

Modelo do tipo SIS com parâmetros fuzzy

Laécio C de Barros
Rodney C. Bassanezi

Maria Beatriz F. Leite
Renata Zotin G.de Oliveira

Modelo do tipo SIS com parâmetros fuzzy

Laécio C de Barros
Rodney C. Bassanezi

Maria Beatriz F. Leite
Renata Zotin G.de Oliveira

Abstract

Neste trabalho consideramos o modelo epidemiológico do tipo SIS (suscetível-infectado-suscetível) em que a taxas de transmissão e de recuperação da doença são consideradas como conjuntos fuzzy. A Teoria Fuzzy é utilizada para análise da Taxa de Reprodutibilidade Basal R_0 , com o objetivo de propor estratégias de controle.

1. INTRODUÇÃO

Os trabalhos de Kermack e Mckendrick tiveram grande influência no desenvolvimento de modelos matemáticos para o estudo de doenças infecciosas de transmissão direta, ou seja, doenças que para serem disseminadas, dependem do contato entre indivíduos suscetíveis e infectados. Essas doenças são geralmente causadas por vírus ou bactérias, como por exemplo, rubéola, sarampo, dentre outras.

Recentemente, modelos cada vez mais avançados tem sido propostos para o estudo da influência de diversos fatores no curso de uma epidemia, visando essencialmente, a adoção de medidas de controle. A maioria desses modelos considera a população subdividida em classes distintas, de acordo com a saúde ou doença dos indivíduos e a taxa de transmissão da doença sendo proporcional ao encontro de indivíduos suscetíveis (S) e infectados (I), representado por βSI , onde β é chamado taxa de contato. Esta última suposição é baseada na **Lei de Ação das Massas**, oriunda da Cinética Química.

Ao considerar a taxa de contato (β) entre os indivíduos como um parâmetro constante, assume-se que a população está distribuída homoganeamente e, consequentemente, do ponto de vista epidemiológico, os indivíduos não são diferencia-

dos. Dessa forma, a transmissão da doença dependerá unicamente da transmissibilidade do agente infeccioso e da probabilidade de encontro de um suscetível com um infectado.

Um parâmetro de grande interesse no estudo de modelos epidemiológicos é o *Valor de Reprodutibilidade Basal*, R_0 , definido como o número de infecções secundárias que um indivíduo infectado é capaz de produzir quando ele é introduzido numa população inteiramente suscetível. A análise do R_0 permite identificar quando a doença se instalará numa população.

No entanto, estes modelos não consideram de forma geral, os diferentes graus de suscetibilidade e infecciosidade dos indivíduos. Em [2], essa heterogeneidade dos indivíduos é incorporada na taxa de contato, para um modelo do tipo SI, considerando-a como um conjunto fuzzy [1]. Tal fato possibilitou a obtenção do Valor de Reprodutibilidade Basal R_0 para o modelo, diferentemente do modelo clássico SI, no qual a doença sempre se propaga.

Consideramos neste trabalho doenças em que o indivíduos infectados não adquirem nenhum tipo de imunidade contra as mesmas, caracterizando um modelo do tipo SIS. Assim como em [2], a heterogeneidade dos indivíduos é incorporada na taxa de contato e também na taxa de recuperação do indivíduo, considerando que ambas dependem, por exemplo, da carga viral. Como o tempo de permanência de um indivíduo na classe dos infectados não é o mesmo para todos indivíduos, se considerarmos que nem todos possuem a mesma quantidade do agente infeccioso, quanto maior a carga viral maior será o período de recuperação.

Com estas considerações, obtemos R_0 dependente da carga viral, diferentemente do modelo clássico, onde é constante.

2. PRELIMINARES

Um subconjunto fuzzy \mathcal{F} do conjunto universo \mathcal{U} é definido em termos de uma função grau de pertinência u , que a cada elemento x de \mathcal{U} associa um número $u(x)$, entre 0 e 1 chamado grau de pertinência de x a \mathcal{F} . Assim, o conjunto fuzzy \mathcal{F} é simbolicamente indicado por uma função grau de pertinência.

$$u : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$$

Os valores de $u(x) = 1$ e $u(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência completa e a não pertinência do elemento x a \mathcal{F} .

É interessante notar que um subconjunto clássico A de \mathcal{U} é um particular conjunto fuzzy para o qual a função grau de pertinência é a função característica de A , isto é, $\chi_A : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}$.

A fim de usar um método de defuzificação para obter um valor *crisp*, isto é, um número real que represente um conjunto fuzzy (no nosso caso o valor 'médio' do número de infectados no instante t) necessitaremos do conceito de medida fuzzy.

Seja Ω um conjunto não vazio e $P(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω . A função $\mu : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ pode ser uma *medida fuzzy* se

- a) $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\Omega) = 1$
- b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$.

Seja u um conjunto fuzzy. A integral fuzzy, ou valor esperado fuzzy de u , $FEV[u]$, é definido por

$$FEV[u] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{u \geq \alpha\}],$$

onde $\{u \geq \alpha\} = \{x \in R : u(x) \geq \alpha\}$.

Um exemplo de medida fuzzy é a medida de probabilidade e, neste caso, Sugeno [5] mostrou que a diferença entre $FEV[u]$ e a esperança clássica $E(u)$ não ultrapassa 0.25 quando o conjunto fuzzy u é também uma variável aleatória. Desse modo, o valor $FEV[u]$ que, em geral é mais fácil de calcular, pode fornecer uma boa estimativa da esperança matemática da variável aleatória u .

Em nosso trabalho $FEV[u]$ será usado como o defuzificador do conjunto fuzzy u .

3. O MODELO

O modelo mais simples para descrever uma doença na qual um indivíduo se recupera, mas não obtém nenhum tipo de imunidade, ou seja, ele volta a ser suscetível, pode ser esquematizado no seguinte diagrama compartimental:

$$S \rightarrow I \rightarrow S$$

Considerando que a passagem de um indivíduo da classe S para a classe I ocorre a uma taxa β , dependendo somente do encontro entre um suscetível e um infectado e, além disso, que o indivíduo se recupera e volta a ser suscetível a uma taxa γ , temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ S + I = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde S é a proporção de indivíduos suscetíveis, I é a proporção de indivíduos infectados, β é a taxa de contato e γ a taxa de recuperação. Consequentemente, γ^{-1} é o período médio de recuperação.

Na seção seguinte propomos uma extensão do modelo (3.1) incorporando a heterogeneidade dos indivíduos nos parâmetros β e γ , considerando-os como um conjunto fuzzy. ([1],[2])

3.1. Modelo Fuzzy

Visando incorporar as incertezas presentes nos conceitos de suscetível e infeccioso, consideraremos os parâmetros β e γ como conjuntos fuzzy.

Como o parâmetro β é, em certo sentido, "responsável" pela chance de ocorrer novos casos, admitimos que ele depende, por exemplo, da carga viral. Assim, quanto maior a carga viral, maior será a chance de transmissão da doença. Em outras palavras, assumimos que $\beta = \beta(v)$ onde v é a carga viral de um indivíduo, é uma função não decrescente. Por outro lado, espera-se que quando a carga viral é pequena, não há chance de ocorrer a transmissão. Em outras palavras, admitimos que exista uma carga mínima v_{\min} necessária para que haja chance de transmissão da doença. Além disso, a partir de uma certa carga viral v_M , a chance é máxima. Admitimos ainda que, a carga viral máxima deve assumir um valor máximo, v_{\max} .

Escolhemos

$$\beta(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v < v_{\min} \\ \frac{v-v_{\min}}{v_M-v_{\min}} & \text{se } v_{\min} < v < v_M \\ 1 & \text{se } v_M < v < v_{\max} \\ 0 & \text{se } v > v_{\max} \end{cases} \quad (3.2)$$

Para a taxa de recuperação do indivíduo (γ), consideramos que, quanto maior a carga viral, maior é o tempo que o indivíduo permanece na classe dos infectados (γ^{-1}). Consequentemente, γ deve ser uma função decrescente com v . Escolhemos:

$$\gamma(v) = \frac{(\gamma_0 - 1)}{v_{m\acute{a}x}} v + 1 \quad (3.3)$$

onde $\gamma_0 > 0$ é a menor taxa de recuperação.

Além disso, consideramos que a carga viral distribui-se na população de acordo com a função distribuição $\rho(v)$ dada a seguir:

$$\rho(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \leq \bar{v} - \delta \\ \frac{1}{\delta}(v - \bar{v} + \delta) & \text{se } \bar{v} - \delta < v \leq \bar{v} \\ -\frac{1}{\delta}(v - \bar{v} - \delta) & \text{se } \bar{v} < v \leq \bar{v} + \delta \\ 0 & \text{se } v \geq \bar{v} + \delta \end{cases} \quad (3.4)$$

Assim, o parâmetro \bar{v} é a carga viral média presente (neste caso a carga viral média dos indivíduos infectados), enquanto δ dá a dispersão.

Note que $\rho(v)$ é tipicamente uma função de pertinência de um número fuzzy triangular[4]

4. Análise do modelo

Nosso principal intuito nesta secção é fazer um estudo do modelo no sentido de obter informações que indiquem a presença ou não de uma doença numa população e, em seguida, fazer estudos do Valor de Reprodutibilidade Basal que, como sabemos, é um parâmetro que indica o ritmo e uma possível política de controle para uma doença.

4.1. Solução e Pontos de Equilíbrio.

Do sistema de equações(3.1), temos

$$\frac{dI}{dt} = \beta I \left[\left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \right) - I \right].$$

Assim obtemos a solução

$$I = \frac{\beta - \gamma}{\beta + [\frac{\beta - \gamma}{I_0} - \beta]e^{-(\beta - \gamma)t}}$$

que, para fazer sentido biológico, tem-se $\beta \geq \gamma$.

Para estudarmos a evolução do número de infectados no tempo, isto é, se o número de infectados cresce indefinidamente ou não, devemos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Fazendo

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dI}{dt} = 0$$

obtemos os pontos de equilíbrio $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (\frac{\gamma}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta})$.

Uma análise do modelo clássico [3] mostra que P_1 é instável enquanto P_2 (com $\beta \geq \gamma$) é assintoticamente estável indicando assim que, por mais que o número de infectados cresça (supondo inicialmente I_0 pequeno) esse número se estabilizará em $1 - \frac{\gamma}{\beta}$, indicando assim que a fração $\frac{\gamma}{\beta}$ da população não será afetada.

4.2. Diagrama de Bifurcação

Da hipótese de nosso modelo, tanto β como γ dependem da carga viral v . Desse modo, o número de infectados, em cada instante, é dado por

$$I(v, t) = \frac{\beta(v) - \gamma(v)}{\beta(v) + [\frac{\beta(v) - \gamma(v)}{I_0} - \beta(v)]e^{-[\beta(v) - \gamma(v)]t}}. \quad (4.1)$$

$I(v, t)$ pode ser interpretado como o número de infectados no instante t devido à carga viral v .

Também temos

$$P_2 = (\frac{\gamma(v)}{\beta(v)}, 1 - \frac{\gamma(v)}{\beta(v)}).$$

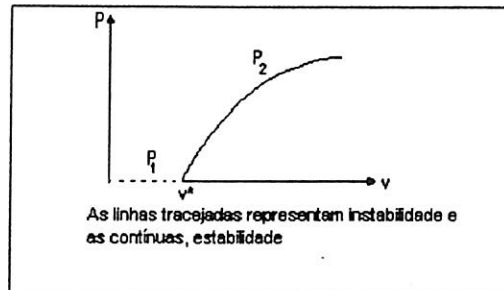
Como dito anteriormente, enquanto $\frac{\gamma(v)}{\beta(v)} < 1$, temos P_2 assintoticamente estável. Portanto um valor de bifurcação para v é v^* , solução da equação $\beta(v) = \gamma(v)$.

Um cálculo direto nos mostra que

$$v^* = \frac{v_M v_{máx}}{v_{máx} + (1 - \gamma_0)(v_M - v_{\min})} \quad (4.2)$$

e que $v_{\min} \leq v^* \leq v_M$.

A estabilidade estrutural para este modelo pode ser ilustrada pelo diagrama de bifurcação abaixo, onde P são os pontos de equilíbrio.



A carga viral v^* é chamada de valor de bifurcação do modelo já que para valores de $v < v^*$, o modelo admite apenas o ponto de equilíbrio instável P_1 e, se $v > v^*$ o modelo passa a admitir também o ponto de equilíbrio assintoticamente estável P_2 . Desta forma podemos pensar em v^* como um parâmetro de controle da doença no sentido que, se uma doença estiver instalada numa população, devemos fazer com que cada elemento desta população passe a ter carga viral v não superior a v^* .

5. Valor de Reprodutibilidade Basal

Tradicionalmente, a política para controle de uma epidemia é baseada no Valor de Reprodutibilidade Basal R_0 , que, como vimos na introdução, indica o número

de indivíduos infectados devido à introdução de um único elemento infectado num grupo de suscetíveis.

É sabido[3] que para o modelo clássico SIS temos $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ e que a doença não evoluirá se $R_0 < 1$ e se instalará na população se $R_0 > 1$.

No nosso modelo, R_0 depende da carga viral v de modo que

$$R_0(v) = \frac{\beta(v)}{\gamma(v)}.$$

Assim, como já vimos antes, $R_0(v) < 1$ se $v < v^*$ e $R_0(v) > 1$ se $v > v^*$. Isto nos indica que uma maneira de controlar $R_0(v)$ é aumentando v^* . Desta forma, v^* fornece um indicador da suscetibilidade do grupo estudado, que será tanto menor quanto maior for v^* . É interessante notar que v^* aumentará com o aumento de v_{\min} e diminuirá se v_{\min} diminuir. Assim sendo, devido à dependência de vários parâmetros para se obter v^* e do fato que v_{\min} é um parâmetro característico de cada grupo estudado, definiremos v_{\min} como o parâmetro que indica a suscetibilidade do grupo.

O uso de $R_0(v)$ como um indicador de política de controle de uma doença, como discutido acima, pressupõe o conhecimento da carga viral de cada indivíduo do grupo estudado e, a partir daí, compara-la com o valor v^* .

Com a hipótese, feita no início deste trabalho, que a carga viral distribui-se segundo um número fuzzy cuja função de pertinência é dada por $\rho(v)$, podemos indicar uma política global a todos os indivíduos ao mesmo tempo que é simplesmente a seguinte: a doença se instalará no grupo estudado se $v^* < \bar{v} + \delta$ e não se instalará se $v^* \geq \bar{v} + \delta$. Outra possibilidade é adotar um único valor de reprodutibilidade para a população como um todo. Este é o assunto que trataremos até o fim desta secção.

Este novo Valor de Reprodutibilidade Basal será definido usando algumas técnicas da teoria fuzzy. Mais precisamente, usaremos o conceito de valor esperado fuzzy (FEV), como visto na secção preliminar. Este novo parâmetro é simplesmente uma espécie de média de $R_0(v)$, levando-se em conta a distribuição da carga viral v , de acordo com a função de pertinência $\rho(v)$. Como $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v) dv$ pode não ser 1, não faz sentido usar a esperança clássica para obter o valor médio de $R_0(v)$. Desta forma, definiremos o novo parâmetro como valor de reprodutibilidade basal fuzzy:

$$R_0^f = \frac{1}{\gamma_0} FEV[\gamma_0 R_0]. \quad (5.1)$$

Note que $R_0(v)$ pode ser maior que 1 e dessa forma não é um conjunto fuzzy. No entanto, é fácil ver que o valor máximo de $R_0(v)$ é $\frac{1}{\gamma_0}$. Assim, $\gamma_0 R_0(v) \leq 1$, o que caracteriza $\gamma_0 R_0(v)$ como um conjunto fuzzy e neste caso $FEV[\gamma_0 R_0(v)]$ está bem definido.

Como visto na seção preliminar,

$$FEV[\gamma_0 R_0(v)] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, H(\alpha)]$$

onde $H(\alpha) = \mu\{v : \gamma_0 R_0(v) \geq \alpha\} = \mu(X)$ e μ é uma medida fuzzy.

Aqui vamos usar a medida de possibilidade, que claramente é uma medida fuzzy:

$$\mu(A) = \sup_{v \in A} \rho(v).$$

Esta pode ser considerada uma medida bastante razoável para ser adotada por um especialista(no caso um médico) que não queira correr riscos nas suas avaliações e possíveis tratamentos, pois trata-se de uma medida bastante conservadora no sentido que o grau de infecção de um grupo de indivíduos é aquele apresentado pelo indivíduo com maior grau de infecção.

Voltando ao cálculo de $FEV[\gamma_0 R_0(v)]$, lembremos que $\frac{\beta(v)}{\gamma(v)}$ é não decrescente com v , então o conjunto X acima é um intervalo da forma $[v', v_{máx}]$ onde v' é a solução da equação

$$\gamma_0 \frac{\beta(v)}{\gamma(v)} = \alpha.$$

Portanto,

$$H(\alpha) = \mu[v', v_{máx}] = \sup_{v' \leq v \leq v_{máx}} \rho(v). \quad (5.2)$$

Observemos inicialmente que $H(0) = 1$ e $H(1) = \rho(v_{máx})$. Por outro lado, se $\alpha > 0$ e pelo fato de $\frac{\beta(v)}{\gamma(v)}$ ser crescente, temos que

$$a \leq v' \leq b \Leftrightarrow \frac{\beta(a)}{\gamma(a)} \leq \frac{\beta(v')}{\gamma(v')} \leq \frac{\beta(b)}{\gamma(b)} \Leftrightarrow \gamma_0 \frac{\beta(a)}{\gamma(a)} \leq \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(b)}{\gamma(b)}. \quad (5.3)$$

Desta forma

$0 < \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \Leftrightarrow v_{\min} \leq v' \leq v_M$ e neste caso,

$$v' = \frac{[\alpha(v_M - v_{\min}) + \gamma_0 v_{\min}]v_{m\acute{a}x}}{\gamma_0 v_{m\acute{a}x} - \alpha(\gamma_0 - 1)(v_M - v_{\min})}.$$

$\frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \leq \alpha < 1 \Leftrightarrow v_M \leq v' \leq v_{m\acute{a}x}$ e neste caso temos

$$v' = \frac{v_{m\acute{a}x}}{\gamma_0 - 1} \left(\frac{\gamma_0}{\alpha} - 1 \right).$$

A fim de exemplificar a avaliação do $FEV[\gamma_0 R_0]$, vamos supor que a carga viral V de um grupo de indivíduos seja uma variável lingüística que assume as classificações: fraca(V_-), forte(V^+) ou média(V^+). Cada uma destas classificações são os conjuntos fuzzy definidos abaixo com função de pertinência é $\rho(v)$.

Caso a) Carga viral fraca(V_-). Caracterizada por $\bar{v} + \delta < v_{\min}$. Portanto $\bar{v} + \delta < v'$ e daí,

$$H(\alpha) = \sup_{v' \leq v \leq v_{m\acute{a}x}} \rho(v) = 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Logo

$$FEV[\gamma_0 R_0] = 0 < \gamma_0 \text{ que equivale a } R_0^f < 1,$$

o que nos leva a concluir que a doença não se instalará.

Caso b) Carga viral forte(V^+). Caracterizada por $\bar{v} - \delta > v_M$ e $\bar{v} + \delta < v_{m\acute{a}x}$. Portanto, com o auxílio de (5.3), temos:

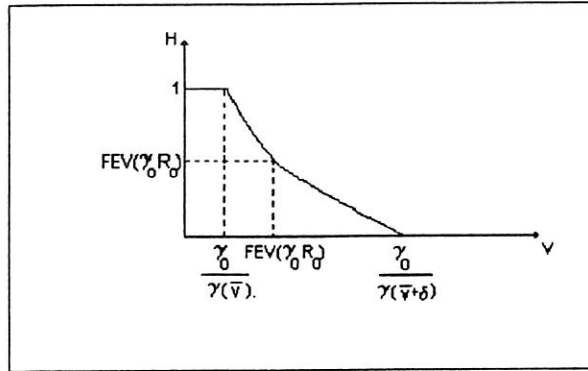
Se $0 < \alpha \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})}$, então $v' \leq \bar{v}$ e assim $H(\alpha) = 1$.

Se $\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} < \alpha \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$, então $\bar{v} < v' \leq \bar{v} + \delta$ e assim $H(\alpha) = \rho(v')$.

Se $\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)} < \alpha \leq 1$, então $\bar{v} + \delta < v' \leq v_{m\acute{a}x}$ e assim $H(\alpha) = 0$.

Desta forma temos,
$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \\ \rho(v') & \text{se } \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \leq \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v}+\delta)} \\ 0 & \text{se } \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v}+\delta)} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

A figura abaixo representa o gráfico da função $H(\alpha)$ para o caso da carga viral forte.



A função H é sempre decrescente, e é fácil ver que se $\delta > 0$, H é contínua. Desta forma, $FEV[\gamma_0 R_0]$ coincide com o ponto fixo de H , donde podemos concluir que

$$\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \leq FEV[\gamma_0 R_0] \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)}.$$

Portanto, como $\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} > \gamma_0$, segue que $R_0^f > 1$, o que indica que a doença se instalará no grupo estudado.

Neste caso é possível obter precisamente o valor $FEV[\gamma_0 R_0]$. Para isto, basta acharmos o ponto fixo de H que é dado pela solução da equação

$$\rho(v') = \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{v} - v'}{\delta} + 1 = \alpha$$

com $v_M < \bar{v} \leq v' \leq v_{máx}$.

Assim, usando a expressão de v' para este caso, o $FEV[\gamma_0 R_0]$ é a única solução da equação do segundo grau, com concavidade para cima e termo independente negativo:

$$(1 - \gamma_0)\delta\alpha^2 + [(\gamma_0 - 1)(\bar{v} + \delta) + v_{máx}]\alpha - \gamma_0 v_{máx} = 0.$$

Caso c) Carga viral média (V_-^+). Neste caso temos $\bar{v} - \delta > v_{\min}$ e $\bar{v} + \delta < v_M$. Portanto, com o auxílio de (5.3), temos:

Se $0 < \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})}$, então $v' \leq \bar{v}$ e assim $H(\alpha) = 1$.

Se $\gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} < \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$, então $\bar{v} < v' \leq \bar{v} + \delta$ e assim $H(\alpha) = \rho(v')$.

Se $\gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} < \alpha \leq 1$, então $\bar{v} + \delta < v' \leq v_{\max}$ e assim $H(\alpha) = 0$.

$$\text{Desta forma temos, } H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \\ \rho(v') & \text{se } \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} < \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \\ 0 & \text{se } \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Assim, de maneira análoga ao caso b), temos

$$\frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq \frac{FEV[\gamma_0 R_0]}{\gamma_0} \leq \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$$

ou

$$\frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq R_0^f \leq \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)}.$$

Desta forma, se $\bar{v} > v^*$, então $R_0^f \geq \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} > 1$ e a doença se instalará na população. Por outro lado, se $\bar{v} + \delta < v^*$ então $R_0^f \leq \frac{\beta(v^*)}{\gamma(v^*)} < 1$ e neste caso a doença se extinguirá. É interessante notar que a desigualdade $\bar{v} + \delta < v^*$ indica, como boa política de controle da doença, os seguintes procedimentos:

1. diminuição (aumentando v_{\min} , conseqüentemente aumentando v^*) da suscetibilidade do grupo, o que pode ser feito através de melhorias na qualidade de vida do grupo estudado.
2. diminuição da carga viral média, por meio do uso de fármaco, por exemplo, e isolamento (diminuindo δ) dos infectados.

Neste caso também é possível obter precisamente o valor $FEV[\gamma_0 R_0]$. Para isto, basta acharmos o ponto fixo de H que é dado pela solução da equação

$$\rho(v') = \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{v} - v'}{\delta} + 1 = \alpha$$

com $v_{\min} \leq v \leq v_M$.

Assim, o $FEV[\gamma_0 R_0]$ é a única solução da equação do segundo grau, com concavidade para baixo e termo independente positivo:

$$(\gamma_0 - 1)\delta\alpha^2 - [(\gamma_0 - 1)(\bar{v} + \delta) + v_{\max} - \frac{\gamma_0 \delta v_{\max}}{v_M - v_{\min}}]\alpha + \gamma_0 v_{\max} \beta(\bar{v} + \delta) = 0.$$

A seguir vamos fazer uma pequena comparação entre os dois valores de reprodutibilidade basal: R_0 e R_0^f .

6. Comparação entre R_0 e R_0^f

Nosso principal comentário aqui trata dos três casos estudados na secção anterior: carga viral fraca, média e forte.

Em qualquer um destes casos, temos

$$\gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq FEV[\gamma_0 R_0] \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$$

ou

$$\frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq R_0^f \leq \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)}.$$

Como a função $R_0(v) = \frac{\beta(v)}{\gamma(v)}$ é crescente e contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe um único $\hat{v} \in [\bar{v}, \bar{v} + \delta]$ de modo que

$$R_0^f = \frac{\beta(\hat{v})}{\gamma(\hat{v})} = R_0(\hat{v}).$$

Desta forma, os casos estudados na secção anterior, de carga viral fraca, forte e média, poderão ser estudadas via $R_0(\hat{v})$:

. Para o caso em que a carga viral é fraca, tem-se $\hat{v} \leq \bar{v} + \delta < v_{\min}$. Portanto $R_0(\hat{v}) = 0$ e a doença não se instalará.

. Para a carga viral é forte, tem-se $\hat{v} \geq \bar{v} > \bar{v} - \delta \geq v_M$. Portanto $R_0(\hat{v}) = \frac{1}{\gamma(\hat{v})} > 1$ informando que a doença se instalará.

. Para a carga viral é média temos:

. Se $v^* > \hat{v}$ então $R_0(\hat{v}) = \frac{\beta(\hat{v})}{\gamma(\hat{v})} < \frac{\beta(v^*)}{\gamma(v^*)} = 1$, indicando que a doença se extinguirá.

. Se $v^* < \hat{v}$ então $R_0(\hat{v}) = \frac{\beta(\hat{v})}{\gamma(\hat{v})} > \frac{\beta(v^*)}{\gamma(v^*)} = 1$, indicando a instalação da doença, embora não haja epidemia na população já que nestes modelos do tipo *SIS* a doença tende a se estabilizar como vimos antes.

Notemos que a comparação de v^* , feita acima, é com uma carga viral \hat{v} que, possivelmente, pode ser inferior a $\bar{v} + \delta$, indicando assim uma otimização em relação à política de controle da doença proposta na secção 5, onde a comparação de v^* era feita com a carga viral máxima do grupo estrudado $\bar{v} + \delta$.

Para finalizar, é bom ressaltar que a obtenção do valor $R_0(\hat{v})$ acima, utilizado para predizer se uma doença se instala ou não numa população, só foi possível a partir do $FEV[\gamma_0 R_0]$, indicando dessa forma que $FEV[\gamma_0 R_0]$ é indispensável para se obter $R_0(\hat{v})$.

References

- [1] Barros, L.C.; Bassanezi, R. C. *Um exemplo de modelagem de fenômenos incertos - E.D. fuzzy*. Revista de Biomatemática, Vol. 5, p. 121-128. IMECC - UNICAMP, XVII CNMAC (1995).
- [2] Barros, L.C. ; Bassanezi, R.C. ; Leite, M.B.F. The epidemiological models SI with fuzzy parameter of transmission. (submetido).
- [3] Bassanezi, R. C. ; Ferreira Jr., W.C. - *Equações Diferenciais e Aplicações*, Harbra - 1989.
- [4] Nguyen, H.T.; Walker, E.A. *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press, Inc.- 1997.

- [5] Sugeno, M. *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*. Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology. (1974).