

MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA POLUIÇÃO DE RIOS
POR MERCÚRIO METÁLICO : O CASO EVOLUTIVO

JOÃO FREDERICO C. A. MEYER - UNICAMP
DMA - IMECC / UNICAMP
DIOMAR CRISTINA MISTRO - UNICAMP
DMA - IMECC / UNICAMP

MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA POLUIÇÃO DE RIOS
POR MERCÚRIO METÁLICO : O CASO EVOLUTIVO

JOÃO FREDERICO C. A. MEYER - UNICAMP

DMA - IMECC / UNICAMP

DIOMAR CRISTINA MISTRO - UNICAMP

DMA - IMECC / UNICAMP

§ 1. INTRODUÇÃO

A contaminação por mercúrio lançado ao meio ambiente oferece sérios riscos à biota e à população humana. Seus efeitos já foram verificados no Japão e no Canadá nos anos 50 e 60, posteriormente no Iraque, na Suécia e na Finlândia nos anos 70. A causa, na maioria dos casos, foi a ingestão de alimentos contaminados por mercúrio, especialmente peixes.

No Brasil, foram relatados casos de contaminação humana na Bahia, há cerca de 20 anos, e a causa foi a ingestão de mariscos contaminados pelo lançamento de mercúrio por uma indústria cloro-álcalis.

A mineração de ouro aluvial é uma atividade que aumenta a preocupação quanto à contaminação ambiental.

Este tipo de mineração envolve atualmente cerca de 600 mil garimpeiros espalhados por várias regiões brasileiras, com maiores concentrações na Amazônia (Rondônia, Roraima e Pará), norte do Mato Grosso e Goiás e norte do Rio de Janeiro (cf[11]).

Nosso intuito neste trabalho é o de modelar matematicamente e simular numericamente a presença de Hg^0 em rios proveniente da mineração de ouro aluvional, através do Método de Elementos Finitos.

§ 2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

De acordo com Silveira e outros (cf[12]), o ouro presente no Rio Madeira é extremamente fino - 60 a 80 mil fagulhas para se produzir um grama do metal precioso - e conseqüentemente o

percentual de perdas é muito grande. Por esse motivo, o Hg metálico é utilizado na amalgamação do ouro. Este processo envolve a mistura de Hg metálico com o sedimento fluvial, pré-concentrado gravimetricamente, e posterior separação da amálgama por queima e consequente volatilização do Hg.

Estimativas preliminares indicam que para cada kilograma de ouro produzido, pelo menos 1.32 kg de Hg é liberado para o meio ambiente, sendo cerca de 55% lançado na atmosfera por sublimação durante a queima e cerca de 45% na forma de Hg metálico lançado diretamente ao rio durante as diferentes fases do processo de extração.

Em [12], Silveira e outros ilustram este processo através de uma figura aqui reproduzida, ver fig.1. Este esquema mostra o ciclo esquemático do destino do Hg na região do Rio Madeira.

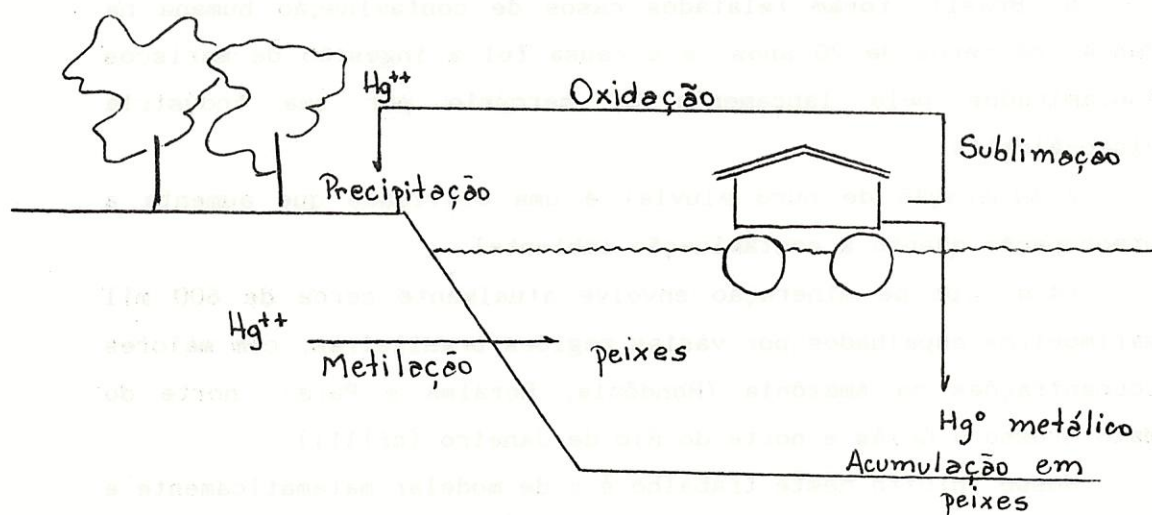


fig.1

O Hg liberado diretamente para o rio, deverá depositar-se e eventualmente acumular-se no sedimento de fundo, ficando relativamente imóvel, uma vez que as condições físico-químicas do Rio Madeira não favorecem sua imediata remobilização.

A fração liberada para a atmosfera será rapidamente oxidada e carregada pelas precipitações para áreas adjacentes ao rio, geralmente ocupadas por matas tropicais. Nos solos e rios da floresta, de pH ácido e baixa condutividade, o processo de monometilação do Hg será favorecido, colocando o Hg novamente em disponibilidade.

Pretendemos modelar neste trabalho a concentração de Hg metálico lançado diretamente ao rio.

§ 3. O MODELO GENÉRICO

Consideramos o trecho do rio a ser estudado como sendo um prisma Σ , ilustrado na fig.2. Segundo Marchuk [7], Murray [9], Okubo [10], Edelstein-Keshet [4], entre outros, sendo $C(t; \underline{x})$ a concentração de Hg num instante $t \in I = (0, T)$ e num ponto $\underline{x} \in \Sigma$; a equação que descreve o comportamento de $C(t; \underline{x})$ em $I \times \Sigma$ é :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \text{div} (\alpha \text{ grad } C) + \sigma C + \text{div} (V C) = f \quad (3.1)$$

Esta equação incorpora quatro fenômenos distintos, quais sejam:

(1) O fenômeno de difusão, que é um processo pelo qual as partículas se movimentam aleatoriamente. Descrevemos a difusão através do termo $-\text{div} (\alpha \text{ grad } C)$ onde α é o coeficiente de difusibilidade do mercúrio na água.

(2) O decaimento da concentração de Hg que se dá, por exemplo, pela ingestão das partículas por peixes que retêm parte desse mercúrio ou ainda pela passagem direta do Hg para a forma metilada, entre outras razões. Este fenômeno aparece na equação (3.1) no termo σC onde σ é a taxa de decaimento. O significado dessa quantidade fica especialmente claro se colocamos $\alpha = 0$, $f = 0$ e $V = 0$, obtendo a equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sigma C = 0$$

da vazão do rio onde o domínio estudado foi um corte transversal desse rio.

Nessa segunda abordagem, procuramos usar o modelo (3.1) com uma nova escolha de domínio. O propósito é o de incluir o fenômeno de transporte do mercúrio pela própria vazão do rio.

Vamos supor um trecho do rio suficientemente longo de maneira que a concentração $C(t; \underline{x})$ de Hg seja nula a jusante — situação esta que ocorre de fato [13].

Estudaremos agora a concentração $C(t; \underline{x})$ de Hg em uma secção longitudinal do rio, ilustrada na fig.3 e que identificamos como Ω .

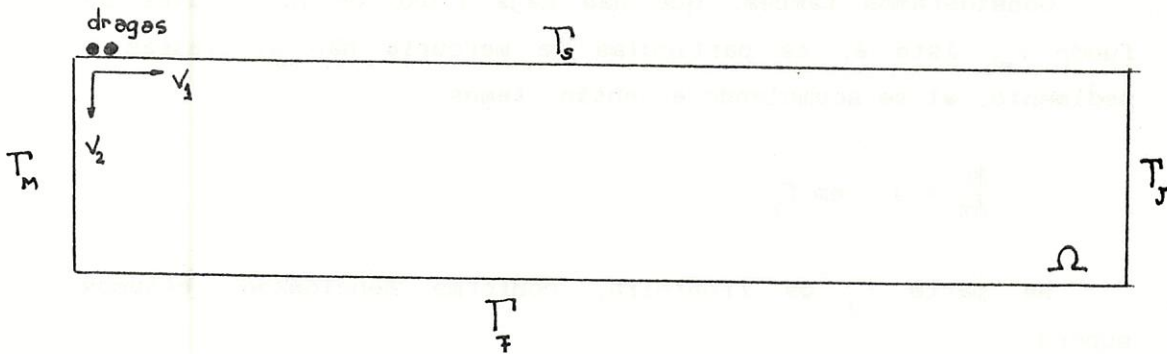


fig.3

Supomos que o mercúrio despejado por algumas dragas a montante desloca-se uma distância limitada rio abaixo no plano Ω por meio de fluxo laminar nunca ultrapassando, porém, a secção de reta Γ_J que identifica a extremidade do prisma.

Com essa abordagem do problema, introduzimos no modelo a ação da correnteza, além da ação da gravidade. Para isto tomamos o campo V — do termo $\text{div} (V C)$ — não mais como $(0, V_2)$ (vide [8]), mas como sendo $V = (V_1, V_2)$ onde V_1 representa a velocidade horizontal da correnteza que carrega as partículas rio abaixo e V_2 a velocidade vertical das partículas de Hg deslocadas pela ação da gravidade em direção ao fundo do rio.

Tomamos o coeficiente de difusibilidade do Hg na água como

sendo constante, o que faz com que o termo de difusão torne-se $-\alpha \Delta C$.

Consideramos que não haja entrada nem saída de Hg pela parte Γ_H da fronteira, ou seja, admitimos que não haja entrada de mercúrio proveniente de dragas acima do trecho considerado, isto é:

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_H.$$

Na superfície Γ_S do rio, admitimos que não haja perda de Hg por evaporação e, portanto,

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_S.$$

Consideramos também, que não haja fluxo de Hg através do fundo Γ_F , isto é, as partículas de mercúrio não atravessam o sedimento, aí se acumulando e, então, temos:

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_F.$$

Na parte Γ_J da fronteira, conforme mencionado, estamos supondo

$$C(t;x,y) = 0.$$

Inicialmente, para $t \leq 0$, admitimos as dragas, aqui consideradas como as fontes de Hg, desligadas em termos de emissão, sendo ligadas e emitindo mercúrio a partir do instante subsequente ($t > 0$). Temos assim, como condição inicial:

$$C(0;x,y) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Desse modo, então, a E.D.P. que modela esta abordagem do problema fica:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \alpha \Delta C + \sigma C + V_1 \frac{\partial C}{\partial x} + V_2 \frac{\partial C}{\partial y} = f \quad \text{em } I \times \Omega \quad (4.1)$$

e, as condições de contorno e inicial são dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_S \cup \Gamma_H \cup \Gamma_F,$$

$$C(t; x, y) = 0 \quad \text{em } \Gamma_J \quad \text{e} \quad (4.2)$$

$$C(0; x, y) = C_0(x, y) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

§ 5. FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Ao fazermos a formulação clássica para esta abordagem do problema de difusão/advecção de Hg, deparamo-nos com o mesmo problema de abordagem anterior: as fontes poluidoras não são necessariamente contínuas nas variáveis espaciais e temporal (é bastante razoável, aliás, supor que não o sejam!). Recorremos então, à formulação variacional, com a qual exigimos apenas que f seja de quadrado Lebesgue integrável.

Assim, fazendo a formulação variacional de (4.1), obtemos para cada $t \in I$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v \, ds - \alpha \int_{\Omega} \Delta C v \, ds + \sigma \int_{\Omega} C v \, ds + V_1 \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} v \, ds +$$

$$+ V_2 \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, ds, \quad \forall v \in V \subset H^1(\Omega),$$

onde $V = \{ v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \Gamma - \Gamma_J \text{ e } v = 0 \text{ em } \Gamma_J \}$

Aplicando o Teorema de Green e usando as condições de contorno (4.2) na segunda integral do primeiro termo, obtemos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v \, ds + \alpha \int_{\Omega} \nabla C \nabla v \, ds + \sigma \int_{\Omega} C v \, ds + V_1 \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} v \, ds +$$

$$+ V_2 \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, ds, \quad \forall v \in V.$$

Usando a notação do produto escalar em $L^2(\Omega)$, escrevemos o

problema acima da seguinte forma:

Achar $C : I \rightarrow V$ tal que, para cada $t \in I$, valha:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial C}{\partial t} | v \right\rangle + \alpha \langle \nabla C | \nabla v \rangle + \sigma \langle C | v \rangle + V_1 \left\langle \frac{\partial C}{\partial x} | v \right\rangle + \\ + V_2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial y} | v \right\rangle = \langle f | v \rangle, \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (5.1)$$

Fazendo:

$$a(t; u, v) = \alpha \langle \nabla C | \nabla v \rangle + \sigma \langle C | v \rangle + V_1 \left\langle \frac{\partial C}{\partial x} | v \right\rangle + V_2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial y} | v \right\rangle$$

e

$$L_f(v) = \langle f | v \rangle,$$

o problema (5.1) se reduz a encontrar $C \in L^2(I; V)$ tal que, para cada $t \in I$, valha a seguinte igualdade:

$$\left\langle \frac{\partial C}{\partial t} | v \right\rangle + a(t; u, v) = L_f(v), \quad \forall v \in V \quad (5.2)$$

Em termos de existência e unicidade da solução procurada, estamos nas condições do seguinte teorema de Lions (cf[6]):

Se o operador $a(t; u, v)$ é tal que:

(i) $\forall u, v \in V$, a função $t \rightarrow a(t; u, v)$ é mensurável;

$$(ii) | a(t; u, v) | \leq M \| u \|_{H^1(\Omega)} \cdot \| v \|_{H^1(\Omega)}; \text{ e}$$

(iii) $\exists \lambda$ tal que

$$a(t; u, u) + \lambda \| u \|_{L^2}^2 \geq \delta \| u \|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \delta > 0, \quad u \in V;$$

e se

(iv) $L_f(v)$ é contínuo,

então o problema variacional (5.2) admite uma única solução.

De fato, temos

(1) Mensurabilidade do operador $a(t; u, v)$, está garantida pela própria definição de $a(t; u, v)$.

(2) Continuidade de $a(t; u, v) : \forall t \in I$,

tomando $\mu_0 = \max \{ \alpha, \sigma \}$, pela desigualdade de Cauchy temos

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, ds + \sigma \int_{\Omega} u v \, ds \leq \mu_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Da desigualdade de Hölder,

$$V_2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v \, ds \leq V_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq V_2 \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

e,

$$V_1 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, ds \leq V_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq V_1 \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

e então,

$$\begin{aligned} |a(t; u, v)| &\leq \mu_0 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + (V_2 + V_1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} = \\ &= (\mu_0 + V_1 + V_2) \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

(3) Coercividade de $a(t; u, v)$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} a(t; v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 &= \alpha \int_{\Omega} \sum_1 \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 \, ds + (\lambda + \sigma) \int_{\Omega} |v|^2 \, ds \\ &+ V_2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \cdot |v| \, ds + V_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \cdot |v| \, ds. \end{aligned}$$

Tomando $V_0 = \max \{V_1, V_2\}$ e usando a desigualdade de Hölder, temos que:

$$a(t; v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 \geq \alpha \sum_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2}^2 + (\lambda + \sigma) \|v\|_{L^2}^2 -$$

$$- \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} \cdot \left\| v \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \cdot \left\| v \right\|_{L^2} \right]$$

Usando o recurso clássico fornecido pela desigualdade

$$-ab \geq \frac{\varepsilon}{2} a^2 - \frac{1}{2\varepsilon} b^2 \quad \text{para } a, b \text{ quaisquer positivos}$$

a desigualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} a(t; u, v) + \lambda \left\| v \right\|_{L^2}^2 &\geq \alpha \sum_I \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 + (\lambda + \sigma) \left\| v \right\|_{L^2}^2 - \\ &- \frac{V_0 \varepsilon}{2} \sum_I \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 - \frac{V_0}{2\varepsilon} \left\| v \right\|_{L^2}^2 = \\ &= \left(\alpha - \frac{V_0 \varepsilon}{2} \right) \sum_I \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 + \left(\lambda + \sigma - \frac{V_0}{2\varepsilon} \right) \left\| v \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Logo temos:

$$a(t; v, v) \geq \delta \left\| v \right\|_{H^1}^2,$$

onde $\delta = \min \left\{ \left(\alpha - \frac{V_0}{2} \right), \left(\lambda + \sigma - \frac{V_0 \varepsilon}{2\varepsilon} \right) \right\}$ e $\delta > 0$, bastando escolher λ, ε de modo conveniente.

(4) Continuidade do operador $L_f(v)$, ou seja,

$$\left\| L_f(v) \right\| \leq \left\| f \right\|_{L^2} \cdot \left\| v \right\|_{L^2}, \quad \forall v \in V.$$

De fato, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_{\Omega} f v \, ds \right| \leq \int_{\Omega} |f| \cdot |v| \, ds \leq \left\| f \right\|_{L^2} \cdot \left\| v \right\|_{L^2}.$$

Portanto, estão garantidas a existência e a unicidade da solução do problema variacional (5.2).

§ 6. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DO PROBLEMA

Visando o uso do Método dos Elementos Finitos nas variáveis espaciais, optamos pelo Método de Galerkin para fazermos a discretização dessas variáveis. Assim, sejam V_h um subespaço de dimensão finita de V e $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ uma base desse subespaço.

Uma aproximação $C_h \in V_h$ da solução C será escrita como:

$$C_h(t; x, y) = \sum_{i=1}^N C_i(t) \cdot \varphi_i(x, y) \quad , \quad (6.1)$$

para a qual

$$\frac{\partial C_h}{\partial t}(t; x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{d C_i(t)}{dt} \cdot \varphi_i(x, y)$$

onde os $C_i(t)$ são as funções a serem determinadas, correspondendo (para cada $t \in I$) aos coeficientes da discretização espacial.

Agora então, o problema (5.2) no subespaço V_h passa a ser:

Achar $C_1(t), C_2(t), C_3(t), \dots, C_N(t)$ tais que, para cada $t \in I$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{d C_i(t)}{dt} \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle + \alpha \sum_{i=1}^N C_i(t) \langle \nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j \rangle + \sigma \sum_{i=1}^N C_i(t) \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle + \\ & + v_1 \sum_{i=1}^N C_i(t) \langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} | \varphi_j \rangle + v_2 \sum_{i=1}^N C_i(t) \langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} | \varphi_j \rangle = \\ & = \langle f | \varphi_j \rangle \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

ou

$$\sum_{i=1}^N \frac{d C_i(t)}{dt} \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N C_i(t) [\alpha \langle \nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j \rangle + \sigma \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle + V_2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} | \varphi_j \rangle + V_1 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} | \varphi_j \rangle] = \\
& = \langle f | \varphi_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.2)
\end{aligned}$$

que é um sistema de equações diferenciais ordinárias expresso matricialmente como

$$A \frac{dC}{dt} + DC = B \quad (6.3)$$

onde as notações são evidentes.

§ 7. DISCRETIZAÇÃO DO INTERVALO DE TEMPO

Na discretização da variável do tempo, a opção foi pelo Método de Crank-Nicolson, no qual temos $C_i^{(n)} \approx C(t_n; x_i, y_i)$ e

$$\frac{d}{dt} C_i(t_n + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{C_i(t_{n+1}) - C_i(t_n)}{\Delta t}$$

além de,

$$C_i^{(n+1/2)} = \frac{C_i^{(n+1)} + C_i^{(n)}}{2},$$

ambas da ordem de $(\Delta t)^2$.

Faremos ainda, como é usual,

$0 = t_0$, $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$, $\Delta t = T/N_T$, onde N_T é o número de subintervalos com os quais é particionado o intervalo I.

Assim, a equação (6.2) passa a ser:

$$\sum_{i=1}^N \frac{C_i^{(n+1)} - C_i^{(n)}}{\Delta t} \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle +$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{C_i^{(n+1)} + C_i^{(n)}}{2} [\alpha \langle \nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j \rangle + \sigma \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle + V_2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} | \varphi_j \rangle + V_1 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} | \varphi_j \rangle] =$$

$$= \langle f^{(n+1/2)} | \varphi_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Usando a notação:

$$a_{ij} = \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle,$$

$$d_{ij} = \alpha \langle \nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j \rangle + \sigma \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle + V_2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} | \varphi_j \rangle + V_1 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} | \varphi_j \rangle e$$

$$b_{ij} = \langle f | \varphi_j \rangle,$$

a equação se torna

$$\sum_{i=1}^N C_i^{(n+1)} a_{ij} - \sum_{i=1}^N C_i^{(n)} a_{ij} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N C_i^{(n+1)} d_{ij} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N C_i^{(n)} d_{ij} =$$

$$= \frac{\Delta t}{2} (b_j^{(n+1/2)}), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.4)$$

Agrupando-se os termos de (6.4) de maneira conveniente, podemos reescrever a equação acima como

$$\sum_{i=1}^N C_i^{(n+1)} (a_{ij} + \frac{\Delta t}{2} d_{ij}) = \sum_{i=1}^N C_i^{(n+1)} (a_{ij} - \frac{\Delta t}{2} d_{ij})$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} (b_j^{(n+1/2)}), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.5)$$

Temos então, N sistemas lineares da forma:

$$[A + \frac{\Delta t}{2} D] C^{(n+1)} = [A - \frac{\Delta t}{2} D] C^{(n)} + B^{(n+1/2)} \quad (6.6)$$

sendo $C^{(0)} = 0$.

Em suma, foram efetuados dois passos maiores de simplificação do problema:

- (1) A discretização espacial via Galerkin/Elementos Finitos e,
- (2) A discretização temporal usando Crank-Nicolson.

Isto corresponde a calcular, a cada passo no tempo, um vetor de coeficientes $(C_i^{(n)})_i$ que aproxima os valores de $C(t_n; x_1, y_1)$ onde x_1, y_1 são os nós da discretização espacial e t_n os passos da discretização temporal.

Nem sempre é possível "fornecer" à equação os valores de $b_j^{(n+1/2)}$. Nesses casos, pode-se usar $\frac{1}{2} (b_j^{(n+1)} + b_j^{(n)})$ mantendo-se a ordem da aproximação em $(\Delta t)^2$.

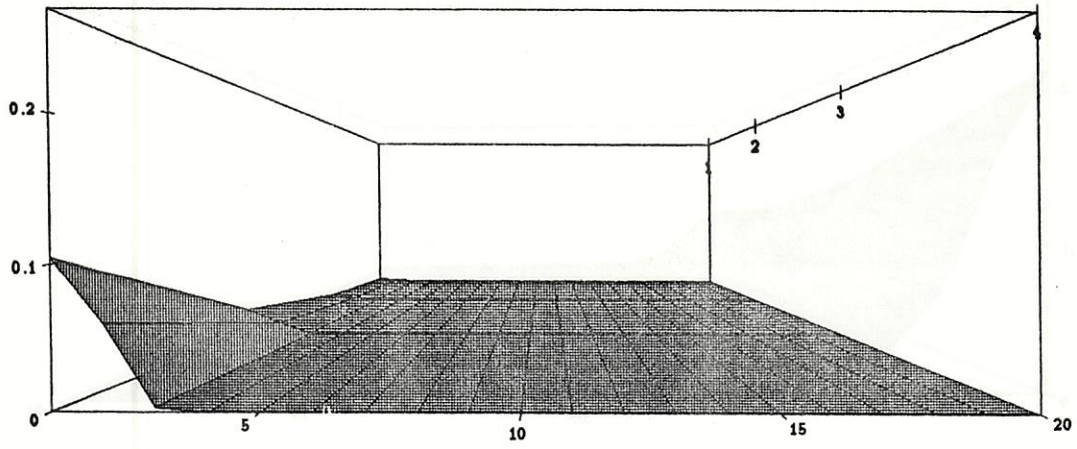
§ 7. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nos ensaios numéricos que fizemos, usamos Elementos Finitos de primeira ordem numa triangulação regular.

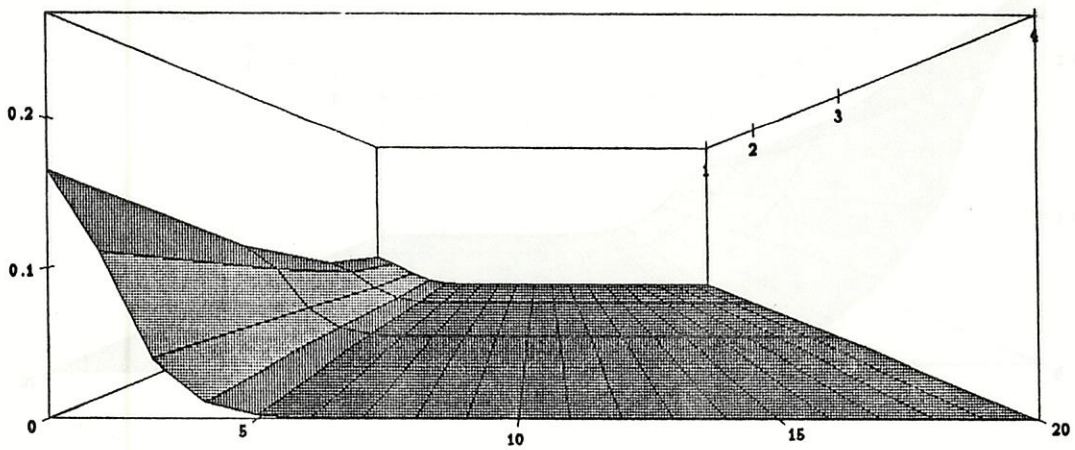
As fontes poluidoras localizam-se em apenas alguns elementos (simulando a emissão localizada de Hg feita pelas dragas, que de fato ficam agrupadas em uma "fofoca" — denominação popular do local em que se está encontrando maior quantidade de ouro).

Apresentamos, abaixo, os gráficos da concentração de mercúrio que obtivemos ao considerar o coeficiente de difusividade $\alpha = 1$, o coeficiente de dispersão $\sigma = 0.008$ e o vetor V com componentes $V_1 = 0.5$ e $V_2 = -0.5$. Cada gráfico corresponde à concentração de mercúrio no corte Ω , em diferentes instantes de tempo.

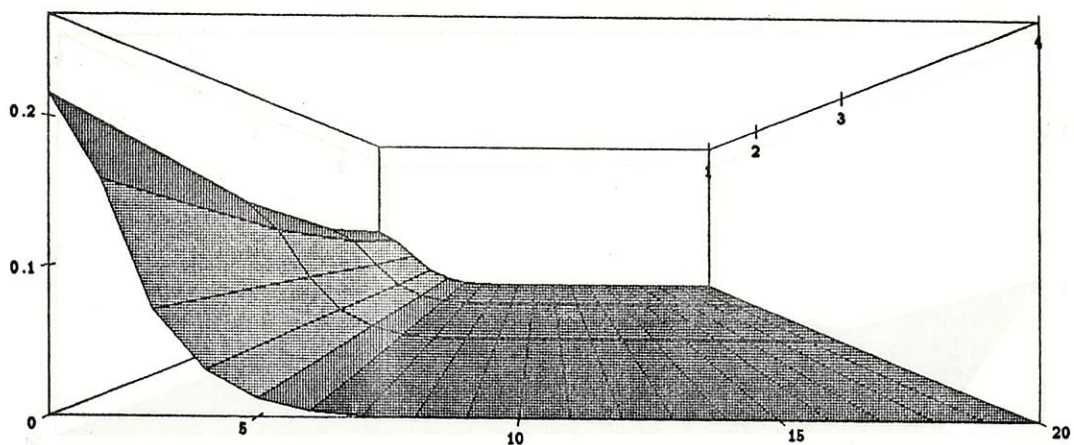
Para $t = 0.1$ unidade de tempo:



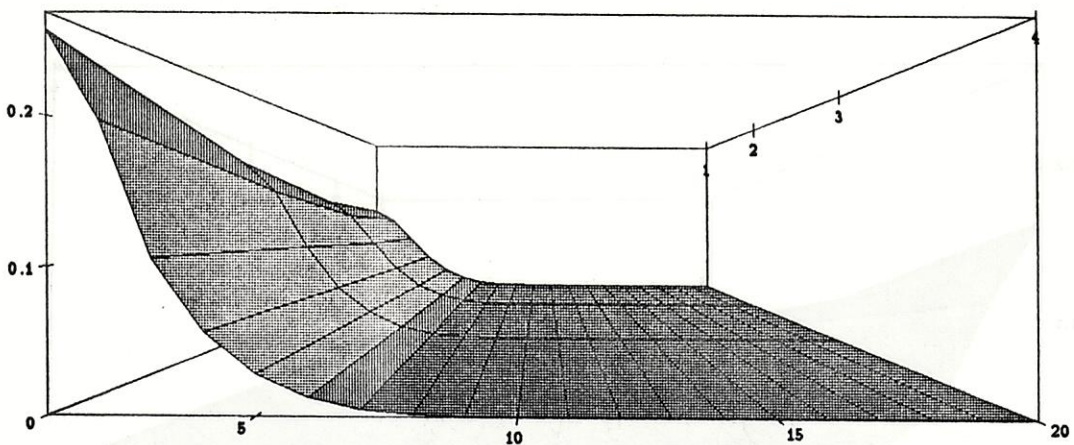
Para $t = 0.4$ unidade de tempo:



Para $t = 0.7$ unidade de tempo:



Para $t = 1$ unidade de tempo:



Estes gráficos foram animados por meio do pacote MATHEMATICA. Presentemente estão sendo feitos ensaios com o uso de Up-winding para estudos comparativos.

§ 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Carey, G. F. et Oden, J. T., Finite Elements, Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1984.
- [2] Ciarlet, P. G., The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam, North-Holland, 1987.
- [3] Crank, J., The Mathematics of Diffusion 2nd ed., Clarendon, Oxford, 1975.
- [4] Edelstein-Keshet, L., Mathematical Models in Biology, Random House/Birkhauser, 1987.
- [5] Johnson, C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Elements Method, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [6] Lions, J. L., Equations Diferentielles Operationnelles, Springer, Berlim, 1961.
- [7] Marchuk, G. I., Mathematical Models in Environmental Problems, *Studies in Mathematics and Its Application*, Vol #16, North-Holland, 1986.
- [8] Meyer, J. F. et Mistro, D. C., Um Modelo para o Estudo do Problema de Difusão de Mercúrio em Rios, Trabalho apresentado no XII CNMAC, Águas de Lindóia, 1990.
- [9] Murray, J. D., Mathematical Biology, Berlim, Springer, 1989.
- [10] Okubo, A., Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models, *Biomathematics*, Vol #10, Springer, Berlim, 1980.
- [11] Pfeiffer, W. C.; Malm, O.; Souza, C. M. M.; Lacerda, L. D.; Silveira, E. G., A Ameaça do Mercúrio nos Garimpos, *Ciência Hoje*, Vol #11, n^o 61, 1990.
- [12] Silveira, E. G. et al, Contaminação por Mercúrio na Amazônia: Avaliação Preliminar do Rio Madeira (Rondônia), 1^o CBGq, Vol #2, 1987.

[13] Soares, P. V., Estudo da Contaminação por Mercúrio e Metais Pesados em Garimpo de Ouro Primário - O Estudo do Caso da Região de Pilar de Goiás e Guarinos - Goiás, Tese de Mestrado, Instituto de Geociências, UNICAMP, Campinas, 1990.