ótimo. Como observado no exemplo, a solução intervalar se mostrou condizente com o esperado. Assim, a proposta do artigo que compreendia na introdução de incerteza intervalar nos problemas de controle ótimo foi bastante promissora.

Estudos e caracterizações formais dos problemas de controle ótimo com incerteza intervalar estão sendo realizadas. Além disso, a introdução da aritmética intervalar restrita no modelo também está sendo investigada.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq (processo 300703/2013-9) e à FAPESP (processos 2011/17610-0 e 2013/07375-0).

Referências

Bertsekas, D. P. (1976). *Dynamic programming and stochastic control.* Academic Press.

Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic programming and optimal control.* Academic Press. vol. 1.

Campos, J. R. (2007). *Controle ótimo da lagarta da cana-de-açúcar utilizando modelos linearizados e funcional quadrático: uma resolução usando programação dinâmica.* Universitas **3**(1): 241–252.

Campos, J. R. (2010). *A programação dinâmica em problemas de controle ótimo com funcional quadrático e sistema linearizado: aplicação com três variáveis de estado e três controles.* Universitas **6**(2): 89–100.

Chalco-Cano, Y., Lodwick, W. A., e Bede, B. (2014). *Single level constraint interval arithmetic.* Fuzzy Sets and Systems.

Chen, C. T. (1999). *Linear system theory and design.* Oxford University Press.

Diniz, M. M. e Bassanezi, R. C. (2013). *Problema de controle ótimo com equações de estado p–fuzzy: programação dinâmica.* Biomatemática **23**: 33–42.

Dontchev, A. L., Hager, W. W., e Veliov, V. M. (2000). *Second order Runge Kutta aproximations in control constrained optimal control.* SIAM J. Numer. Anal. **38**: 202–226.

Doyle, C. J. (1997). *A review of the use of models of weed control in integrated Crop Protection.* Agriculture Ecosystems and Environment **64**: 165–172.

Filev, D. e Plamen, A. (1992). *Fuzzy optimal control.* Fuzzy Sets and Systems **47**: 151–156.

Jones, R. (2005). *Sustainability and integrated weed management in Australian winter cropping systems: a bioeconomic analysis.* Paper Presented to the 49th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economics Society **2**: 1–15.

Jones, R. e Cacho, O. J. (2000). *A dynamic optimisation model of weed control.* Agricultural and Resource Economics **1**: 1–17.

Kennedy, J. O. S. (1986). *Dynamic programming: applications to agriculture and natural resources.* Elsevier.

Lodwick, W. A. (1999). *Constrained interval arithmetic.* CCM Report 138.

Lodwick, W. A. (2007). *Interval and fuzzy analysis: an unified approach.* Academic Press **148**: 75–192.

Lodwick, W. A. e Jenkins, O. A. (2013). *Constrained interval and interval spaces*. Soft Computing **17**: 1393–1402.

Markov, S. (1977). *Extended interval arithmetic*. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. **30**: 1239–1242.

Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física.

Moore, R. E. (1966). *Interval analysis*. Prentice Hall.

Moore, R. E., Kearfott, R. B., e Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. SIAM.

Odom, D. I. S., Cacho, O. J., Sinden, J. A., e Griffith, G. R. (2002). *Policies for the management of weeds in natural ecosystems: the case of scoth broom (Cytisus scoparius, L.) in an Australian national park*. Ecological Economics **44**: 119–135.

Pereira, C. M., Cecconelo, M. S., e Bassanezi, R. C. (2013). *Controle ótimo em sistemas baseados em regras fuzzy*. Biomatemática **23**: 147–167.

Rafikov, M. (1997). *Determinação dos parâmetros de modelos biomatemáticos*. Ciência e Natura **19**: 7–20.

Rafikov, M. e Maleico, E. R. (2000). *Controle ótimo de pragas com base no modelo generalizado de presa-predador*. TEMA **1**: 215–222.