

**Solução Numérica para um problema fuzzy de Cauchy
que modela o decaimento radioativo**

DINIZ, G. L.
DM-ICET-UFMT/UNICAMP
dinizgl@densis.fee.unicamp.br

BARROS, L. C.
DMA-IMECC-UNICAMP
laeciocb@ime.unicamp.br

MEYER, J. F. C. A.
DMA-IMECC-UNICAMP
joni@ime.unicamp.br

Solução Numérica para um problema fuzzy de Cauchy que modela o decaimento radioativo

DINIZ, G. L.
DM-ICET-UFMT/UNICAMP
dinizgl@densis.fee.unicamp.br

BARROS, L. C.
DMA-IMECC-UNICAMP
laeciocb@ime.unicamp.br

MEYER, J. F. C. A.
DMA-IMECC-UNICAMP
joni@ime.unicamp.br

1 – Introdução:

O uso de materiais radioativos no último século trouxe sérios riscos para o meio ambiente, principalmente, com relação aos depósitos de lixo radioativo. Neste artigo, propomos um modelo fuzzy para descrever o fenômeno de decaimento radioativo, usando equações diferenciais fuzzy, cuja solução analítica clássica é bem conhecida.

Chang e Zadeh (1972) foram os primeiros a introduzir o conceito de derivadas fuzzy (Ma, Friedman e Kandel, 1999), mais tarde, Dubois e Prade (1982) usaram o princípio de extensão e suas aproximações. A seguir, Puri e Ralescu (1983) discutiram outros métodos e propuseram duas definições, uma baseada na H-diferenciabilidade e limitada ao cone convexo e outra para espaços de Banach (Ma, Friedman e Kandel, 1999).

Kandel e Byatt (1978, 1980) aplicaram o conceito de equações diferenciais fuzzy para problemas dinâmicos fuzzy, mas foram Kaleva (1987, 1990), Seikkala (1987), Ouyang e Wu (1989) e Nieto (1999), quem deram um tratamento rigoroso ao problema de valor inicial fuzzy (problema fuzzy de Cauchy).

Wu, Song e Lee (1996) obtiveram um teorema de existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy para as equações diferenciais fuzzy: $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ para aplicações fuzzy de variável real, cujos valores são conjuntos normais, convexos, semicontínuos superiormente e conjuntos de suporte compacto em \mathfrak{R}^n , com a função f satisfazendo a condição generalizada de Lipchitz.

A solução analítica fuzzy do problema de Cauchy para equação diferencial fuzzy de modelos que descrevem a dinâmica populacional foi apresentada em Barros, Bassanezzi e Tonelli (2000).

A resolução de equações diferenciais fuzzy, via aproximação numérica, é bem mais recente e uma das poucas referências é Ma, Friedman e Kandel (1999), onde é apresentado um algoritmo numérico para resolver uma equação diferencial ordinária fuzzy, com um esquema baseado no clássico método de Euler, seguido de uma análise de erro e ilustrado com alguns problemas de Cauchy (linear e não-linear).

Neste artigo, usamos o método de Euler para obter uma solução aproximada de um problema de valor inicial de uma equação diferencial ordinária linear fuzzy, que modela o decaimento radioativo. Os resultados numéricos fuzzy obtidos são comparados com a solução numérica fuzzy apresentada em Barros *et al* (2000) para uma equação diferencial fuzzy similar.

2 – Objetivos:

- Obter soluções numéricas, via método de Euler, para um problema fuzzy de Cauchy;
- Análise de erros;
- Comparação dos resultados obtidos com a solução analítica fuzzy

3 – Descrição do problema e seu modelo matemático:

O número de desintegrações por unidade de tempo mede a atividade radioativa de uma substância. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os primeiros experimentos que resultaram em tal compreensão foram realizados por Rutheford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século passado e início deste, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.

O uso desse tipo de material deixa o público em geral em estado de alerta, e os benefícios que o uso tais materiais pode trazer, somente podem ser avaliados se o seus perigos são dimensionados, o primeiro passo desse processo seria, talvez, o conhecimento das origens desses materiais.

A formulação matemática (Bassanezi e Ferreira, 1988) que modela o processo de decaimento radioativo, pode ser descrita da seguinte forma:

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

onde $N = N(t)$ é o número de átomos radioativos presentes na amostra no instante t e $\lambda > 0$ é a constante de desintegração radioativa, que pode ser obtida experimentalmente.

O sinal negativo na equação (1) é porque o número de átomos radioativos diminui com o passar do tempo, com isso a taxa de variação instantânea dN/dt deve ser negativa. A constante de desintegração λ , característica de cada elemento radioativo, permite dizer se este elemento tem vida curta ou longa.

A solução analítica da equação (1) é dada por:

$$(2) \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

sendo $N_0 = N(0)$ a quantidade inicial destes átomos.

Levando em conta que $N = \frac{N_A}{A} m$, onde A é o número de massa do elemento radioativo e N_A é o número de Avogadro, que vale $6,02 \times 10^{23} \text{ mols}^{-1}$, daí a razão N_A/A é constante para cada elemento.

Assim, em termos da massa do material radioativo, a lei de atividade pode ser expressa por:

$$(3) \quad m(t) = m_0 e^{-\lambda t} \quad \text{onde} \quad m_0 = m(0)$$

Este é o tratamento clássico para o problema, no entanto, apesar da simplicidade da equação a dificuldade maior está na contagem, para a obtenção dos parâmetros identificados no modelo. Os dados coletados, bem como o método adotado, quase sempre estão carregados de imprecisão e

elementos de incerteza causados tanto pelo próprio processo de medição, como por algum tipo de subjetividade na adoção do método.

Desta forma, com o intuito de dar um tratamento matemático a estas questões, o uso de sistemas fuzzy pode ser visto como uma ferramenta indispensável para a análise e compreensão do fenômeno em estudo. Para isto, adotaremos o processo "fuzzyness" como em Kaleva (1987, 1990) e Barros (1997).

Para uma primeira aproximação, considerando a condição inicial como um conjunto fuzzy, adotaremos a seguinte equação diferencial ordinária fuzzy:

$$(4) \quad u'(t) = -\lambda u(t), \quad u(0) = u_0$$

onde u' é a derivada de Hukuhara (ver Puri e Ralescu, 1983), $u: \mathfrak{R}_+ \rightarrow E^1$, e $t, \lambda \in \mathfrak{R}_+$

sendo $E^1 = \{u \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}) \mid u \text{ é fuzzy convexo, isto é, } u(\delta x + (1-\delta)y) \geq \min(u(x), u(y)), \forall \delta \in [0, 1]\}$

e $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \{u: \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1] \mid [u]^\alpha \text{ é compacto e não vazio } \forall \alpha \in (0, 1), \text{ ou seja, } [u]^\alpha = [\tilde{u}]^\alpha, [\hat{u}]^\alpha \in \mathfrak{R}_+\}$

A existência e unicidade da solução de (4), para T intervalo fechado de \mathfrak{R}_+ , é apresentada em Nieto (1999), Barros (1997), Kaleva (1987).

O tratamento numérico para o problema será, então, obter aproximações para o problema fuzzy de Cauchy: $u'(t) = -\lambda u(t)$, $u(0) = u_0$, cuja forma paramétrica é dada por:

$$(5) \quad \begin{cases} [\tilde{u}'(t)]^\alpha = -\lambda [\tilde{u}(t)]^\alpha, & [\tilde{u}(0)]^\alpha = [\tilde{u}_0]^\alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ [\hat{u}'(t)]^\alpha = -\lambda [\hat{u}(t)]^\alpha, & [\hat{u}(0)]^\alpha = [\hat{u}_0]^\alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

sendo que, $([\tilde{u}]^\alpha; [\hat{u}]^\alpha)$ devem satisfazer as seguintes condições:

- i. $[\tilde{u}]^\alpha$ é uma função contínua não-decrescente limitada à esquerda, em $[0, 1]$;
- ii. $[\hat{u}]^\alpha$ é uma função contínua não-crescente limitada à direita, em $[0, 1]$;
- iii. $[\tilde{u}]^\alpha \leq [\hat{u}]^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

4 – Método Numérico:

Para a obtenção das aproximações numéricas das soluções de cada equação dada no sistema (5), faremos uma discretização do intervalo $[0, T]$, para um T prefixado, através de um conjunto $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$, com α fixo, em seguida, construímos o esquema numérico para as aproximações seguindo o método de Euler, que se baseia nas aproximações de primeira ordem para $([\tilde{u}'(t)]^\alpha; [\hat{u}'(t)]^\alpha)$ dadas por:

$$(6) \quad [z'(t)]^\alpha \approx \frac{[z(t+h)]^\alpha - [z(t)]^\alpha}{h}$$

onde, $[z(t)]^\alpha$ é calculada, para $[\tilde{u}]^\alpha$ e $[\hat{u}]^\alpha$

daí, chamando $z_i = z(t_i)$, com $t_i = t_0 + i h$ para $1 \leq i \leq n$,

e, $h = (T - t_0)/n$,

usando (6) em (5), teremos:

$$(7) \quad \begin{cases} [\tilde{u}_{i+1}]^\alpha = [\tilde{u}_i]^\alpha - h\lambda[\tilde{u}_i]^\alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ [\tilde{u}_{i+1}]^\alpha = [\tilde{u}_i]^\alpha - h\lambda[\tilde{u}_i]^\alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Os códigos numéricos para as aproximações foram desenvolvidos no MATLAB, cujos resultados estão apresentados através de gráficos para melhor visualização. Nas figuras, apresentamos a solução numérica fuzzy e a solução analítica fuzzy cuja equação (apresentada em Barros *et al*, 2000) é dada por:

$$(8) \quad \begin{cases} [\tilde{u}]^\alpha(t) = \frac{[\tilde{u}_0]^\alpha - [\tilde{u}_0]^\alpha}{2} e^{-\lambda t} + \frac{[\tilde{u}_0]^\alpha + [\tilde{u}_0]^\alpha}{2} e^{\lambda t} \\ [\tilde{u}]^\alpha(t) = \frac{[\tilde{u}_0]^\alpha - [\tilde{u}_0]^\alpha}{2} e^{-\lambda t} + \frac{[\tilde{u}_0]^\alpha + [\tilde{u}_0]^\alpha}{2} e^{\lambda t} \end{cases}$$

5 – Resultados:

Para as simulações onde aplicamos o modelo, consideramos como condição inicial, para todos os materiais radioativos, uma massa “em torno de 100 g”, descrita pelo seguinte conjunto fuzzy:

$$(9) \quad u_o(x) = \begin{cases} \frac{x-90}{10}, & \text{se } 90 \leq x < 100 \\ \frac{110-x}{10}, & \text{se } 100 \leq x \leq 110 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

O gráfico da fig. 1, a seguir, esboça o conjunto fuzzy dado pela equação (9), onde os pontos marcados, representam os α -níveis utilizados para iniciar as aproximações pelo método de Euler.

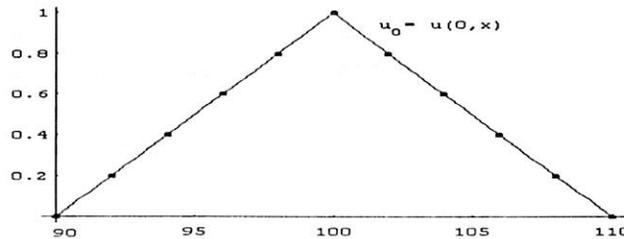


Fig. 1 – Condição inicial dada pela equação (9)

Para a constante de desintegração λ , característica de cada elemento radioativo, utilizamos os valores apresentados em Bassanezi e Ferreira (1983), para os seguintes elementos:

Rádio (Ra^{226}): $\lambda = 0.440 \times 10^{-3} \text{ ano}^{-1}$ e Chumbo (Pb^{210}): $\lambda = 0.315 \times 10^{-1} \text{ ano}^{-1}$.

O intervalo de tempo considerado foi $[0, 1]$ ano, com 100 iterações, ou seja, $h = 0,01$ para o chumbo (Pb^{210}). Enquanto, para o rádio (Ra^{226}) usamos o intervalo $[0, 100]$ anos, com 100 iterações, ou seja, $h = 1,0$.

A seguir, apresentamos os gráficos das soluções analíticas e numéricas para os elementos Pb^{210} e Ra^{226} nas figuras 2 e 3, respectivamente.

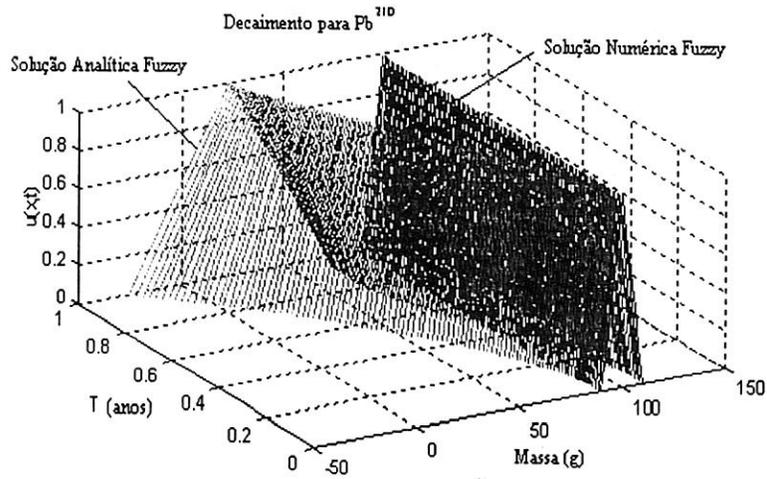


Fig. 2: Gráfico do decaimento de Pb^{210} , com u_0 dado por (9), $\lambda = 0,315 \times 10^{-1} \text{ ano}^{-1}$ e $h = 0,01$

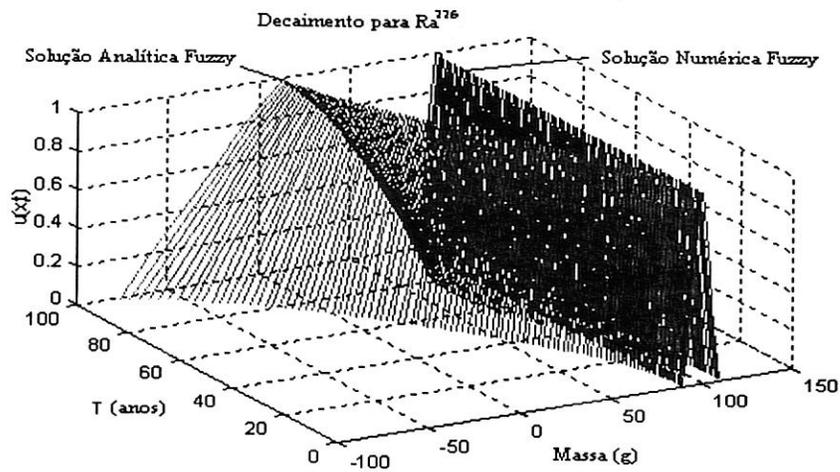


Fig. 3: Gráfico do decaimento de Ra^{226} , com u_0 dado por (9), $\lambda = 0,440 \times 10^{-3} \text{ ano}^{-1}$ e $h = 1$

Para um número menor de iterações obtivemos resultados mais satisfatórios, no sentido de melhor aproximação entre a solução analítica e a numérica. Na figura 4, a seguir, utilizamos 40 iterações e $h = 0,005$ para Pb^{210} .

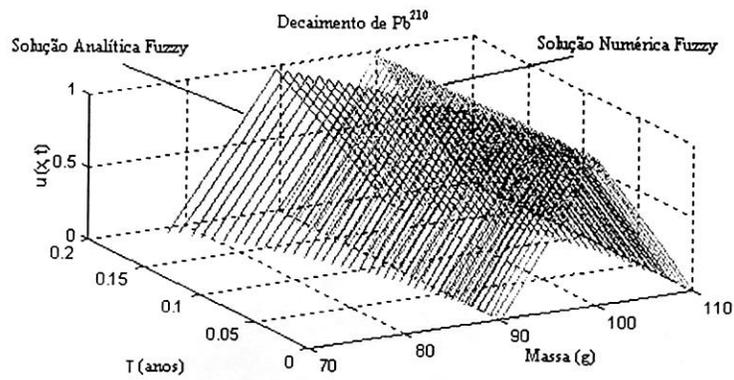


Fig. 4: Gráfico para decaimento de Pb^{210} , com u_0 dado por (9), $\lambda = 0,315 \times 10^{-1} \text{ ano}^{-1}$ e $h = 0,005$

Da mesma forma, também testamos para Ra^{226} , com um número menor de iterações, neste caso para 50 iterações, $h = 0,1$ cujos resultados são apresentados na figura 5 abaixo.

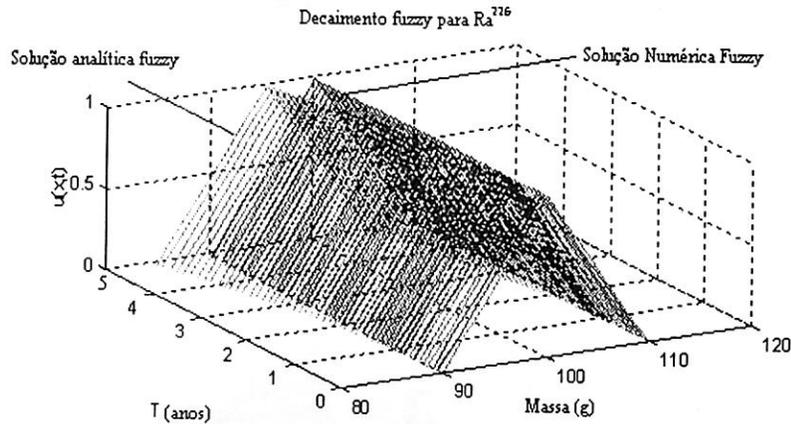


Fig. 5: Gráfico para decaimento de Ra^{226} , com u_0 dado por (9), $\lambda = 0,440 \times 10^{-3} \text{ ano}^{-1}$ e $h = 0,1$

6 – Conclusões:

Os resultados numéricos obtidos não foram satisfatórios para o modelo utilizado no fenômeno em estudo. Para poucas iterações (n pequeno) o método produziu aproximações mais satisfatórias entre a solução numérica fuzzy e a solução analítica fuzzy. A precisão do método de Euler é da ordem de h , para cada iteração, assim ele não se apresenta como um método confiável de aproximação da solução para escalas de tempo grande, como no caso do decaimento radioativo.

Nos exemplos tratados por Ma, Friedman e Kandel (1999), eles não consideraram a equação dada por (4). Neste caso, o comprimento dos intervalos em cada α -nível foi decrescente ao longo do tempo para a solução numérica, o que contradiz à solução analítica fuzzy cujos intervalos para cada α -nível é crescente com o tempo.

Para o α -nível 1 ($\alpha = 1$), houve maior similaridade entre o resultado numérico fuzzy e a solução analítica fuzzy, neste caso a solução fuzzy coincide com a solução determinística, apresentada no tratamento clássico do problema, dado pela equação (3).

Em futuros trabalhos, poderia-se adotar métodos de melhor aproximação, como por exemplo Runge-Kutta de 4ª ordem. Além disso, seria interessante considerar o parâmetro λ como um conjunto fuzzy (tipo triangular) de modo a melhorar o modelo, uma vez que o valor de λ também apresenta alguma incerteza.

7 – Referências:

- BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. e TONELLI, P. A. (1997): Remarks on Deterministic Orbits in Fuzzy Dynamical Systems, *Proc. Seventh IFSA World Congr.*, Prague, Vol. II, 22-26;
- BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. e TONELLI, P. A. (2000): Fuzzy modelling in population dynamics, *Ecological Modelling*, **128**, 27-33;
- BASSANEZI, R. C. e FERREIRA Jr., W. C. (1988): Equações diferenciais com aplicações, Ed. Harbra, São Paulo/Brazil, 572p;
- CHANG, S. L. and ZADEH, L. A. (1972): On fuzzy mapping and Control, *IEEE Trans. Systems Man Cybernetic* **2**, 30-34;
- DUBOIS, D. and PRADE, H. (1982): Towards fuzzy differential calculus: Part 3, differentiation, *Fuzzy Sets and System*, **8**, 225-233;
- KALEVA, O. (1987): Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **24**, 301-317;
- KALEVA, O. (1990): The Cauchy problem for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **35**, 389-396;
- KALEVA, O. (1998): The Peano theorem for fuzzy differential equations revisited, *Fuzzy Sets and Systems*, **98**, 147-148;
- KANDEL, A. and BYATT, W. J. (1978): Fuzzy differential equations, *Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society*, Tokyo, November, 1213-1216;
- KANDEL, A. and BYATT, W. J. (1980): Fuzzy process, *Fuzzy Sets and Systems*, **4**, 117-152;
- MA, M., FRIEDMAN, M. and KANDEL, A. (1999): Numerical solutions of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **105**, 133-138;
- NIETO, J. J. (1999): The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **102**, 259-262;
- PURI, M. L. and RALESCU, D. A. (1983): Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **91**, 552-558;
- OUYANG, H. and WU, Y. (1989): On fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **32**, 321-325;
- SEIKKALA, S. (1987): On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems*, **24**, 319-330;
- WU, C., SONG, S. and LEE, E. S. (1996): Approximate Solutions, Existence and Uniqueness of the Cauchy Problem of Fuzzy Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **202**, 629-644.