

Modelagem da depleção de oxigênio dissolvido pela presença de macrófitas aquáticas

J. C. Rubianes¹,

DEMAT, CEFET, 20271-110, Rio de Janeiro/RJ.

Denis Cajas²,

ILACVN, UNILA, 85866-000, Foz do Iguaçu/PR.

J. F. C. A. Meyer³,

DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

J. A. I. Rubianes⁴,

DCA, FEEC – UNICAMP, 13.083-852, Campinas/SP.

Resumo. Neste trabalho, propomos um modelo matemático não linear para estudar a depleção de oxigênio dissolvido devido à excessiva proliferação de populações de macrófitas provocada pela presença de poluentes no meio aquático. O modelo é formulado utilizando um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, considera-se quatro variáveis, concentração de nutrientes, densidade de macrófitas, densidade de detritos e oxigênio dissolvido. Os pontos de equilíbrio do sistema são obtidos e sua estabilidade é discutida. Simulações numéricas são realizadas para ilustrar os resultados matemáticos obtidos.

Palavras-chave: Modelagem matemática; macrófitas; oxigênio dissolvido; estabilidade.

1. Introdução

Usos excessivos e indiscriminados de fertilizantes orgânicos ou químicos muitas vezes levam ao acúmulo de nutrientes nos corpos de água, os quais

¹jose.rubianes@cefet-rj.br

²denniis1007@gmail.com

³joni@ime.unicamp.br

⁴angelivan34@hotmail.com

estimulam o crescimento de plantas aquáticas. Esse fenômeno é conhecido como eutrofização. Alguns destes nutrientes como o nitrogênio e o fosfato em quantidades significativas aceleram o crescimento de macrófitas, resultando na redução dos teores de oxigênio dissolvido (OD) e a deterioração dos recursos hídricos.

Várias pesquisas foram realizadas para estudar o crescimento das populações de macrófitas na presença de nutrientes (Voinov e Tonkikh, 1987; Pereira, 2004; Misra, 2010; Rubianes, 2015). As macrófitas crescem muito rápido em altas concentrações desses nutrientes e podem cobrir toda a superfície do meio aquático; elas têm uma rápida absorção de nutrientes a qual acumula-se na sua biomassa.

A maior parte dos detritos orgânicos decorrem da decomposição destas plantas e ficam acumulados e retidos no sedimento. Estes detritos serão novamente transformados em nutrientes por bactérias que usam muito oxigênio dissolvido para este processo (Hulla et al., 2008; Rinaldi et al., 1979). Dentre os gases dissolvidos na água, o oxigênio (O_2) é um dos mais importantes na dinâmica e na caracterização de ecossistemas aquáticos. As principais fontes de oxigênio para a água são a atmosfera e a fotossíntese.

Em estudos de laboratório, Pereira (2004) observou um aumento da taxa de crescimento intrínseco das macrófitas aquáticas *Eichhornia crassipes* e *Pistia stratiotes* em ambientes com maiores concentrações de fósforo e nitrogênio.

Misra (2010) estudou a depleção de oxigênio dissolvido devido a macrófitas sendo seu meio aquático um lago, supondo uma entrada de nutrientes permanente e com uma taxa de crescimento de macrófitas proporcional à concentração de nutrientes, mas ele não considerou uma taxa de crescimento em um meio sem a presença do poluente, cenário que pode acontecer se forem implementados planos de contingência para o controle das fontes poluidoras e das populações de macrófitas, que irão diminuir consideravelmente a concentração de nutrientes e em alguns casos podendo ter uma concentração nula, o que implicará numa densidade de macrófitas nula.

Neste artigo, diferente das pesquisas acima citadas, consideremos uma taxa de crescimento intrínseco natural de macrófitas, adicionada de uma taxa proporcional à concentração de nutrientes no meio, devido à absorção e transformação desses nutrientes em biomassa.

Tendo em conta o acima exposto, estudamos via modelos matemáticos a influência do poluente na taxa de crescimento intrínseco das macrófitas e a

depleção de oxigênio dissolvido devido aos detritos.

2. O modelo matemático

Sejam n a concentração de vários nutrientes, m a densidade das macrófitas, S a densidade de detritos e C a concentração do oxigênio dissolvido. Assumimos que a concentração n aumenta devido aos detritos que são transformados em nutrientes a uma taxa γ_1 e a uma fonte de descarga de nutrientes f .

Essa concentração diminui por fatores naturais a uma taxa μ_n e pela presença de macrófitas a uma taxa proporcional a nm . Na modelagem da dinâmica populacional das macrófitas, é considerada a competição intraespecífica pelos nutrientes onde k representa a capacidade de suporte, e o decaimento é considerado proporcional à sua densidade m , sua taxa de crescimento intrínseco é a soma de λ_1 e $\lambda_2 n$, que representam sua taxa em um meio sem a presença de nutrientes e o aumento dessa taxa proporcional à concentração de nutrientes no meio.

Uma vez que a morte natural de macrófitas são transformadas em detritos, considera-se a taxa de crescimento dos detritos proporcional a m . Processos bioquímicos convertem detritos em nutrientes, assim assumimos que o decaimento dos detritos é proporcional a S .

Considera-se a taxa de crescimento do oxigênio dissolvido por diversas fontes e denotada por q e sua taxa de decaimento natural é proporcional à sua concentração C . Assumimos que a taxa de crescimento do oxigênio dissolvido devido à fotossíntese das macrófitas é proporcional a m e a taxa de decaimento do oxigênio dissolvido causado pelo consumo de oxigênio na transformação de detrito em nutriente é proporcional à densidade do detrito S .

Tendo em conta as hipóteses e considerações acima mencionadas, o modelo proposto para a depleção de oxigênio dissolvido pela presença de macrófitas é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = f + \gamma_1 \mu_s S - \mu_n n - \gamma_2 nm, \\ \frac{dm}{dt} = (\lambda_1 + \lambda_2 n)m \left(1 - \frac{m}{k}\right) - \mu_m m, \\ \frac{dS}{dt} = \sigma \mu_m m - \mu_s S, \\ \frac{dC}{dt} = q + \alpha m - \mu_c C - \delta_s S, \end{cases} \quad (2.1)$$

com condições iniciais $n(0) \geq 0$, $m(0) \geq 0$, $S(0) \geq 0$, $C(0) \geq 0$.

Aqui μ_m , μ_s , μ_c , δ_s são constantes de decaimento, γ_2 , σ e α são constantes de proporcionalidade.

3. Pontos de equilíbrio do modelo

Devido à não linearidade do sistema (2.1), não é possível encontrar uma solução analítica. Portanto, vamos estudar o comportamento do sistema, para isso, primeiro vamos encontrar os pontos de equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico é a solução que não varia com o tempo.

Denotaremos os pontos de equilíbrio por $E(n, m, S, C)$, assim o sistema de estudo têm dois pontos de equilíbrio, um equilíbrio trivial $E_1(f/\mu_n, 0, 0, q/\mu_c)$ que indica que a população de macrófitas não está presente no meio aquático. Devido a que o detrito é formado pela morte natural dessas macrófitas, que estão ausentes e assim o detrito também está ausente.

Temos também um equilíbrio interior $E_2(n^*, m^*, S^*, C^*)$, onde n^*, m^*, S^*, C^* são obtidos resolvendo as seguintes equações:

$$0 = f + \gamma_1 \mu_s S - \mu_n n - \gamma_2 n m, \quad (3.2)$$

$$0 = (\lambda_1 + \lambda_2 n) m \left(1 - \frac{m}{k}\right) - \mu_m m, \quad (3.3)$$

$$0 = \sigma \mu_m m - \mu_s S, \quad (3.4)$$

$$0 = q + \alpha m - \mu_c C - \delta_s S. \quad (3.5)$$

substituindo os valores de m e S das equações (3.3) e (3.4) na equação (3.2), obtemos a seguinte equação quadrática:

$$\begin{aligned} (\mu_n \lambda_2 + k \lambda_2 \gamma_2) n^2 + (k \lambda_1 \gamma_2 - f \lambda_2 - k \lambda_2 \theta - k \mu_m \gamma_2 + \mu_n \lambda_1) n \\ - (f \lambda_1 + k \lambda_1 \theta - k \mu_m \theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\theta = \gamma_1 \sigma \mu_m > 0$.

Claramente, uma das raízes da equação (3.6) é positiva e é dada por:

$$n^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4(\mu_n \lambda_2 + k \lambda_2 \gamma_2)(f \lambda_1 + k \lambda_1 \theta - k \mu_m \theta)}}{2(\mu_n \lambda_2 + k \lambda_2 \gamma_2)}, \quad (3.7)$$

sempre que

$$f \lambda_1 + k \lambda_1 \theta > k \mu_m \theta, \quad (3.8)$$

onde $b = k \lambda_1 \gamma_2 - f \lambda_2 - k \lambda_2 \theta - k \mu_m \gamma_2 + \mu_n \lambda_1$.

Utilizando o valor de n^* na equação (3.3), obtemos o valores positivo de m^* , sempre que

$$\lambda_1 + \lambda_2 n^* > \mu_m, \quad (3.9)$$

e utilizando novamente o valor de n^* com o valor de m^* na equação (3.4), obtemos o valor o valor de S^* .

Finalmente, utilizando os valores de n^* , m^* e S^* na equação (3.5), obtemos o valor de C^* sempre que seja satisfeita a condição

$$q + \alpha m^* - \delta_s S^* > 0. \quad (3.10)$$

Da equação (3.6) é claro notar que $\frac{dn^*}{df} > 0$. Com isso, a partir das equações (3.3) e (3.4) podemos de maneira simples obter que $\frac{dm^*}{df} > 0$, $\frac{dS^*}{df} > 0$. Isto implica que, quando a fonte de nutrientes f aumenta, os níveis de equilíbrio de concentração de nutrientes e de densidades de macrófitas e detritos também aumenta.

Da equação (3.5), temos

$$\frac{dC^*}{df} = \frac{1}{\mu_c} \left[\alpha - \delta \frac{\sigma \mu_m}{\mu_s} \right] \frac{dm^*}{df}, \quad (3.11)$$

que é negativo se

$$\left[\alpha - \delta_s \frac{\sigma \mu_m}{\mu_s} \right] < 0. \quad (3.12)$$

A condição acima (3.12) será facilmente satisfeita porque a maioria das macrófitas flutuam na superfície do corpo de água, pelo que o oxigênio formado pelas macrófitas aquáticas durante a fotossíntese pode ir para a atmosfera e uma pequena quantidade do mesmo será dissolvido na água, assim α é muito pequeno. Isto mostra que à medida que a taxa de nutrientes no corpo de água aumenta a concentração do oxigênio dissolvido diminui.

4. Análise de estabilidade

Nesta seção, realizamos a análise de estabilidade local dos pontos de equilíbrio obtidos. Esta análise caracteriza o comportamento das soluções que começam próximo do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio é dito localmente assintoticamente estável se para todos os pontos iniciais perto do ponto de equilíbrio, a trajetória solução aproxima-se ao ponto de equilíbrio quando

$t \rightarrow \infty$. A estabilidade local de um equilíbrio pode ser estudada por determinação do sinal dos valores próprios de matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio.

Seja M_1 a matriz Jacobiana do modelo (2.1) avaliada no ponto de equilíbrio $E_1(f/\mu_n, 0, 0, q/\mu_c)$, temos

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\mu_n & -\frac{\gamma_2 f}{\mu_n} & \gamma_1 \mu_s & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \frac{\lambda_2 f}{\mu_n} - \mu_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma \mu_m & -\mu_s & 0 \\ 0 & \alpha & -\delta_s & -\mu_c \end{pmatrix}$$

Da matriz M_1 , é simples observar que os autovalores de M_1 são $-\mu_n$, $\lambda_1 + \frac{\lambda_2 f}{\mu_n} - \mu_m$, $-\mu_s$ e $-\mu_c$.

Uma vez que três dos autovalores de M_1 são claramente negativos, então a estabilidade de E_1 vai depender do sinal de $\lambda_1 + \frac{\lambda_2 f}{\mu_n} - \mu_m$. Assim, E_1 é um ponto de equilíbrio instável pois

$$\lambda_1 + \frac{\lambda_2 f}{\mu_n} > \mu_m.$$

Agora, estudamos a estabilidade local do ponto de equilíbrio $E_2(n^*, m^*, S^*, C^*)$. A equação característica da matriz Jacobiana do modelo (2.1) avaliada nesse ponto de equilíbrio é dada por,

$$(\lambda + \mu_c)(\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3) = 0, \quad (4.13)$$

onde,

$$A_1 = \mu_s + \mu_n + \gamma_2 m^* + \lambda_1 + \lambda_2 n^* - \mu_m, \quad (4.14)$$

$$A_2 = (\lambda_2 m^* - \frac{\lambda_2}{k} m^{*2}) \gamma_2 n^* + (-\mu_n - \gamma_2 m^*)(\mu_m - \lambda_1 - \lambda_2 n^*) + \mu_s(\mu_n + \gamma_2 m^* + \lambda_1 + \lambda_2 n^* - \mu_m), \quad (4.15)$$

$$A_3 = \mu_s(\mu_n \lambda_1 + \mu_n \lambda_2 n^* - \mu_n \mu_m + \gamma_2 \lambda_1 m^* + \lambda_2 \gamma_2 n^* m^* - \gamma_2 \mu_m m^*) + (\lambda_2 \mu_s - \frac{\lambda_2 \mu_s m^*}{k})(f - \mu_n n^*). \quad (4.16)$$

Utilizando critérios de Routh-Hurwitz, é possível mostrar que as raízes do polinômio de terceiro grau $\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3$ têm parte real negativa se, e somente se,

$$A_i > 0, \text{ com } i = 1, 2, 3, \quad (4.17)$$

$$A_1 A_2 > A_3. \quad (4.18)$$

Portanto E_2 é localmente assintoticamente estável, assim temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *O ponto de equilíbrio $E_2(n^*, m^*, S^*, C^*)$ é localmente assintoticamente estável se valem as condições (4.17) e (4.18).*

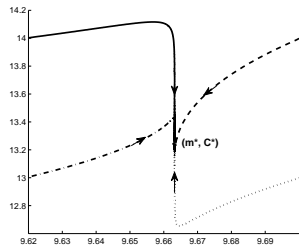


Figura 1: Equilíbrio E_2 . Estabilidade no plano m-C.

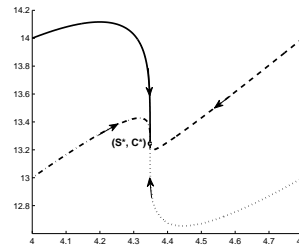


Figura 2: Equilíbrio E_2 . Estabilidade no plano S-C.

5. Simulações

Para verificar a viabilidade de nossa análise sobre a existência do equilíbrio interior $E_2(n^*, m^*, S^*, C^*)$ e as condições de estabilidade correspondentes, realizamos algumas simulações numéricas, na Tabela 1 são dados os valores dos parâmetros do modelo (2.1). Alguns destes valores foram tomados de Misra (2010).

Tabela 1: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações

Parâmetros	Valores	Unidades	Parâmetros	Valores	Unidades
f	0,5	$mg\ l^{-1}\ dia^{-1}$	μ_s	0,04	dia^{-1}
γ_1	0,02	-	γ_2	0,6	$l\ mg^{-1}\ dia^{-1}$
μ_n	0,005	dia^{-1}	λ_1	0,068	dia^{-1}
λ_2	0,4	$l\ mg^{-1}\ dia^{-1}$	μ_m	0,02	dia^{-1}
k	12	$mg\ l^{-1}$	σ	0,9	-
q	0,2	$mg\ l^{-1}\ dia^{-1}$	α	0,02	dia^{-1}
μ_c	0,01	dia^{-1}	δ_s	0,06	dia^{-1}

Verifica-se que, sob os valores dos parâmetros, condições para a existência do equilíbrio interior $E_2(n^*, m^*, S^*, C^*)$ estão satisfeitos e E_2 é dado por:

$$n^* = 0,0869, \quad m^* = 9,6640$$

$$S^* = 4,3488, \quad C^* = 13,2352.$$

Os autovalores correspondentes à matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio E_2 são $-0,01$, $-5,7966$, $-0,0896$, $-0,04$, os quais são todos negativos. Conseqüentemente o equilíbrio E_2 é assintoticamente localmente estável.

Além disso, novamente, para o conjunto acima de parâmetros, as trajetórias solução do plano $m - C$ e o plano $S - C$ para diferentes condições iniciais foram desenhadas nas Figuras 1 e 2. A partir destes dados, é claro que todas as trajetórias são atraídas pelo equilíbrio, o que indica a estabilidade de (m^*, C^*) e (S^*, C^*) , respectivamente.

O efeito da taxa de entrada de nutrientes f nas variáveis m , S e C estão apresentados nas Figuras 3, 5 e 6. Aqui, os valores dos outros parâmetros são como os dados na Tabela 1, excepto f . A partir destes dados, é claro que, uma vez que a taxa de entrada de nutrientes f aumenta, o nível do equilíbrio de densidades de macrófitas e detritos aumenta, considerando que a concentração do oxigênio dissolvido diminui.

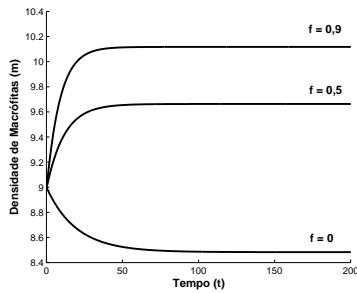


Figura 3: Variação da densidade de macrófitas para diferentes valores de f .

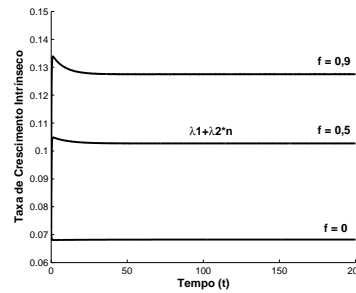


Figura 4: Variação da taxa de crescimento intrínseco ao longo do tempo.

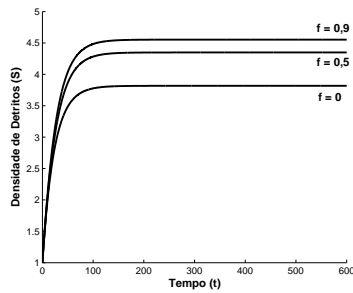


Figura 5: Variação da densidade de detritos para diferentes valores de f .

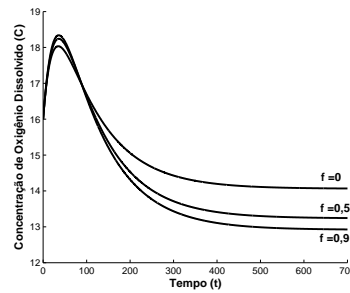


Figura 6: Variação da concentração de (OD) para diferentes valores de f .

A partir das Figuras 3, 5 e 6 vemos também que, se a taxa de entrada de nutrientes no meio aquático é zero, isto é, $f = 0$, então a densidade de macrófitas e detritos tendem à sua mínima densidade depois de um curto período de tempo e neste caso a concentração de oxigênio dissolvido tende para o seu valor máximo.

Finalmente na Figura 4, uma vez que a taxa de crescimento intrínseco depende da concentração de nutrientes, observa-se que quando a entrada de nutrientes aumenta a taxa de crescimento também aumenta.

6. Conclusões

Neste artigo, foi proposto um modelo não linear para estudar a depleção de oxigênio dissolvido em um meio aquático devido à proliferação excessiva de macrófitas aquáticas, para isso adicionamos à taxa de crescimento intrínseco uma resposta funcional linear entre concentração de nutrientes e população de macrófitas.

Não assumimos que há uma entrada permanente de nutrientes no meio aquático, assim, no caso de obter uma concentração de nutrientes nula, a taxa de crescimento intrínseco na dinâmica das macrófitas é constante e não nula, o que é mais de acordo com a realidade. O modelo exhibe dois pontos de equilíbrio, um trivial e o outro interior.

O primeiro equilíbrio é instável, enquanto o segundo equilíbrio é localmente assintoticamente estável. Mostra-se que, quando a taxa de entrada de nutrientes f no meio aquático aumenta, a concentração de nutrientes e as den-

sidades de macrófitas e detritos aumentam enquanto que a concentração de oxigênio dissolvido diminui o que também é mostrado nas simulações numéricas.

Referências

- Hulla, L., Parell, L., e Falcucci, M. (2008). Modelling dissolved oxygen dynamics in coastal lagoons. *Ecol. Model.*, 211:468–480.
- Misra, A. K. (2010). Modeling the depletion of dissolved oxygen in a lake due to submerged macrophytes. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 15:185–198.
- Pereira, A. M. (2004). Influência da velocidade de corrente no tratamento de efluentes de carcinicultura com a macrófita aquática *Pistia stratiotes*. Dissertação de Mestrado, UNESP, Jaboticabal/SP, Brazil.
- Rinaldi, S., Soncini-sessa, R., Stehfest, H., e Tamura, H. (1979). *Modelling and Control of River Quality*. McGraw-Hill.
- Rubianes, J. C. (2015). *Modelagem Matemática e Simulação Computacional da Influência de Poluentes e da Velocidade de Corrente na Dinâmica Populacional de Macrófitas Aquáticas*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.
- Voinov, A. A. e Tonkikh, A. P. (1987). Qualitative model of eutrophication in macrophyte lakes. *Ecol. Model.*, 35:211–226.