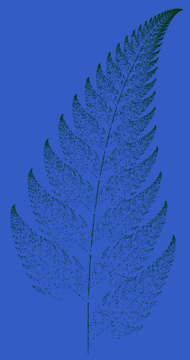
Introdução aos Fractais IFS

Ricardo Biloti

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC / UNICAMP

(versão revisada em 2006)



O que é um Fractal?

Existem várias definições

ou seja, não existe uma definição

Como é um Fractal?

- Riqueza de detalhes

Como é um Fractal?

- Riqueza de detalhes
- Autosimilar

Como é um Fractal?

- Riqueza de detalhes
- Autosimilar
- Difícil de descrever

Como é um Fractal?

- Riqueza de detalhes
- Autosimilar
- Difícil de descrever
- Fácil de construir

O que é IFS?

Iterated Function System

Sistema Iterativo de Funções

O que é IFS?

Iterated Function System

Sistema Iterativo de Funções

Conjunto de funções que são aplicadas iterativamente

O que é IFS?

Iterated Function System

Sistema Iterativo de Funções

Conjunto de funções que são

aplicadas iterativamente

$$\{X;\ w_n : X \to X,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$$

Exemplo

$$X = \mathbb{R}^2,\ N = 3$$

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

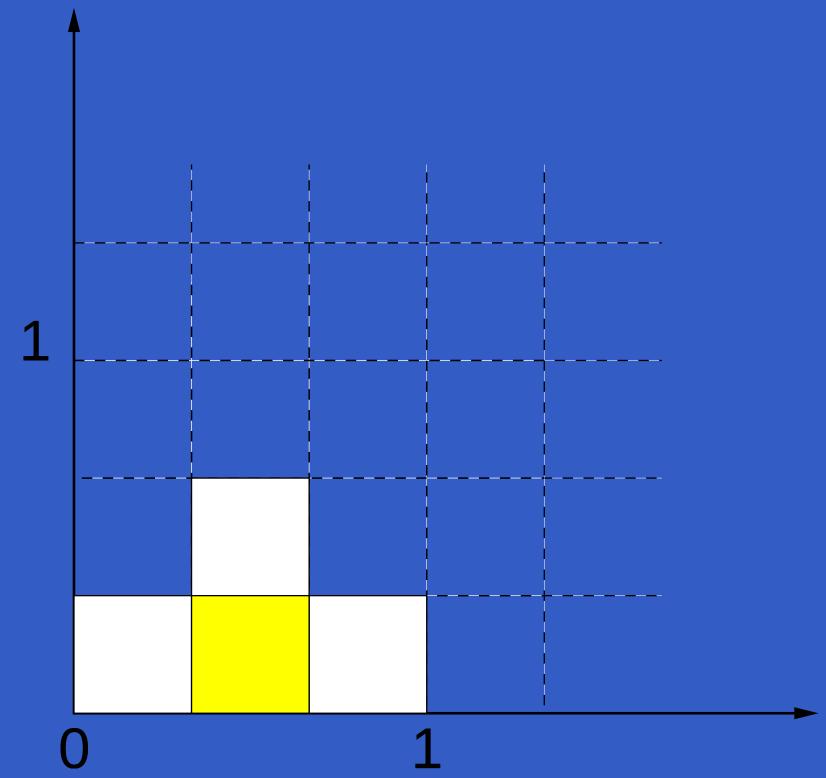
$$X = \mathbb{R}^2, \ N = 3$$

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

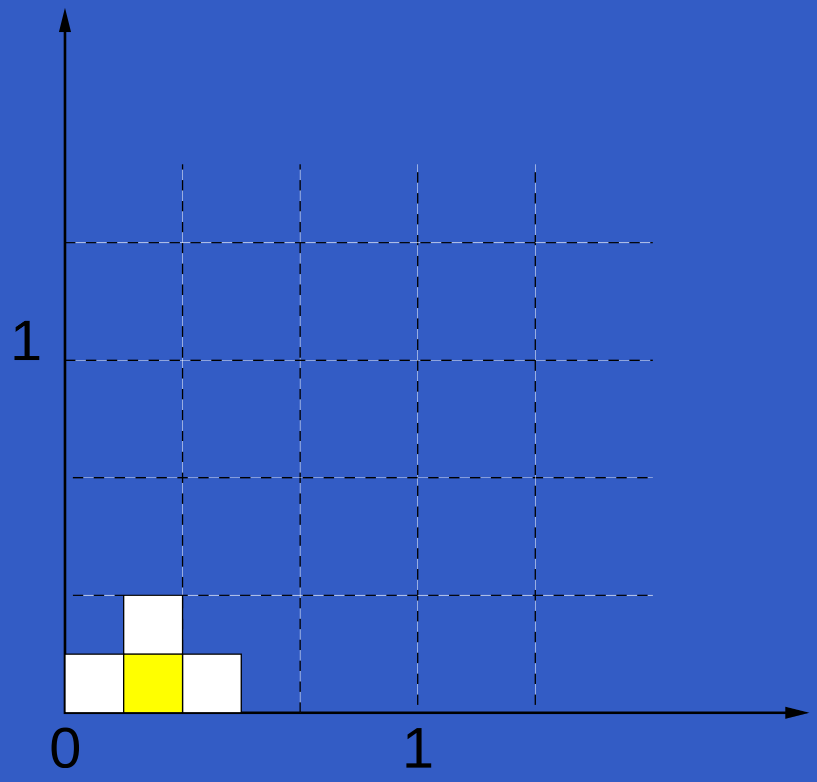
$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

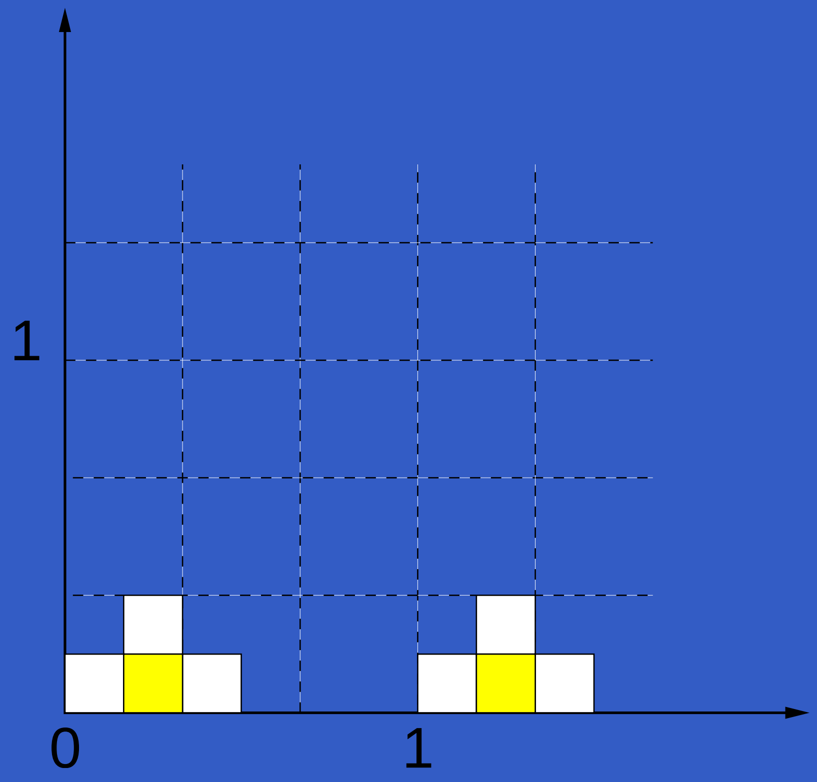
Exemplo: Transformações



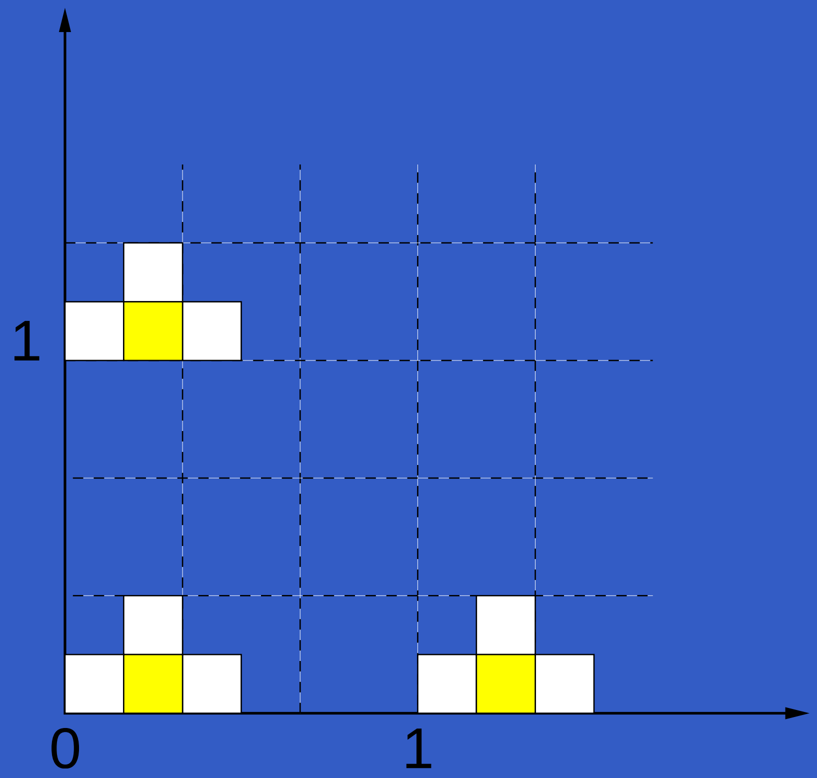
Exemplo: Transformações



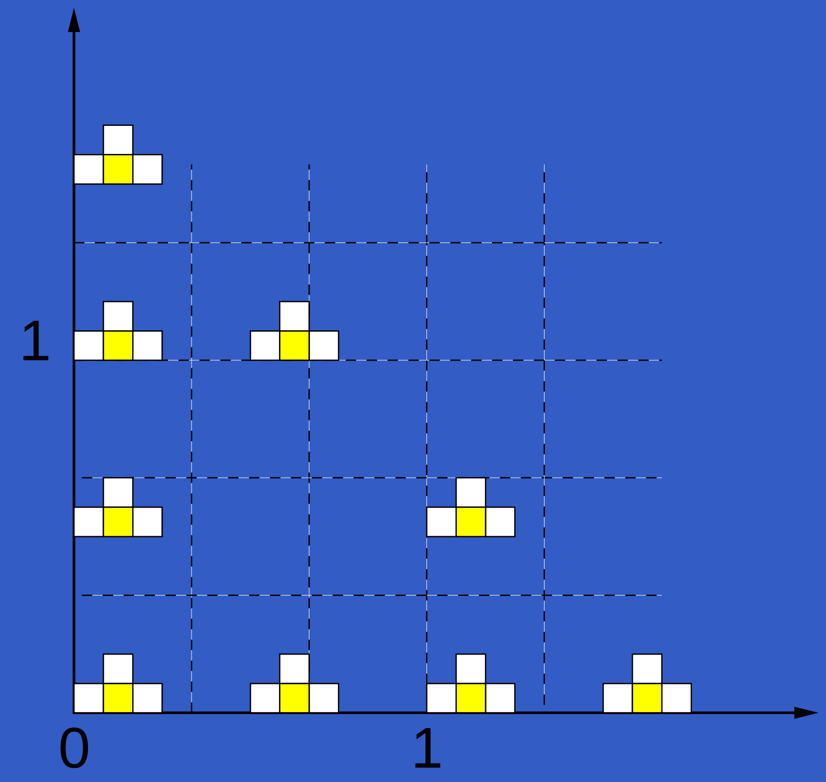
Exemplo: Transformações



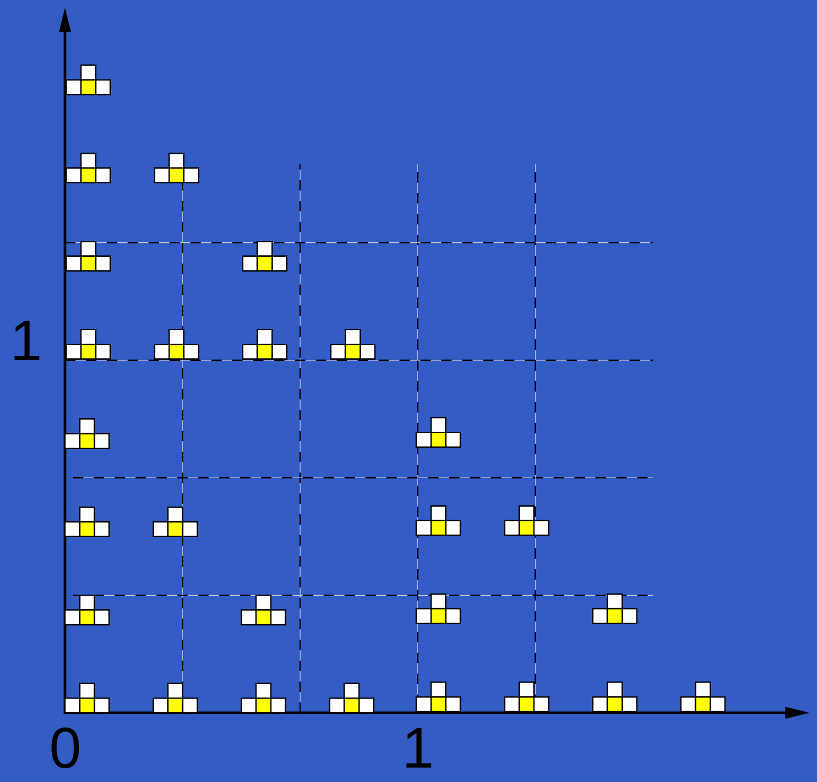
Exemplo: Transformações



Exemplo: Transformações



Exemplo: Transformações

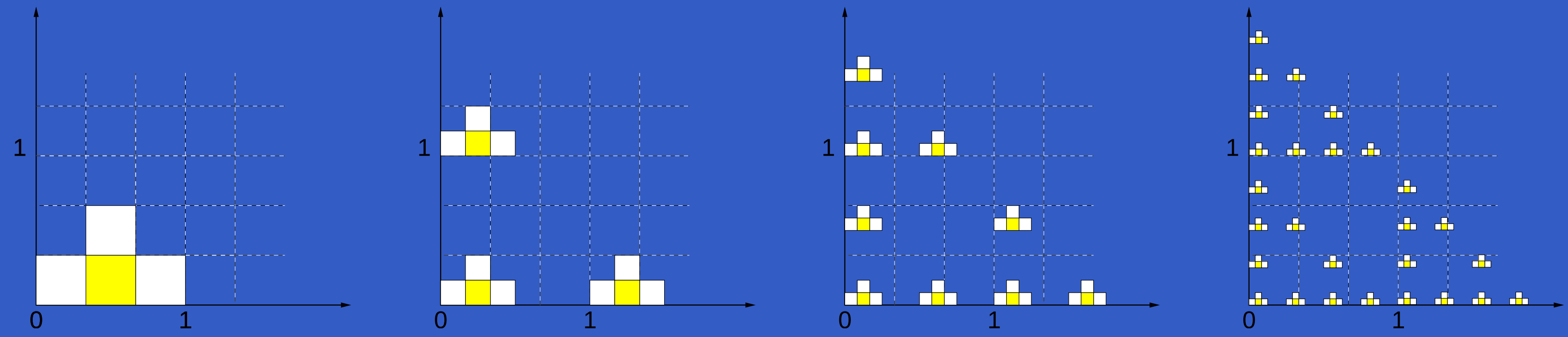


Iterando...

Se $S \subset X$, então $W(S) = \cup_{n=1}^{N} w_n(S)$.

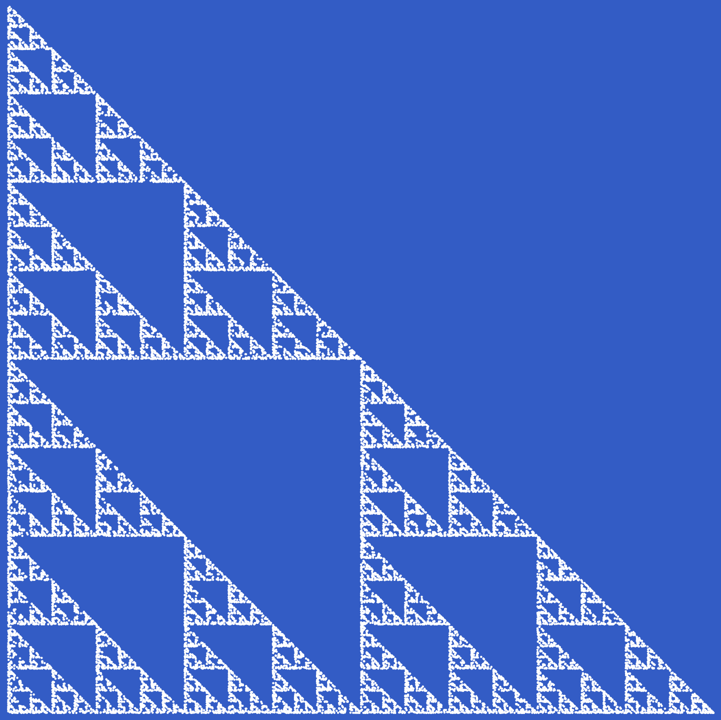
Iterando...

Se $S \subset X$, então $W(S) = \cup_{n=1}^{N} w_n(S)$.



S $\qquad W(S) \qquad W^{(2)}(S) \qquad W^{(3)}(S)$

Exemplo: Triângulo de Sierpinski



$$\mathcal{A} = \lim_{n \to \infty} W^{(n)}(S)$$

Ponto Fixo

Como

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} W^{(n)}(S)$$

Ponto Fixo

Como

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} W^{(n)}(S)$$

Temos que

$$W(\mathcal{A}) = W\left(\lim_{n\to\infty} W^{(n)}(S)\right) = \lim_{n\to\infty} W\left(W^{(n)}(S)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} W^{(n+1)}(S) = \mathcal{A}$$

Ponto Fixo

Como

$$\mathcal{A} = \lim_{n \to \infty} W^{(n)}(S)$$

Temos que

$$W(\mathcal{A}) = W\left(\lim_{n \to \infty} W^{(n)}(S)\right) = \lim_{n \to \infty} W\left(W^{(n)}(S)\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} W^{(n+1)}(S) = \mathcal{A}$$

Ou seja

$$W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

Quem será $\mathcal{A}$?

Dado um IFS, como descobrir qual será o fractal gerado?

Quem será $\mathcal{A}$?

Dado um IFS, como descobrir qual será o fractal gerado?

R: Devemos encontrar o conjunto $\mathcal{A}$ tal que $W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Transformações em $\mathbb{R}^2$

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Escalamento em $\mathbb{R}^2$

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Translações em $\mathbb{R}^2$

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Rotações em $\mathbb{R}^2$

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Reflexões em $\mathbb{R}^2$

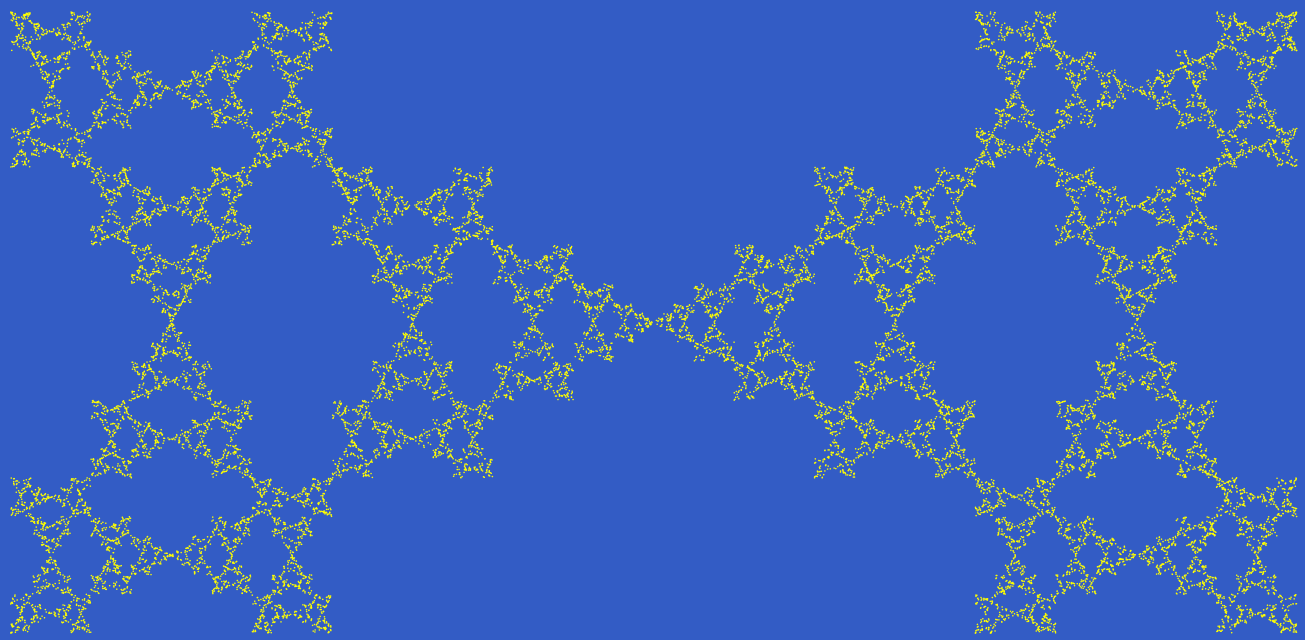
$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

n	s	θ	e	f
1	$1/2$	0	0	0
2	$1/2$	$\pi/2$	-2	0
3	$1/2$	$\pi/2$	2	0

Exemplo 2: Gravata borboleta



Quem será $\mathcal{A}$?

Dado um IFS, como descobrir qual será o fractal gerado?

R: Devemos encontrar o conjunto $\mathcal{A}$ tal que $W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Quem será o IFS?

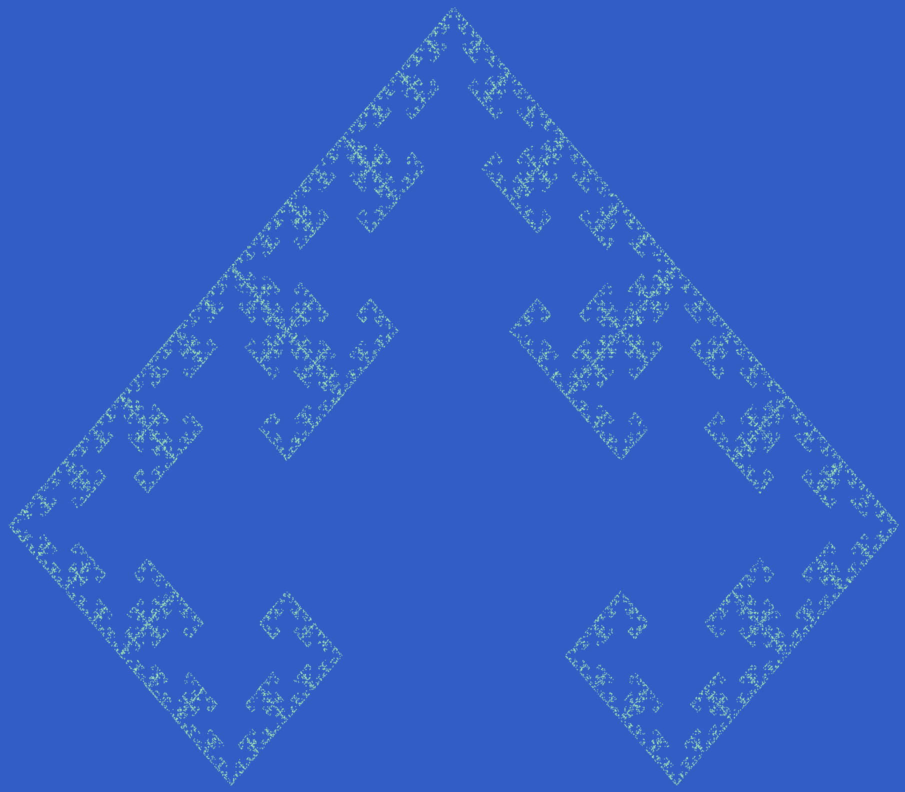
Dado $\mathcal{A}$, como descobrir um IFS que o gere?

Quem será o IFS?

Dado $\mathcal{A}$, como descobrir um IFS que o gere?

R: Devemos encontrar uma W tal que $W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Quem será?



Teorema da Colagem

Dado $\mathcal{A}$, seja W a função definida por um IFS e $\mathcal{L}$ o atrator deste IFS. Se

$$d(\mathcal{A}, W(\mathcal{A})) \leq \epsilon,$$

Então

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{L}) < \frac{\epsilon}{1-s}.$$

E agora?

- Álgebra Linear
- Espaços Métricos
- Teoria da Medida
- Sistemas Dinâmicos
- Análise Numérica

Referências

Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, 2a. ed., Academic Press, 2000.

www.ime.unicamp.br/~biloti/fractal.html

`ifsplot`

savannah.nongnu.org/projects/ifsplot