

**Dinâmica populacional interespecífica de tipo logístico, com dispersão espacialmente dependente: uma revisão de clássicos modelos evolutivos de Lotka-Volterra**

Meyer, João Frederico C. A., *Depto. de Matemática Aplicada, IMECC – UNICAMP*

Pregolato, Sílvio de A., *Depto. de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP*

**Dinâmica populacional interespecífica de tipo logístico, com dispersão espacialmente dependente: uma revisão de clássicos modelos evolutivos de Lotka-Volterra**

Meyer, João Frederico C. A., *Depto. de Matemática Aplicada, IMECC – UNICAMP*

Pregolato, Sílvia de A., *Depto. de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP*

Num passado relativamente próximo, havia modelos para mais de uma espécie, em que o tempo era a única variável independente: eram os sistemas clássicos de tipo Lotka-Volterra em que se modelavam ações interespecíficas. Por outro lado, se consideravam para uma espécie, modelos que levavam em conta variabilidades espaciais além da temporal, recorrendo entre outras, a Equações a Derivadas Parciais de Difusão-advectação (no caso de difusão de populações, é bastante comum o uso do termo “dispersão”, e este texto irá aderir a tal uso). O que se pretende fazer aqui é contribuir para o uso crescente de modelos em que ambas as características sejam usadas na modelagem. De início, apresentamos um modelo genérico com duas espécies  $p=p(x,y;t)$  e  $q=q(x,y;t)$  com dinâmicas populacionais de tipo dependente da densidade e expostas a uma hostilidade do meio. Iremos supor ainda que interajam entre si, como competidoras (por exemplo) por recursos do meio. Incluiremos, portanto, no modelo:

- As hostilidades do meio para cada uma das espécies, dadas, respectivamente, por  $\sigma=\sigma(x,y;t)$  e  $v=v(x,y;t)$ ;
- As dinâmicas próprias de cada espécie, aí incluída a ação da outra:  $p.f(p,q)$  e  $q.g(p,q)$ ;
- As capacidades de suporte do meio para cada espécie, dadas, respectivamente por  $K$  e  $L$ .
- As difusibilidades de cada uma das espécies, dadas, respectivamente, por  $\alpha=\alpha(x,y;t)$  e  $\beta=\beta(x,y;t)$ ;
- Dois campos de velocidade que podem indicar, de modo primário, tendências migratórias ou quemotaxias, dadas por  $V$  e por  $W$ ;
- Os parâmetros da dinâmica populacional dita de Verhulst geralmente indicados no termo não-linear ao lado direito do sistema:  $\lambda$  e  $\mu$ , taxas intrínsecas de crescimento,  $c$  e  $d$  coeficientes de ação interespecífica.

Um primeiro passo, então, é o de definir um modelo genérico num espaço funcional conveniente  $H$  em que possa ser postulado o problema (obviamente junto com as condições inicial e de contorno):

Obter  $p(x,y,t)$  e  $q(x,y,t)$  em  $H$  – para  $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  e para  $t \in (0,T]$  - conhecidas as populações iniciais dadas por  $p(x,y,0) = p_0(x,y)$  e  $q(x,y,0) = q_0(x,y)$  tais que, além de condições de contorno apropriadas, se tenham para  $f$  e  $g$  numa forma Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \nabla p) + \operatorname{div}(V \cdot p) + \sigma \cdot p &= \lambda \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) - c \cdot p \cdot q = p \cdot f(p, q) \text{ e} \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta \nabla q) + \operatorname{div}(W \cdot q) + v \cdot q &= \mu \cdot q \cdot \left(1 - \frac{q}{L}\right) - d \cdot p \cdot q = q \cdot g(p, q) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Mencionar condições de contorno convenientes significa basicamente traduzir para a linguagem clássica de equações a derivadas parciais determinados comportamentos.

A necessidade de introduzir uma formulação variacional, destinada a problemas como aquele que aqui se apresenta, implica em exigir integrabilidade no sentido de Lebesgue. Então precisamos que, para todo  $t \in [0, T]$ , tenhamos  $p(x, y, \cdot), q(x, y, \cdot) \in H^1(\Omega)$ . Os primeiros termos de derivadas temporais de  $p$  e de  $q$  também irão exigir integrabilidade espacial e, portanto, deveremos ter:

$$p(x, y, t), q(x, y, t) \in H, \text{ onde, para} \\ L^2((0, T], H^1(\Omega)) = \{ v(x, y, t) \in L^2 : \forall t \in (0, T], v(\cdot, \cdot, t) \in H^1(\Omega) \},$$

$$H = \{ v \in L^2((0, T], H^1(\Omega)) \text{ tal que } \forall t \in (0, T], \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0 \}, \quad (1.2)$$

Além de  $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$  e  $q(x, y, 0) = q_0(x, y)$ .

A formulação variacional do problema indicado acima será dada por:

Encontrar  $p = p(x, y, t)$  e  $q = q(x, y, t)$  tais que

$$\left( \frac{\partial p}{\partial t} | v \right) - (\text{div}[\alpha(x, y, t) \cdot \nabla p - V \cdot p] | v) + (\sigma(x, y, t) \cdot p | v) = \\ = (p \cdot f(p, q) | v), \text{ e} \quad (1.3)$$

$$\left( \frac{\partial q}{\partial t} | v \right) - (\text{div}[\beta(x, y, t) \cdot \nabla q - W \cdot q] | v) + (v(x, y, t) \cdot q | v) = \\ = (q \cdot g(p, q) | v), \text{ satisfeitas as condições iniciais,}$$

para  $\forall v \in V = H^1(\Omega)$ , o que, usando o T. de Green, nos leva a:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial t} | v \right) + (\alpha(x, y, t) \cdot \nabla p | \nabla v) + (V \cdot \nabla p | v) + (\sigma(x, y, t) \cdot p | v) - \int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial p}{\partial \eta} \cdot v d\gamma = \\ = (p \cdot f(p, q) | v), \text{ e} \quad (1.4)$$

$$\left( \frac{\partial q}{\partial t} | v \right) + (\beta(x, y, t) \cdot \nabla q | \nabla v) + (W \cdot \nabla q | v) + (v(x, y, t) \cdot q | v) - \int_{\partial\Omega} \beta \frac{\partial q}{\partial \eta} \cdot v d\gamma = \\ = (q \cdot g(p, q) | v),$$

considerando  $\text{div}(V)$  e  $\text{div}(W)$  ambos nulos. Esta condição corresponde a considerar que os campos das velocidades dados, respectivamente, por  $V$  e por  $W$ , sejam conservativos. A esta formulação variacional há que se acrescentar, ainda, o efeito das condições de contorno, que no caso das condições de Dirichlet e de von Neumann serem homogêneas, por exemplo, implicariam no desaparecimento da integral sobre a fronteira  $\partial\Omega$ . Em outras palavras, se as condições de contorno forem, genericamente dadas por expressões do tipo

$$k_0(x, y, t) \cdot p(x, y, t)|_{\partial\Omega} + k_1(x, y, t) \cdot \alpha(x, y, t) \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta}|_{\partial\Omega} = s_p(x, y, t) \text{ e} \\ l_0(x, y, t) \cdot q(x, y, t)|_{\partial\Omega} + l_1(x, y, t) \cdot \beta(x, y, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial \eta}|_{\partial\Omega} = s_q(x, y, t), \quad (1.5)$$

onde  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  formam a fronteira  $\partial\Omega$ , e  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \partial\Omega$ ,

deveremos ter, no lugar de integrais de linha como as que figuram em (1.4), termos em que figurem as condições acima dadas por (1.5).

Em termos da garantia de existência e da unicidade de solução para o problema (1.4)-(1.5), podemos mencionar os trabalhos de Lions (1968), sob cujo signo se

desenvolveram os resultados de Aziz e Aman, por exemplo, com os resultados desejados.

A escolha por um método de aproximação, descartadas possibilidades de solução analítica, é pelo Método de Galerkin com vistas ao Método de Elementos Finitos de 1ª ou 2ª ordens, além de um método implícito, Crank-Nicolson, em t. Para isso, deveremos substituir o espaço V das funções teste por um subespaço de dimensão finita  $N_h$ , denominado  $V_h$ . Este subespaço é resultado de uma opção na aproximação desejada que se constitui, de fato, numa separação de variáveis, em que as funções teste citadas surgem em combinações lineares finitas de elementos da base de  $V_h$ . Além disto, a verificação das equações em sua formulação variacional (1.4) "... para todo  $v \in V$ " passará a ser exigida apenas para os  $N_h$  elementos  $\varphi_j(x,y)$  da base de  $V_h$ . Teremos, então:

$$p_h = \sum_j p_j(t) \cdot \varphi_j(x,y) \quad \text{e} \quad q_h = \sum_j q_j(t) \cdot \varphi_j(x,y) \quad (1.6)$$

e, em vez de (1.4), com as aproximações  $p_h(x,y,t)$  e  $q_h(x,y,t)$  no lugar das funções  $p=p(x,y,t)$  e  $q=q(x,y,t)$ , iremos calcular as 2n funções apenas da variável temporal t, dadas por  $p_j(t)$  e  $q_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{dp_i(t)}{dt} (\varphi_i | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n p_j(t) (\alpha(x,y,t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_{j=1}^n p_j(t) (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\ & + \sum_{j=1}^n p_j(t) (\sigma(x,y,t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \sum_{j \in \partial \Omega} p_j(t) \int_{\partial \Omega} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i \, d\gamma = \\ & = \sum_{j=1}^n p_j(t) \left( \varphi_j \cdot f \left( \sum_{k=1}^n p_k(t) \varphi_k, \sum_{s=1}^n q_s(t) \varphi_s \right) | \varphi_i \right), \quad \text{e} \\ & \sum_{i=1}^n \frac{dq_i(t)}{dt} (\varphi_i | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n q_j(t) (\beta(x,y,t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_{j=1}^n q_j(t) (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\ & + \sum_{j=1}^n q_j(t) (\nu(x,y,t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \sum_{j \in \partial \Omega} q_j(t) \int_{\partial \Omega} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i \, d\gamma = \\ & = \sum_{j=1}^n q_j(t) \left( \varphi_j \cdot g \left( \sum_{k=1}^n p_k(t) \varphi_k, \sum_{s=1}^n q_s(t) \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.7)$$

para  $\forall \varphi_i \in$  base de  $V_h$ , com  $(p_j(0))_j$  e  $(q_j(0))_j$  dados.

Em (1.7), há uma somatória de integrais cujo subíndice é dado pela expressão  $j \in \partial \Omega$ : isto deve evidenciar a soma para aqueles vértices cujos lados estão sobre a fronteira do domínio, excluindo tanto os vértices do interior de  $\Omega$  quanto os que estão no bordo, mas cujos lados não pertencem a  $\partial \Omega$ . Conforme as condições de contorno, os termos podem reduzir-se a expressões do tipo:

$$\left\langle \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} | \varphi_i \right\rangle_{\Gamma_i, 0} = \left\langle \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} | \varphi_i \right\rangle_{\{\sup(\varphi_j) > \sup(\varphi_j) - \Gamma_i\}, 0}$$

onde deve figurar (como no caso de  $\alpha$ ), a difusibilidade da espécie estudada no interior do meio do qual  $\eta$  é o versor externo ortogonal à fronteira.

Este sistema de Equações Diferenciais Ordinárias com 2n equações e 2n incógnitas funcionais aparenta uma simplicidade em termos de resolução analítica, a não se reparar nem nas características de não-linearidade nem nas dimensões do sistema – para

o qual a obtenção numérica de autovalores e autovetores associados se torna proibitivamente complexa. Isto posto, iremos recorrer ao Método de Crank-Nicolson. Ora é reconhecido que este método pode apresentar certas falhas provocando pequenas oscilações nos primeiros passos ao longo do tempo, mas no tipo de problemas aqui apresentado, o que interessa é simular um comportamento qualitativo a médio ou até a longo prazo em vez de obter resultados quantitativos em curtos períodos no tempo. O que indica a conveniência do uso de Crank-Nicolson de comprovada confiabilidade nesse tipo de situação.

Faremos, portanto, uso das discretizações para a variável temporal:

$$\frac{dc_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} \cong \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e} \quad (1.8)$$

$$c_j(t_n + \Delta t/2) \cong \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.}$$

Por  $c_j^{(n)}$  denotamos a aproximação de  $c = c(x_j, y_j, t_n)$ , que, usada com (1.8) em (1.7) leva a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\ & - \sum_{j \in \partial \Omega} \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \int_{\partial \Omega} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma = \\ & = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \left( \varphi_j \cdot f \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \\ & \text{e} \\ & \sum_{i=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nu(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\ & - \sum_{j \in \partial \Omega} \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} \int_{\partial \Omega} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma = \\ & = \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} \left( \varphi_j \cdot g \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

para  $\forall \varphi_i \in$  base de  $V_h$ , com  $(p_j^{(0)})_j$  e  $(q_j^{(0)})_j$  dados.

Isolando do lado esquerdo as ocorrências explícitas das incógnitas  $p^{(n+1)} = (p_j^{(n+1)})_{j=1, \dots, N}$  e  $q^{(n+1)} = (q_j^{(n+1)})_{j=1, \dots, N}$  (definidas para o passo de tempo  $t = t_{n+1}$ ), deixando as ocorrências explícitas de ambos os vetores  $p^{(n)} = (p_j^{(n)})_{j=1, \dots, N}$  e  $q^{(n)} = (q_j^{(n)})_{j=1, \dots, N}$  do lado direito dos sinais de igualdade e, ainda, tomando-se o devido cuidado de efetuar as integrais sobre a parte  $\Gamma_1$  da fronteira apenas quando estas, de fato, existirem, este sistema não-linear pode ser reescrito como se segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=j}^n p_j^{(n+1)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_i} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i \, d\gamma - \\
& \left. - \frac{\Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot f \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \right\} = \\
& = \sum_{i=j}^n p_j^{(n)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_i} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i \, d\gamma + \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot f \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \right\} \\
& e \\
& \sum_{i=j}^n q_j^{(n+1)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} (v(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_i} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i \, d\gamma - \\
& \left. - \frac{\Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot g \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \right\} = \\
& = \sum_{i=j}^n q_j^{(n)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (v(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_i} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i \, d\gamma + \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot g \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \right\},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

para  $\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$ , com  $(p_i(0))_i$  e  $(q_i(0))_i$  dados.

Este sistema se caracteriza pela não linearidade. No caso que estamos tratando o aspecto que assumem as funções  $f$  e  $g$ , ambas de  $p$  e  $q$ , é o de Lotka-Volterra clássico.

Obtem-se então, usando em (1.1) os coeficientes  $\sigma' = \sigma - \lambda$  e  $v' = v - \mu$ , e, para o caso particular de condições homogêneas de contorno, o sistema não-linear:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=j}^n p_j^{(n+1)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y, t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\sigma'(x, y, t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) + \\
& \left. + \frac{c \Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \right\} = \\
& = \sum_{i=j}^n p_j^{(n)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y, t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} (\sigma'(x, y, t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) - \\
& \left. - \frac{c \Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \right\} \\
& e \\
& \sum_{i=j}^n q_j^{(n+1)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y, t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\nu'(x, y, t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\mu \Delta t}{2L} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) + \\
& \left. + \frac{d \Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) \right\} = \\
& = \sum_{i=j}^n q_j^{(n)} \left\{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y, t) \cdot \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} (\nu'(x, y, t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\mu \Delta t}{2L} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) - \\
& \left. - \frac{d \Delta t}{2} \left( \varphi_j \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) \right\}, \tag{1.11}
\end{aligned}$$

para  $\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$ , com  $(p_j(0))_j$  e  $(q_j(0))_j$  dados.

Este sistema é reescrito como:

$$\begin{aligned}
& E(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot p^{(n+1)} = F(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot p^{(n)} \text{ e} \\
& G(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot q^{(n+1)} = H(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot q^{(n)}, \tag{1.12} \\
& \text{dados } p^{(0)} \text{ e } q^{(0)}.
\end{aligned}$$

As expressões de E, de F, de G e de H estão dadas acima, em (1.11), e, devido à não-linearidade, o algoritmo de aproximação numérica será iterativo em cada passo no tempo. Este procedimento numérico apóia-se na facilidade de utilizar esquemas numéricos modulares reaproveitando trabalhos anteriores de aproximação por Elementos Finitos. Ou seja:

Dados  $p^{(0)}$  e  $q^{(0)}$ ,

1. resolve-se o sistema  $E(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}) \cdot p^{(*)} = F(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}) \cdot p^{(0)}$ , obtendo o vetor  $p^{(*)}$ ;
2. resolve-se, em seguida o sistema  $G(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(0)}) \cdot q^{(*)} = H(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(0)}) \cdot q^{(0)}$ , obtendo  $q^{(*)}$ .
3. Resolve-se então  $E(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(*)}) \cdot p^{(**)} = F(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(*)}) \cdot p^{(0)}$ , obtendo  $p^{(**)}$ ;
4. e o sistema  $G(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(**)}, q^{(*)}) \cdot q^{(**)} = H(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(**)}, q^{(*)}) \cdot q^{(0)}$ , obtendo  $q^{(**)}$ .
5. Procedendo analogamente, obtêm-se  $p^{(***)}$  bem como  $q^{(***)}$ , e assim sucessivamente até que se estabeleçam convenientes aproximações dos vetores  $p^{(1)}$ ,  $q^{(1)}$ . Em geral não há ganhos ao se repetir muitas vezes estas iterações internas a cada passo no tempo (cf Sossae, 1995).
6. O procedimento todo, de 1. a 5. é repetido com  $p^{(n)}$  e  $q^{(n)}$  no lugar de  $p^{(0)}$  e  $q^{(0)}$ , para se obter  $p^{(n+1)}$  e  $q^{(n+1)}$ .

Para não tornar ainda mais pesado o texto, toda a parte algorítmica da construção das matrizes, bem como das repetidas soluções a cada passo no tempo não serão parte do presente texto. Referências para este tipo de procedimento são, por exemplo, Sossae (1995) ou Meyer (1988).

Usando um conjunto de dados qualitativamente aceitáveis, embora desprovidos de base real em termos de observações de campo, ensaios numéricos têm evidenciado características de comportamento teórico bastante sugestivas, e indicam a validade do tipo de modelagem aqui proposto no estudo de cenários de simulação.

No primeiro conjunto de ensaios foi usado um domínio retangular com características de simetria. Desse modo foi possível discretizar apenas um quarto do domínio total, definindo a condição de contorno nos dois lados "internos" do domínio maior (correspondendo ao lado superior e ao lado direito do retângulo discretizado) como sendo de von Neumann homogêneo. Nos outros dois lados (em baixo e à esquerda) a opção foi por uma condição Dirichlet homogênea. Para a condição inicial, que corresponde às distribuições iniciais de população, foram propostas duas situações: a de populações que, de início, ocupam regiões bastante diferentes e separadas, e um outro caso em que, já de início, temos a interação pela proximidade.

Na primeira situação, portanto, temos as populações iniciais dadas na figura 1, em que se caracteriza a distância entre elas, e apenas a dispersão irá promover seu encontro e, conseqüentemente, a interação competitiva.

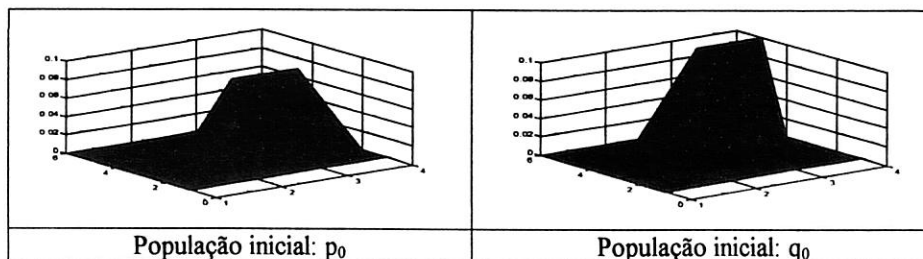


Figura 1



Depois de 2000 passos no tempo, o que se obtém é apresentado na figura 2, onde se vê claramente que a população denominada de  $p(x,y;t)$  que começou próxima do canto inferior esquerdo (ver fig. 1) tem uma certa dificuldade inicial de ocupar a região no modo usual para esse tipo de situação de dispersão, ficando com uma maior densidade populacional ligeiramente abaixo do canto superior direito, precisamente a região ocupada pela outra população  $q(x,y;t)$  que, tendo começado já nessa região, e tendo-a ocupado antes da primeira espécie, resiste na fase inicial a um convívio competitivo, impedindo aí a presença da espécie  $p(x,y,t)$ .

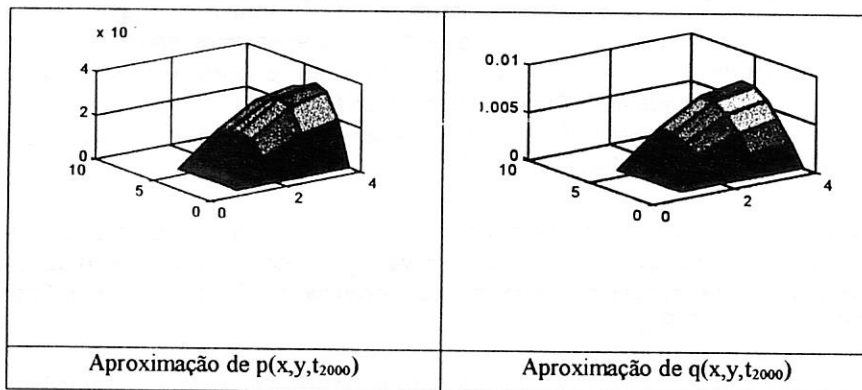


Figura 2

No entanto, depois de 4000 passos no tempo, o que se vê (na figura 3) é o esperado convívio das duas espécies na forma das soluções clássicas de modelos de dispersão uniespecíficos, tendo desaparecido a separação espacial de ambas as populações. Destacamos, também, a gradativa queda nos níveis populacionais ao longo do tempo.

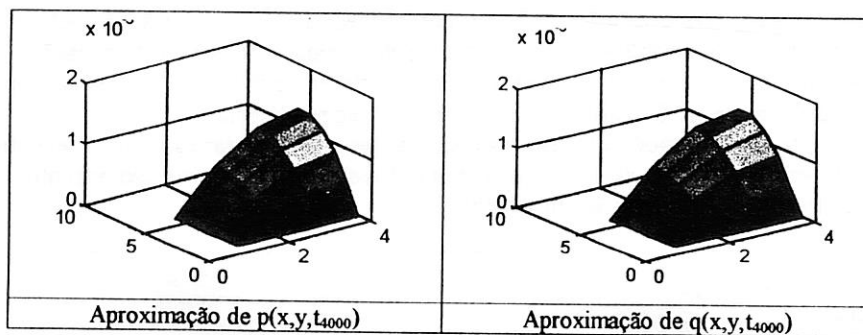


Figura 3

Ainda neste primeiro conjunto de ensaios, escolhemos um nó do domínio discretizado para que, fixado esse ponto no domínio espacial, se possa ilustrar um comportamento evolutivo de ambas as espécies modeladas. O ponto escolhido se localiza aproximadamente no centro do domínio para que possam ser acompanhadas as variações temporais:

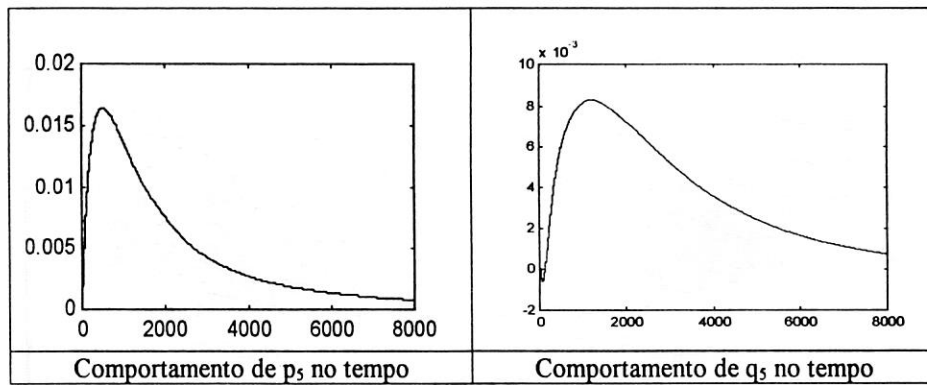


Figura 4

No segundo conjunto de ensaios, a aproximação dada em (1.11) foi alterada para se poder acompanhar um modelo clássico de predador-presa, também com uma dinâmica populacional de tipo logístico. A única diferença é o sinal que precede o último termo do lado direito da primeira equação:  $+c.p.q$ , evidenciando o efeito benéfico para o predador,  $p(x,y;t)$  do crescimento populacional da presa  $q(x,y;t)$ . São os mesmos os significados dos demais parâmetros de dispersão, migração, hostilidade do meio e de dinâmica populacional. Não parece ser necessário repetir as formulações variacional nem a variacional discretizada, como também é dispensável repetir as expressões e a seqüência algorítmica dadas em (1.12) e seqüência, com a citada mudança de sinal. As condições iniciais usadas nos ensaios seguintes estão dadas na figura 5. O objetivo deste conjunto de ensaios é o de simular o convívio de duas espécies numa relação predador-presa, com ambas as populações separadas por uma determinada extensão de terreno – em outras palavras, o encontro entre indivíduos irá ocorrer por força da dispersão populacional.

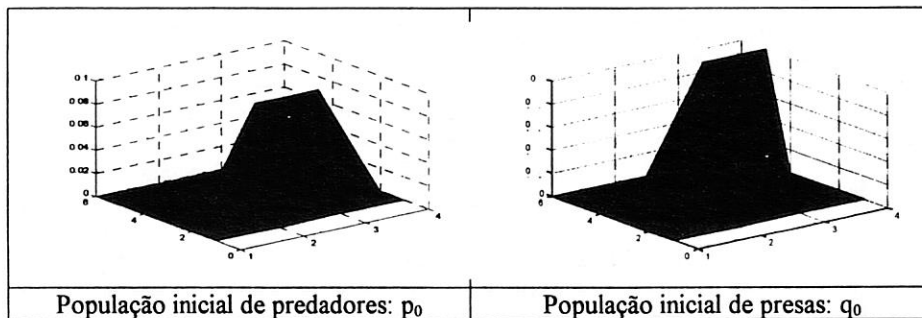


Figura 5

Após 8000 passos no tempo, o que se obteve está ilustrado na figura 6 – no que corresponde a um “quadro” que faz parte de um “filme”.

28. Okubo, A. Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Springer, 1980
29. Peschel, M. e Mende, W. The Predator-Prey Model: Do we live in a Volterra World? Springer, 1986.
30. Raychaudhuri, S., Sinha, D.K. e Chattopadhyay, J. Effect of time-varying cross-diffusivity in a two-species Lotka-Volterra competitive system. Ecological Modelling, 92, 55-64 (1996).
31. Rothe, F. e De Mottoni, P. A Simple System of Reaction-Diffusion Equations Describing Morphogenesis: Asymptotic Behavior. Ann. Mat. Pura Applicata, 122, 141--157 (1978).
32. Skellam, J.G. Random Dispersal in Theoretical Populations. Biometrika, 38, 196-218, 1951.
33. Sossae, R.C. Dinâmica Populacional Densidade-Dependente em Processos de Dispersão e Migração. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas, 80 (1995).
34. Sossae, R.C. e Meyer, J.F.C.A. Uma aproximação de soluções de problemas populacionais densidade-dependentes: dinâmica vital não-linear. Relatório Interno/BIO.
35. Thieme, H.R. Well-posedness of physiologically structured population models for *Daphnia Magna*. J. Math. Biology, 36, 303-315 (1988).
36. Timm, U. e Okubo, A. Diffusion-driven instability in a predator-prey system with time-varying diffusivities. J. Math. Biol., 30, 307-320 (1992).
37. Vickers, G.T., Hutson, V.C.L. e Budd, C.J. Spatial patterns in population conflicts. J. Math. Biol. 31, 411-430, 1993.
38. Wilder, J.W., Christie, I. e Colbert, J.J. Modeling of one-dimensional spatial effects on the spread of Gipsy moths. Ecological Modelling, 78, 219-234, 1995.
39. Wilder, J.W., Christie, I. e Colbert, J.J. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of forest pests and their management. Ecological Modelling, 82, 287-298 (1995).