# Comparação entre Esperança Fuzzy e Estocástica

Helder Parra Palaro e Laécio Carvalho de Barros
IMECC - UNICAMP

# Comparação entre Esperança Fuzzy e Estocástica

Helder Parra Palaro e Laécio Carvalho de Barros
IMECC - UNICAMP

## 1) Resumo

Neste trabalho estudaremos algumas propriedades de uma nova medida central de uma distribuição. Especificamente da medida central chamada de valor esperado fuzzy (FEV) de um conjunto fuzzy. Nosso principal resultado é que para um conjunto fuzzy que também é uma variável aleatória X com função densidade simétrica, temos FEV(X) = E(X).

## 2) Introdução

Os conjuntos e medidas fuzzy são utilizados com o intuito de tratar matematicamente questões subjetivas .

Um subconjunto fuzzy A do conjunto universo $\Omega$ é identificado por uma *função de pertinência* $a : \Omega \rightarrow [0,1]$, onde $a(\omega)$ indica o grau de pertinência do elemento $\omega$ ao subconjunto fuzzy $A$. O subconjunto clássico é um caso particular do subconjunto fuzzy, onde $a : \Omega \rightarrow \{0,1\}$ é a função característica do subconjunto $A$. Neste texto, tanto a função grau de pertinência quanto o próprio conjunto fuzzy serão denotados pela mesma letra. Desta forma, $A(\omega)$ indica o grau de pertinência do elemento $\omega$ ao subconjunto fuzzy $A$.

Seja $\Omega$ o nosso conjunto de interesse. Seja $\Im$ uma família monótona de subconjuntos, que satisfaz :

- $\emptyset, \Omega \in \Im$
- Se $F_n \in \Im$ e $\{F_n\}$ é monótona, então $\lim\limits_{n\to\infty} F_n \in \Im$.

  $\{F_n\}$ monótona significa que ($F_1 \subset F_2 \subset \ldots F_n \subset \ldots$ ) ou ($F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ )

Definimos então uma Medida Fuzzy como uma função $g : \Im \rightarrow [0,1]$ que satisfaz :

- $g(\emptyset) = 0$ e $g(\Omega) = 1$
- Se A e B $\in \Im$ e $A \subset B$, então $g(A) \leq g(B)$ (função g é monótona)
- Se $F_n \in \Im$ e $\{F_n\}$ é monótona, então $\lim\limits_{n\to\infty} g(F_n) = g\left(\lim\limits_{n\to\infty} F_n\right)$ (continuidade)

Chamamos ($\Omega$, $\Im$) de espaço mensurável e ($\Omega$, $\Im$, g) de espaço de medidas fuzzy.

A medida de probabilidade clássica P é uma particular medida fuzzy.

A partir do conceito de medida fuzzy, podemos definir uma medida central chamada de Esperança Fuzzy, análoga a esperança estocástica para a medida de probabilidades.

A Esperança Fuzzy de uma variável fuzzy $X : \Omega \rightarrow [0,1]$ em relação a uma medida fuzzy $g : \Im \rightarrow [0,1]$ é definida como :

$$⨍ X.g = \sup_{\alpha\in[0,1]} [\inf(\alpha, g(\{\omega : X(\omega) \geq \alpha\}))], \quad \omega \in \Omega$$

Sugeno (1974) compara as esperanças fuzzy e estocástica pelo seguinte teorema (3.11) :

*Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidades e $X : \Omega \to [0,1]$ uma função mensurável. Então*

$$\left| \int X(\omega)dP - \oint X . P \right| \leq \frac{1}{4}$$

## 3) Estudo da Esperança Fuzzy para a distribuição Beta

Uma distribuição que particularmente nos interessou foi a distribuição Beta, pois podemos estudar o efeito de assimetria na diferença entre esperanças estocásticas e fuzzy simplesmente alterando seus parâmetros.

Dizemos que a variável aleatória $X : \Omega \to [0,1]$, tem distribuição Beta ($X \sim \beta(a,b)$) se sua função densidade é dada por : $f(x) = \dfrac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \qquad x \in [0,1]$.

A esperança estocástica da variável X é dada por a/(a+b).

Por métodos numéricos calculamos a esperança fuzzy para diversos parâmetros da distribuição Beta. Assim obtemos a seguinte tabela :

| a | b | \|a-b\| | Esperança Clássica | Esperança Fuzzy | \| Diferença \| |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0,5000 | 0,5000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 1 | 0,3333 | 0,3820 | 0,0486 |
| 1 | 3 | 2 | 0,2500 | 0,3177 | 0,0677 |
| 1 | 4 | 3 | 0,2000 | 0,2755 | 0,0755 |
| 2 | 1 | 1 | 0,6667 | 0,6180 | 0,0486 |
| 2 | 2 | 0 | 0,5000 | 0,5000 | 0,0000 |
| 2 | 3 | 1 | 0,4000 | 0,4278 | 0,0278 |
| 2 | 4 | 2 | 0,3333 | 0,3773 | 0,0440 |
| 3 | 1 | 2 | 0,7500 | 0,6823 | 0,0677 |
| 3 | 2 | 1 | 0,6000 | 0,5722 | 0,0278 |
| 3 | 3 | 0 | 0,5000 | 0,5000 | 0,0000 |
| 3 | 4 | 1 | 0,4286 | 0,4472 | 0,0186 |
| 4 | 1 | 3 | 0,8000 | 0,7245 | 0,0755 |
| 4 | 2 | 2 | 0,6667 | 0,6227 | 0,0440 |
| 4 | 3 | 1 | 0,5714 | 0,5528 | 0,0186 |
| 4 | 4 | 0 | 0,5000 | 0,5000 | 0,0000 |

Notamos que para todos os valores dos parâmetros a diferença foi bem inferior do que 0,25 (que é o limitante dado pelo teorema do Sugeno). Além disso, para parâmetros da distribuição Beta em que a = b, notamos que as esperanças fuzzy e estocásticas coincidem. Observando a curva da função densidade da distribuição Beta chegamos a conclusão que a mesma é simétrica quando a = b. Então começamos a suspeitar que existe relação entre simetria da função densidade da distribuição e a diferença entre as esperanças estocásticas e fuzzy.

## 4) Desenvolvimento de um novo resultado sobre esperança fuzzy

Com os resultado obtidos sobre a distribuição Beta, tentamos generalizar a hipótese de que a densidade de uma variável aleatória ser simétrica implica a igual entre suas esperanças estocásticas e fuzzy.

Seja X uma variável aleatória contínua que também é um conjunto fuzzy, isto é $X : \Omega \to [0,1]$. Do fato de $X : \Omega \to [0,1]$, temos que sua função densidade $f : [0,1] \to [0,1]$, parte do contradomínio de X que é $[0,1]$.

Denotando a esperança fuzzy de X por FEV(X) , temos que :

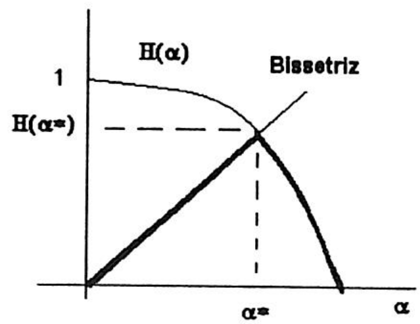
$$FEV(X) = \sup_{\alpha\in[0,1]} [\inf(\alpha, P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq \alpha\})], \quad \text{onde } \int_A f(x)dx$$

Assim, $P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq \alpha\} = H(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)dx$

Logo temos que :

$$FEV(X) = \sup_{\alpha\in[0,1]} [\inf(\alpha, H(\alpha))]$$

Aqui ilustramos o valor de FEV (gráfico α x H(α)):




Os valores realçados mostram inf[α, H(α)], para $\alpha \in [0,1]$. O valor sup(inf[α, H(α)]) é obtido no ponto α* em que a bissetriz se encontra com a curva H(α). Neste ponto $\alpha^* = H(\alpha^*)$, ou seja α* é um ponto fixo de H(α) e FEV(X) = α*.

<u>Se a função f for simétrica</u>, temos que $f(x) = f(1-x)$, para $x \in [0,1]$.

Logo $\int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} f(1-x)dx = \int_1^{1/2} -f(x)dx = \int_{1/2}^1 f(x)dx$

Mas sabemos que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^1 f(x)dx = 1$

Destas duas igualdades temos que : $\int_0^{1/2} f(x)dx = \int_{1/2}^1 f(x)dx = 1/2$

Mas $\int_{1/2}^1 f(x)dx = H(1/2) = 1/2$. Então α*= ½ é ponto fixo de H, logo FEV(X) = ½.

Os resultados acima podem ser resumidos no teorema :

Se a variável aleatória contínua X é tal que $X : \Omega \rightarrow [0,1]$ e tem função densidade f simétrica, então E(X) = FEV(X).

Sabemos também que no caso estocástico Esperança = Mediana = ½ quando a função densidade da variável aleatória é simétrica. Deste modo, as duas esperanças coincidem se houver simetria da densidade da variável aleatória. O caso da distribuição Beta com os parâmetros iguais é um caso particular deste resultado. Este resultado que obtivemos ($|E(X) - FEV(X)|=0$ para X com função densidade simétrica) é um caso particular do teorema (3.11) de Sugeno (1974), pelo qual sabemos que $|E(X) - FEV(X)| \leq 1/4$.

## 5) Comentários finais

Nosso principal interesse tem sido no sentido de minorar o valor de $|E(X) - FEV(X)|$, para as diversas variáveis aleatórias clássicas. Acreditamos que, de maneira geral, o FEV(X) é mais fácil de se obter que E(X), dada a pouca exigência feita na definição de FEV(X) quando comparado com E(X). Quando X é uma variável aleatória contínua, por exemplo, precisamos da noção de integral para definirmos E(X).

## 6) Bibliografia

[01] Sugeno, Michio (1974) – Theory of Fuzzy Integrals and it's aplications