BIOMATEMÁTICA
UNICAMP

Um Modelo Simples de Incerteza: Mortalidade × Pobreza

L. C. de Barros e R. C. Bassanezi
IMECC - UNICAMP

Um Modelo Simples de Incerteza: Mortalidade × Pobreza

L. C. de Barros e R. C. Bassanezi
IMECC - UNICAMP

1. *Introdução*

A "pobreza" tem vários indicadores como "medidas": Consumo de calorias, de ferro, de vitaminas, posse de bens materiais, níveis de renda, de salário, educação, etc.

O objetivo de nosso trabalho é mostrar efetivamente a influência da pobreza na esperança de vida de um grupo. Poderíamos ter usado , se tivéssemos dados suficientes, qualquer indicador de pobreza ou mesmo uma composição destes indicadores. Por simplicidades e sendo realistas quanto aos dados obtidos, usaremos o indicador nível de renda como medida subjetiva de pobreza, isto é, alguém será tanto mais pobre quanto menor for sua renda.

Neste trabalho fazemos um estudo comparativo entre o método estocástico clássico e as técnicas da estatística fuzzy, usando um modelo de esperança de vida para um grupo de indíviduos, considerando seu nível salarial.

A comparação é feita com a distribuição de Pareto para a renda.

A nosso ver o procedimento com os argumentos fuzzy, além de ser mais lógico e natural, é mais simples que o estocástico usual.

2. *Modelo*

Seja A um grupo de pessoas com $n(t)$ indivíduos num instante t. A questão é saber quantos elementos do conjunto A estarão vivos no instante $(t+\Delta t)$, assumindo que as "causa mortis" sejam naturais e também influenciadas pelo grau de pobreza. Assim, estamos interessados em saber o valor de $n(t+\Delta t)$.

O modelo estocástico de Boltzman nos dá:

$$n(t+\Delta t) = n(t)(1 - m(\Delta t))$$

onde $m(\Delta T)$ é a *probabilidade* de um indivíduo do grupo A morrer durante o tempo Δt.

Agora, se considerarmos que a pobreza (aqui avaliada subjetivamente pelo nível de renda) seja um fator de redução do tempo de vida de cada elemento de A, podemos considerar:

$$m\,(\Delta t) = \Delta t\,(\lambda_1 + f(r)\,\lambda_2) \quad ,\text{onde}$$

λ_1 é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispõe de condições satisfatórias de sobrevivência).
$f(r)\lambda_2$ indica a influência da pobreza no aumento da taxa λ_1.
$f(r)$ indica o conjunto fuzzy de pobres, isto é, $f(r) \in [0,1]$ onde r é um parâmetro proporcional à renda e λ_2 uma constante oportuna de cada grupo.

Observamos que $f(r)$ é não-crescente com r e quando $f(r) \cong 1$ temos $p(\Delta t) \cong \Delta t(\lambda_1 + \lambda_2)$. Então, $(\lambda_1 + \lambda_2)$ pode ser considerada a taxa de mortalidade dos mais pobres.

Temos então,

$$n\,(t+\Delta t) = n(t)[1 - \Delta t\,(\lambda_1 + f(r)\lambda_2)]$$

ou

$$\frac{n\,(t+\Delta t) - n\,(t)}{\Delta t} = (\lambda_1 + f(r)\lambda_2)n(t)$$

Passando ao limite com $\Delta t \to 0$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{dn}{dt} = (\lambda_1 + f(r)\lambda_2)n$$

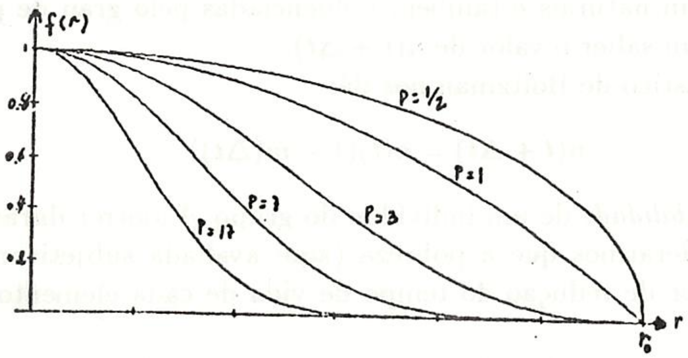
cuja solução é dada por

$$n(t) = n(0)e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 f(r)t}$$

O conjunto fuzzy $f(r)$ pode ser representado de maneira subjetiva por qualquer função não crescente com valores em $[0,1]$.
No nosso caso específico, achamos conveniente definir

$$f_p(r) = \begin{cases} [1 - (\frac{r}{r_0})^2]^p & \text{se } 0 < r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

O parâmetro p nos dá uma característica de cada grupo estudado



Podemos verificar facilmente que quanto maior o valor de p , menor será a dependência do grupo em relação à renda para sobreviver. Assim, p revela intuitivamente

se o " ambiente" em que o grupo vive é mais ou menos favorável à vida.
p pode nos dar uma idéia do grau de saturação do ambiente para a sobrevivência (meio urbano, rural, floresta, etc) e por isso chamaremos p de *parâmetro ambiental.*

Observamos que se $p_1 \geq p_2$ então $f_{p_1}(r) \leq f_{p_2}(r)$ para todo r, e portanto, quanto maior for o valor de p menor será a taxa de mortalidade $(\lambda_1 + f_p(r)\lambda_2)$ do grupo.

$$\text{se} \quad p \to +\infty \quad \text{então} \quad f_p(r) \to f_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad r > 0 \\ 1 & \text{se} \quad r = 0 \end{cases}$$

Observação: Dado uma equação do tipo

$$Lu + <\lambda> u = 0$$

onde L é um operador diferencial e $<\lambda>$ a média de algum parâmetro λ, não é geralmente verdade que a sua solução u seja a mesma solução média $<u>$ da equação

$$Lu + \lambda u = 0$$

considerando a distribuição dos λ.

Nosso problema agora é determinar o valor esperado $<n(t)>$ da população A no instante t.

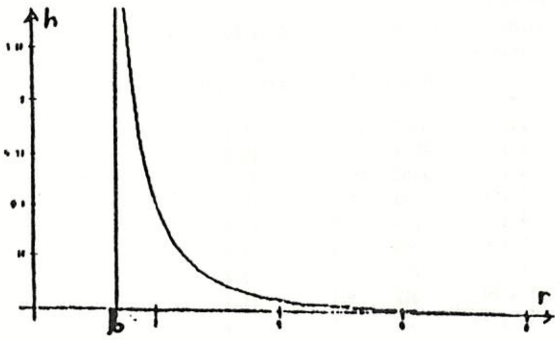
A esperança matemática clássica é dada por:

$$<n(t)> = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h(r)dr$$

onde $h(r)$ é uma densidade de distribuição da renda r no grupo.

Para nosso caso específico vamos usar a distribuição de Pareto [3], com parâmetros a e b:

$$h(r) = \begin{cases} ab^a r^{-a-1} & \text{se} \quad r \geq b \\ 0 & \text{se} \quad r < b \end{cases}$$



Assim,

$$<n(t)> = n(0)e^{-\lambda_1 t} \; ab^a \int_b^{\infty} e^{-\lambda_2 t f(r)} \, r^{-a-1} dr$$

agora,

se $r_0 \le b$, $f_p(r) = 0$ para $r \ge b$ e

$$\langle n(t)\rangle = n(0)e^{-\lambda_1 t}ab^a \int_b^\infty r^{-a-1}dr = n(0)e^{-\lambda_1 t} \quad \text{para todo } a > 0 \quad ,$$

ou seja, o valor de b do grupo é suficientemente grande para que não haja interferência da ***pobreza*** na esperança de vida do grupo.

Se $r_0 > b$, podemos calcular o valor aproximado de $< n(t) >$ usando o método de Laplace [6], isto é,

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\delta)e^{-\lambda\varphi(\delta)}d\delta \cong g(\delta_0)e^{-\lambda\varphi(\delta_0)}\left[\frac{2\Pi}{\lambda\varphi''(\delta_0)}\right]^{1/2} ,$$

onde δ_0 é tal que $\varphi'(\delta_0) = 0$ e $\varphi''(\delta_0) > 0$, com $\lambda > 0$ (escolhido convenientemente). Em nosso caso específico, temos

$$f_p'(r) = -\frac{2pr}{r_0^{2p}}(r_0^2 - r^2)^{p-1} \quad \text{e}$$

$$f_p''(r) = -\frac{2p}{r_0^{2p}}(r_0^2 - r^2)^{p-1} + \frac{4p(p-1)r^2}{r_0^{2p}}(r_0^2 - r^2)^{p-2}$$

e o grupo estudado corresponde aos seguintes dados:

DISTRIBUICAO DO TOTAL DOS TRABALHADORES, POR FAIXAS DE SALARIO MINIMO E PARTICIPACAO NA FOLHA DE PAGAMENTOS
S.T.I. METALURGICAS, MECANICAS E DE MATERIAL ELETRICO DE RECIFE
MARCO DE 1988

FAIXA DE SALARIOS-MINIMOS	DISTRIBUICAO No.abs	DISTRIBUICAO %	% da folha de pagamentos
ate 2	4003	45,0	21,1
2 a 3	2099	23,6	18,8
ate 3	6102	68,7	39,9
3 a 4	533	10,5	12,0
4 a 5	670	7,5	11,0
5 a 6	300	3,4	6,0
6 a 7	264	3,0	6,2
7 a 10	367	4,1	11,1
10 a 15	171	1,9	7,8
+ de 15	81	0,9	6,1
TOTAL	8[illegible]88	100,0	100,0

Fonte: DIEESE

Tomando $p = 2$, $f_2(r) = [1 - (\frac{r}{r_0})^2]^2$ satisfaz as condições de Laplace, e

$$
\begin{aligned}
< n(t) > &\cong n(0)e^{\lambda_1 t} a b^a r_0^{-a-1} [\frac{2\Pi}{\lambda_2 t \frac{8}{r_0^2}}]^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2} n(0) e^{-\lambda_1 t} a \left(\frac{b}{r_0}\right)^a \left(\frac{\Pi}{\lambda_2 t}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

O parâmetro a representa o " achatamento" da curva de distribuição da renda e podemos observar aqui que quanto maior o valor de a menor será o valor médio da população num instante t.

Uma simulação dos parâmetros fornece os valores $a = 2,03$ e $b = 1,72$, com $r_0 = 4$, e $\lambda_2 = 0,12$.

Então,

$$
< n(t) > \cong 0,936 n(0) e^{-\lambda_1 t}/\sqrt{t} \quad \text{ou} \quad < \frac{n(t)}{n(0)} > \cong 0,936 e^{\lambda_1 t}/\sqrt{t}
$$

3. *Valor Esperado Fuzzy* (FEV)

Daremos aqui apenas um resumo dos principais conceitos e resultados que usaremos para avaliar a esperança fuzzy de uma população, sujeita à interferência da renda de seus elementos [2].

Dizemos que uma função de conjunto $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ é uma *medida fuzzy* sobre $X \neq \phi$, se μ satisfaz as seguintes condições:

(F_1) $\mu(\phi) = 0$ e $\mu(X) = 1$

(F_2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(F_3) se$\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ *e* $A_n \uparrow A$, então $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.

Seja $Y : X \to [0,1]$ e μ é uma medida fuzzy sobre X , então

$FEV[Y] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\inf(\alpha, \mu\{Y \geq \alpha\})]$ *é a esperança fuzzy* de Y

onde $\{Y \geq \alpha\} = \{x \in X$ tal que $Y(x) \geq \alpha\}$

Proposição 1 - "*Se* $k \in [0,1]$ *é uma constante, então* $FEV[k] = k$.

Teorema 2 [5] - *Seja* $A = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$, $\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ *com* $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_{n+1} \leq 1$, $\mu_i \neq 0$, $\mu_i \neq 1$ *para todos* i , *e os elementos de* A *dispostos em ordem crescente, então*

$$
FEV[Y] = mediana \ de \ A
$$

onde $\mu_i = \mu\{Y_i \geq T\}$.

Observamos que este teorema mostra que para um conjunto finito de dados, o FEV não é afetado pelos valores extremos o mesmo não acontecendo com a média aritmética clássica.

Teorema 3 ([1], [7]) *Seja* $(X, \mathcal{P}(X), m)$ *um espaço de probabilidades*

e $F : X \to [0,1]$ *,então*

$$|\int F(\cdot)dm - FEV[F]| \leq \frac{1}{4}$$

Proposição 4 - *Seja* $G : [a,b] \to [c,d]$ *,com* $[a,b] \cap [c,d] \neq \phi$*, uma função decrescente e tal que* $G(\alpha^*) = \alpha^*$ *para algum* $\alpha^* \in [a,b]$*. Então,*

$$\sup_{a \leq \alpha \leq b} [inf(\alpha, G(\alpha))] = \alpha^*$$

Vamos agora calcular o valor esperado fuzzy $FEV\left(\frac{n(t)}{n(0)}\right) = FEV(Y)$ onde

$$Y(r) = e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 f_2(r)]t} = \begin{cases} e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 f_p(r)]t} & \text{se } r < r_0 \\ e^{-\lambda_1 t} & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

Consideramos $H(\alpha) = m\{r : Y \geq \alpha\}$, então

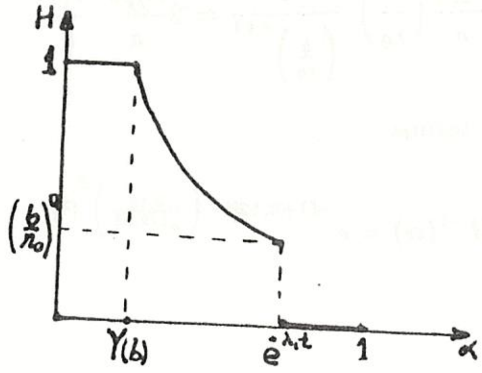
$$H(\alpha) = m\{r : e^{-\lambda_2 f_p(r)t} \geq \alpha\, e^{\lambda_1 t}\}$$

Assim, $H(\alpha) = 0$ se $\alpha > e^{-\lambda_1 t}$.
Por outro lado, se $\alpha \leq e^{-\lambda_1 t}$,

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= m\{r : \alpha \leq Y < e^{-\lambda_1 t}\} + m\{r : Y = e^{-\lambda_1 t}\} \\ &= m\{r : \alpha \leq Y < e^{-\lambda_1 t}\} + m\{r : r \geq r_0\} \\ &= m\{r : r_0\sqrt{1 - \left[-\left(\frac{ln\alpha}{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{1/p}} \leq r < r_0\} + m\{r : r \geq r_0\} \\ &= m\{r : r \geq r_0\sqrt{1 - \left[-\left(\frac{ln\alpha}{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{1/p}}\} = m\{r : r \geq \gamma\} = \\ &= \begin{cases} 1 - ab^a \int_b^\gamma r^{-a-1}\, dr = \left(\frac{b}{\gamma}\right)^a & \text{se } Y(b) \leq \alpha \leq e^{-\lambda_1 t} \\ 1 & \text{se } \alpha < Y(b) \end{cases} \end{aligned}$$

Em resumo

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha \leq e^{-(\lambda_1+\lambda_2 f_p(b))t} \\ \left[\dfrac{b}{r_0\sqrt{1-\left(-\left(\frac{\ln\alpha}{\lambda_2 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right)^{1/p}}}\right]^a & \text{se} \quad e^{-(\lambda_1+\lambda_2 f_p(b))t} < \alpha \leq e^{-\lambda_1 t} \\ 0 & \text{se} \quad \alpha > e^{-\lambda_1 t} \end{cases}$$



É facil ver que $H(\alpha)$ é continua em $[0,1]$ com excessão de quando $\alpha = e^{-\lambda_1 t}$, e que $FEV(Y)$ está compreendido entre $e^{-(\lambda_1+\lambda_2 f_p(b))t}$ e $e^{-\lambda_1 t}$.
Por exemplo, se $\left(\frac{b}{r_0}\right)^a \geq e^{-\lambda_1 t}$ então $FEV(Y) = e^{-\lambda_1 t} = FEV(e^{-\lambda_1 t})$

É o caso onde a esperança de vida independe da interferência da renda. Isto acontece quando $b \geq r_0$ porém pode-se ter b pequeno e um grande achatamento a e ainda assim o grupo independer da renda, desde que r_0 seja pequeno.

Se $\left(\frac{b}{r_0}\right)^a < e^{-\lambda_1 t}$ então $e^{-(\lambda_1+\lambda_2 f_p(b))t} \leq FEV(Y) \leq e^{-\lambda_1 t}$.

De qualquer maneira teremos sempre que

$$\lim_{t\to\infty} \mid \langle \frac{n(t)}{n(0)} \rangle - FEV(Y) \mid = 0 \quad ,$$

,ou seja, $\langle \frac{n(t)}{n(0)} \rangle \cong FEV(Y)$ para t suficientemente grande.
Em nosso exemplo tomamos $a = 2,03$; $b = 1,72$; $r_0 = 4$; $\lambda_2 = 0,12$; $p = 2$ e $\lambda_1 = 1$, vamos então calcular o valor de $FEV(Y)$ para $t = 1$, determinando o ponto fixo de $H(\alpha)$ (cf. Proposição 4), uma vez que H é decrescente e contínua para $\alpha < e^{-\lambda_1 t}$.

Observamos que H e H^{-1} têm os mesmos pontos fixos e $H^{-1}(\alpha) = e^{-[\lambda_1+\lambda_2 f_p\left(\frac{b}{\alpha^{1/a}}\right)]t}$;

Temos também que, no nosso exemplo:

$$H^{-1} : \left[\left(\frac{b}{r_0}\right)^a, 1\right] \Longrightarrow \left[e^{-[\lambda_1+\lambda_2 f_p(b)]t}, e^{-\lambda_1 t}\right] \subset \left[\left(\frac{b}{r_0}\right)^a, 1\right] \quad ,$$

sendo $H^{-1}(\alpha)$ uma contração, pois

$$\begin{aligned} \left| \frac{dH^{-1}}{d\alpha} \right| &= \frac{2\lambda_2 pt}{a}\left(\frac{b}{r_o}\right)^a \frac{1}{\alpha^{1/a+1}} f_{p-1}\left(\frac{b}{\alpha^{1/a}}\right) e^{-[\lambda_1+\lambda_2 f_p\left(\frac{b}{\alpha^{1/a}}\right)]t} \\ &\leq 2\frac{\lambda_2 pt}{a}\left(\frac{b}{r_0}\right)^a \frac{1}{\left(\frac{b}{r_0}\right)^{a+1}} = 2\frac{\lambda_2 pt}{a}\ \frac{r_0}{b} \end{aligned}$$

Com os valores considerados, temos :

$$H^{-1}(\alpha) = e^{-(1+0,12[1-\left(\frac{0,43}{\alpha^{1/2,03}}\right)^2]^2)}$$

e então $\left| \frac{dH^{-1}}{d\alpha} \right| \leq 0,550 < 1$.

Agora, usando o teorema do ponto fixo de Banach, podemos determinar α^* de modo que $\alpha^* = H^{-1}(\alpha^*)$. Iniciamos com um valor α_0 satisfazendo $\left(\frac{b}{r_0}\right)^a < \alpha_0 < 1$ e obtemos $\alpha^* = 0,3574113$.
Portanto $FEV(Y) = 0,3574113 \cong 0,972\ e^{-\lambda_1}$

Observamos que o valor de $< \frac{n(t)}{n(0)} >$ para $t = 1$ é $0,936\ e^{-\lambda_1}$ e quando t cresce a diferença entre a esperança estocástica e a fuzzy diminuem.

Ainda, como exemplificação, vamos comparar estas medidas, considerando uma amostra (conjunto finito A).

Vamos supor que os elementos do conjunto A, com $n(0) = 150 = \#A$, estejam divididos em sub grupos classificados pelos distintos valores de r, e que r obedeça à distribuição assumida inicialmente:

$$n_1 = 100 \text{ está associado com } r_1 = 2.0 \rightarrow Y_1 = e^{-0,0370t}.e^{-\lambda_1 t}$$

$$n_2 = 40 \text{ está associado com } r_2 = 2.5 \rightarrow Y_2 = e^{-0,0112t}.e^{-\lambda_1 t}$$

$$n_3 = 10 \text{ está associado com } r_3 = 4.0 \rightarrow Y_3 = 1.e^{-\lambda_1 t}$$

Aqui podemos considerar $\mu\{n|Y \geq \alpha\} = m\{n|Y \geq \alpha\} = \dfrac{\#\{n|Y \geq \alpha\}}{\#A}$ onde $Y(n_i) = e^{-\lambda_2 t f(I(n_i))}$, $I(n_i) = r_i$ e r_i é o valor de r associado com o grupo n_i .

$$\text{Se} \quad Y_1 < \alpha \leq Y_2 \text{ então } \mu\{Y \geq \alpha\} = \frac{n_2 + n_3}{\#A} = \frac{50}{150} = 0,333$$

$$\text{Se} \quad Y_2 < \alpha \leq Y_3 \quad , \mu\{Y \geq \alpha\} = \frac{n_3}{\#A} = \frac{10}{150} = 0,0667$$

Assim, $FEV[e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 f_2(r)]t}] = FEV[Y] = \text{mediana de } A$

$$= \text{mediana}\{0,0677; 0,333; e^{-0,0370t}e^{-\lambda_1 t}; e^{-0,0112t}e^{-\lambda_1 t}; e^{-\lambda_1 t}\}$$

Para $t = 1$, temos $FEV(Y) = 0,964 \ e^{-\lambda_1}$
Enquanto que se tomarmos a média clássica para esta mesma amostra obtemos

$$\left\langle \frac{n(1)}{n(0)} \right\rangle = \frac{100 \ Y_1 + 40 \ Y_2 + 10 \ Y_3}{150} = \frac{\lambda_1}{150}(100 \ e^{-0,037} + 40 \ e^{-0,0112} + 10) =$$
$$\cong 0,973 \ e^{-\lambda_1}$$

Pelo que observamos neste modelo simples temos agora um outro instrumento de avaliação da esperança, que pode ser adaptado no estudo de sistemas biológicos, onde os parâmetros envolvidos são fortemente subjetivos. Este é um campo ainda aberto para a pesquisa.

4. *Bibliografia*

[1] Barros, L. C - " Modelagem Matemática com parâmetro subjetivos"
Dissertação de Mestrado - IMECC - UNICAMP - 1991

[2] Bassanezi, R. C - " Medidas e Integrais Fuzzy"
Relatório Técnico 06/87 , IMECC - UNICAMP

[3] Bussab, W - Moretin, P - Estatística Básica (Métodos Quantitativos)
Edit. Atual 1985

[4] Fava, V. L - Urbanização e pobreza no Brasil
Tese de doutorado - FEA - USP - 1983

[5] Kandel, A - Fuzzy Mathematical Tech. with applications
Addison Wesley Pu. Co. 1986

[6] Lin, C - Segel, A - Mathematical Application to Deterministic problems in the Natural Sciences
New York: MacMillan 1974

[7] Ralescu, D. A - " Toward a General Theory of Fuzzy Variables"
J. Math. Anal. Appl. Vol. 86, Nº 1, 1982