

## UM ESTUDO SOBRE A OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE USINAS HIDRELÉTRICAS

**Anibal Tavares de Azevedo<sup>1</sup>**

**Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira<sup>2</sup>**

**Carolina Janet Pastor Humpiri<sup>1</sup>**

**Secundino Soares Filho<sup>1</sup>**

*anibal@densis.fee.unicamp.br*

*aurelio@ime.unicamp.br*

*cjph@densis.fee.unicamp.br*

*dino@densis.fee.unicamp.br*

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia de Sistemas, Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Av. Albert Einstein, 400, Cidade Universitária, 13083-970, Campinas - SP - Brasil

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Praça Sérgio Buarque de Holanda, 651, Cidade Universitária, 13083-859, Campinas - SP - Brasil

**Resumo.** *No Brasil, a geração de energia elétrica é predominantemente de origem hidráulica. Devido aos múltiplos usos dos recursos hídricos como manutenção das condições de navegabilidade dos rios, controle de cheias, geração de energia elétrica, dentre outros, é necessário o uso de um planejamento da operação das usinas hidrelétricas, contemplando um horizonte de vários anos à frente. Para tanto, é construída uma Cadeia de planejamento, em que um dos problemas, que será estudado neste trabalho, está relacionado ao volume de energia a ser gerada pelas usinas hidrelétricas. Este problema é associado a um modelo matemático e métodos de resolução para o mesmo são propostos em um primeiro momento. Em um segundo momento, características das soluções do problema são utilizadas objetivando encontrar métodos mais eficientes e robustos.*

**Keywords:** *Otimização, Usinas hidrelétricas, Geração de energia elétrica*

## 1. INTRODUÇÃO

Na atual sociedade, a energia elétrica tem um amplo e importante papel. Desde a utilização para fins domésticos, até na indústria, não é possível conceber a falta deste importante insumo em qualquer atividade.

No Brasil, a geração de energia elétrica é predominantemente de origem hidráulica. De acordo com o Balanço Energético Nacional, em 2002, 80 % da energia elétrica provinha de usinas hidrelétricas. Isto demonstra a importância do gerenciamento dos reservatórios das usinas de forma a se otimizar a produção de energia, considerando restrições relativas ao volume dos reservatórios e a quantidade de água que pode ser defluída dos mesmos.

Como tal planejamento é tarefa complexa, a geração e a transmissão são consideradas por meio de uma Cadeia de Planejamento. A Cadeia de Planejamento divide o problema em dois horizontes de tempo:

- O problema da operação de longo prazo (POLP) considera aspectos hidráulicos (geração) e um horizonte anual (Carvalho et al., 1988; Cicogna, 1999; Oliveira and Soares, 1995).
- O problema da programação de curto prazo (PPCP) considera aspectos elétricos (transmissão) e horizonte de uma semana (Franco et al., 1994; Oliveira et al., 2004; Quintana et al., 2000; Soares and Salmazo, 1997).

Para resolver o POLP, os modelos matemáticos propostos por Carvalho et al. (1988); Cicogna (1999); Oliveira and Soares (1995) são utilizados. Em essência estes modelos descrevem as usinas e seus fluxos de água para vários períodos de planejamento por meio de fluxos em rede não-linear com arcos capacitados.

Neste trabalho, o estudo das características das soluções fornecidas para sistemas com uma usina e dois períodos de tempo são estudadas, estabelecendo conceitos para a busca da solução nos casos em que o problema possui um maior número de variáveis (usinas e períodos de tempo).

Na seção 2. é apresentado o modelo matemático do POLP. Na seção 3., são estudadas as características do problema que podem modificar a natureza da função objetivo. As conclusões e trabalhos futuros para a construção de métodos de solução adequados a resolução do problema são fornecidas na seção 4..

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Para resolver o problema da operação de longo prazo (POLP), uma modelagem de fluxos em redes com restrições lineares e função objetivo não-linear foi utilizada, como em (Carvalho and Soares, 1987; Cicogna, 1999; Oliveira and Soares, 1995).

Para tanto, primeiramente, os elementos constituintes de uma usina hidrelétrica são identificados na Figura 1.

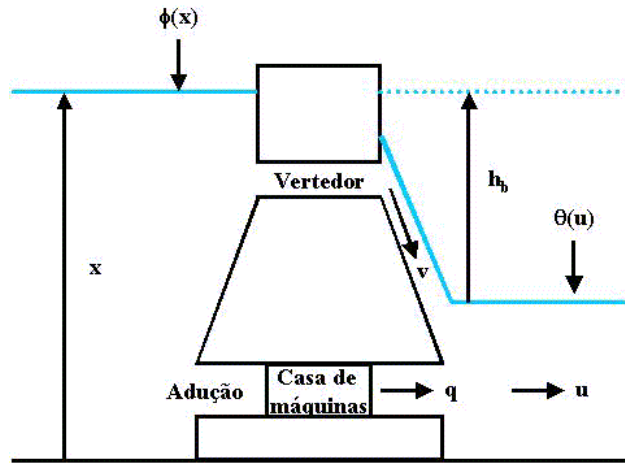
Os elementos de uma usina hidrelétrica  $i$  para um intervalo de tempo  $t$  são associados às variáveis que serão utilizadas no modelo matemático, como descrito na Fig. 2.

As variáveis da Figura 2 estão relacionadas por meio das equações dadas por (1):

$$\begin{aligned} u_{i,t} &= q_{i,t} + v_{i,t} \\ x_{i,t}^{med} &= \frac{x_{i,t-1} + x_{i,t}}{2} \\ h_{li,t} &= \phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(u_{i,t}) - pc_{i,t} \\ p_{i,t} &= k_i h_{li,t} q_{i,t}. \end{aligned} \tag{1}$$



**Figura 1:** Elementos de um usina hidrelétrica.



**Figura 2:** Grandezas de uma usina hidrelétrica.

Onde:  $i$  é o índice associado das usinas,  $t$  é o índice associado ao intervalo de tempo,  $u_{i,t}$  é a defluência,  $q_{i,t}$  é a turbinagem,  $v_{i,t}$  é o vertimento,  $x_{i,t}$  é o volume do reservatório,  $\phi$  é o polinômio de cota de montante,  $\theta$  é o polinômio de cota de jusante,  $pc_{i,t}$  é a perda de carga hidráulica,  $k_i$  é a produtibilidade específica,  $h_{bi,t}$  é a altura de queda bruta ( $h_{bi,t} = \phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(u_{i,t})$ ),  $h_{li,t}$  é a altura de queda líquida ( $h_{li,t} = h_{bi,t} - pc_{i,t}$ )

O relacionamento de uma usina com as demais usinas presentes em um mesmo aproveitamento hidráulico pode ser expresso por meio do grafo da Fig. 3.

O grafo expressa a equação de balanço energético Eq. (2) para cada usina  $i$  no período  $t$ :

$$x_{i,t} = x_{i,t-1} + \left( y_{i,t} + \sum_{k \in \Omega} u_{k,t} - u_{i,t} \right) \Delta t_t \quad (2)$$

Onde:  $\Omega$  é o conjunto de usinas à montante,  $y_{i,t}$  é vazão afluyente e  $\Delta t_t$  é o tamanho do  $t$ -ésimo intervalo de tempo.

Para ilustrar a modelagem do problema, utilizando o conceito de grafos, é construído um grafo que representa 4 usinas de um mesmo aproveitamento hidráulico, para 3 períodos de tempo, utilizando os procedimentos descritos na Fig. 4.

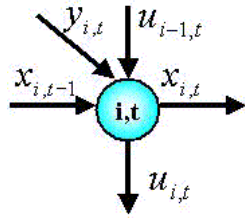


Figura 3: Grafo associado a uma usina hidrelétrica.

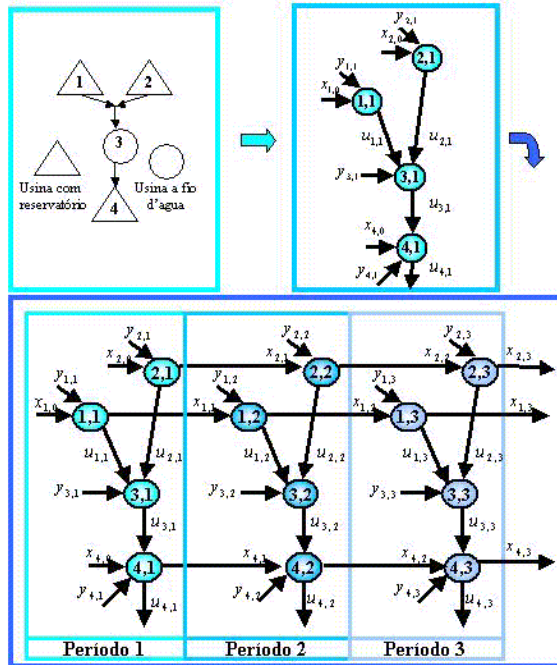


Figura 4: Grafo para 4 usinas e 3 períodos.

Além disso, os limites de capacidade dados pela Eq. (3) devem ser respeitados:

$$\begin{aligned} x_{i,t}^{min} &\leq x_{i,t} \leq x_{i,t}^{max} \\ u_{i,t}^{min} &\leq u_{i,t} \leq u_{i,t}^{max}. \end{aligned} \quad (3)$$

Onde:  $[\underline{x}_{i,t}, \bar{x}_{i,t}]$  e  $[\underline{u}_{i,t}, \bar{u}_{i,t}]$  são os limites mínimos e máximos de armazenamento e de fluência da usina  $i$  no período  $t$ , respectivamente.

A função objetivo do problema visa minimizar a complementação termelétrica que é dada pela Eq. (4):

$$\sum_{t=1}^T \left[ \Psi \left( D_t - \sum_{i=1}^I (p_{i,t}) \right) \right]. \quad (4)$$

Onde:  $D_t$  é a demanda de energia no período  $t$  e  $\Psi$  é a curva quadrática associada ao custo total de produção do parque termelétrico.

Assim, é obtido um problema de fluxos em redes não-linear com arcos capacitados, cuja formulação matricial simplificada é dada pela Eq. (5):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(\tilde{x}) \\ \text{S.a. :} \quad & A\tilde{x} = b \\ & l \leq \tilde{x} \leq u. \end{aligned} \quad (5)$$

Onde:  $\tilde{x} = [x \ u]$  e  $A = [\tilde{A} \ | \ S]$ .

Para a rede da Figura 4, as matrizes  $\tilde{A}$  e  $S$  serão dadas por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & -I & I \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Onde:  $I$  é matriz identidade  $4 \times 4$  e  $N$  é matriz de incidência nó-arco para  $u_{i,t}$ .

### 3. CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

Para desenvolver métodos de otimização eficientes para a solução do problema proposto na Eq. 5, é necessário estudar suas características.

A solução do problema sofre influências de acordo com a formulação, e esta, por sua vez, depende da função objetivo utilizada, bem como das condições de contorno.

O cálculo da função objetivo depende das seguintes considerações:

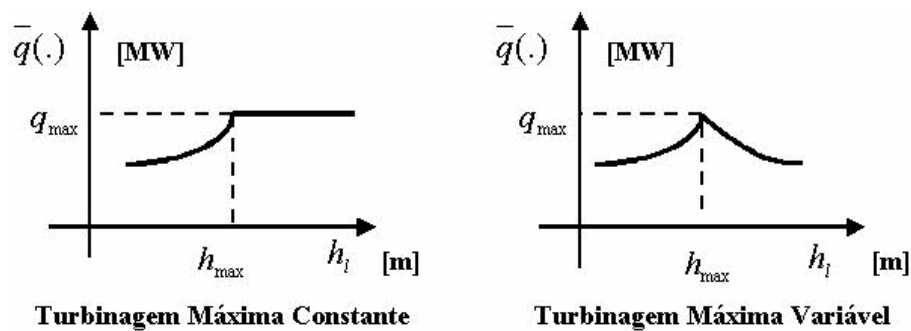
1. Turbinagem Máxima: Constante ou Variável.
2. Volume: Médio ou Instantâneo.
3. Intervalo de Tempo: Constante ou Variável.
4. Hidrologia: Média de Longo Termo (MLT) ou Histórico.

O primeiro parâmetro a ser analisado é a turbinagem máxima. A turbinagem máxima pode ser considerada constante ou variável em função da altura de queda líquida  $h_l$ , como descrito na Fig. 5.

A explicação para o comportamento ilustrado na Fig. 5 é que a operação para alturas de queda líquida menores que  $h_{max}$  faz com que a produção de energia seja limitada pela turbina.

Porém quando  $h_{max}$  é ultrapassado, a máxima produção de energia pode ser considerada:

- Constante: Este é o caso da turbinagem máxima constante.



**Figura 5:** Comparação entre turbinagem máxima constante e variável.

- Variável: Este é o caso da turbinagem máxima variável. Neste caso, é considerado que existe um limite de carga que o gerador pode receber em seu eixo. Para controlar a carga aplicada no eixo do gerador é realizado o fechamento dos ditribuidores da turbina, reduzindo o turbinamento máximo. Neste caso, a turbinagem máxima é uma função da altura de queda líquida e esta é função da defluência da usina que, por sua vez, é função da turbinagem das usinas. Para calcular a turbinagem máxima de uma usina é utilizado o procedimento descrito em (Cicogna, 1999).

O volume das usinas hidrelétricas, no cálculo da função objetivo, pode ser considerado como:

- Volume instantâneo:  $x_{i,t}$
- Volume médio:  $\bar{x}_{i,t} = \frac{x_{i,t} + x_{i,t-1}}{2}$

Uma outra informação importante é relativa ao valor de  $\Delta t_t$ . Como o horizonte de planejamento é mensal, este valor está associado ao número de dias do mês. Assim, pode ser considerado que o intervalo de tempo é:

- Constante: Ou seja, todos os meses possuem o mesmo número de dias e, portanto,  $\Delta t_t$  é sempre igual para qualquer  $t$  considerado.
- Variável: Cada mês possui um número de dias diferente, estando associado a ele um número  $\Delta t_t$  diferente para cada  $t$ .

A hidrologia fornece os valores de afluições  $y_{i,t}$  das usinas para cada período de tempo  $t$ . Os valores  $y_{i,t}$  considerados podem ser relativos a média dos dados históricos, denominado média de longo termo (MLT), ou relativo à algum período histórico, denominado histórico. O período histórico disponível é de maio de 1931 até abril de 1998, totalizando 804 meses.

As condições de contorno são relativas aos volumes iniciais e finais das usinas. Este volumes podem ser considerados como:

- Fixos: Devem atender um valor determinado do volume útil. Neste trabalho, será sempre o volume útil máximo.
- Livres: Qualquer valor entre 0% e 100% do volume útil.

**Tabela 1:** Combinações das condições de contorno dos volumes das usinas.

	Inicial Fixo	Inicial Livre
Final Fixo	Caso 1	Caso 3
Final Livre	Caso 2	Caso 4

Com estas informações é possível construir a Tabela 1. Cada caso representado na Tabela 1 possui o seguinte significado:

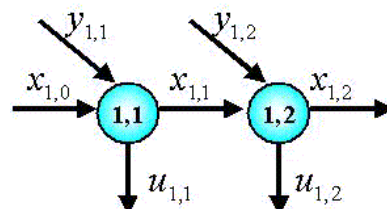
- Caso 1: Quando os valores iniciais dos volumes dos reservatórios das usinas hidrelétricas, representando o estado atual das mesmas, são dados, bem como uma meta de volume final a ser cumprida pelos reservatórios.
- Caso 2: Quando os valores iniciais dos volumes dos reservatórios das usinas hidrelétricas são dados, mas sem se ter um compromisso com uma meta de volume final dos reservatórios.
- Caso 3: Supõe que os valores iniciais dos volumes dos reservatórios das usinas hidrelétricas não são conhecidos, mas estabelece uma meta de volume final para os reservatórios.
- Caso 4: Não supõe nenhum estado inicial, nem uma meta final para os reservatórios.

Para nossos estudos, o maior interesse é relativo aos casos 1 ou 2, onde se supõe que os volumes iniciais dos reservatórios são conhecidos.

Tendo em vista a simplificação das possibilidades dos testes, o conjunto de vazões para o período histórico disponível não será considerado. Caso contrário, seria necessário, para o problema de dois períodos, testar 803 intervalos de tempo. A combinação das características apresentadas, anteriormente, fornece um total de 16 possibilidades de formulações para o problema. Para entender como será a natureza da função objetivo de acordo com cada formulação, será considerado um problema de uma usina e dois períodos de tempo.

### 3.1 Uma usina e dois períodos

O grafo de uma usina e dois períodos pode ser descrito pela Fig. 6



**Figura 6:** Grafo de uma usina e dois períodos.

Antes de prosseguir, é de extrema importância observar que ou  $u$  é variável e  $x$  depende de  $u$  ou vice-versa. Para tanto, é necessário escrever as equações de conservação de fluxo.

Escolhendo escrever  $x$  como função de  $u$  e, para melhor mostrar as propriedades das equações de fluxo, sem perda de generalidade,  $\Delta t_t = 1$ :

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= x_{1,0} + (y_{1,1} - u_{1,1}) = g(u_{1,1}) \\ x_{1,2} &= x_{1,1} + (y_{1,2} - u_{1,2}) = g(u_{1,1}, u_{1,2}) \end{aligned} \quad (7)$$

onde:  $x_{1,0}$ ,  $y_{1,1}$  e  $y_{1,2}$  são dados do problema.

Portanto, a função objetivo dada pela Eq. (4), para este caso, é uma função apenas de  $u_{1,1}$  e  $u_{1,2}$ .

Entre as dezesseis possibilidades de formulação do problema, foi escolhida aquela com as seguintes considerações:

- Turbinagem Máxima: Constante.
- Volume: Instantâneo.
- Intervalo de Tempo: Constante.
- Hidrologia: MLT de maio até junho.
- Volume inicial fixo e final livre (Caso 2).

Aplicando estas considerações a seis usinas do sistema hidrelétrico brasileiro, descritas na Tabela 2, foi verificada a existência de mais de um ponto de mínimo, para a função dada pela Eq. (4), para duas usinas.

**Tabela 2:** Mínimos, com os valores de  $u$  em  $m^3/s$ , para cada usina.

Usina	Mínimo 1			Mínimo 2		
	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$F$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$F$
Furnas	1644.29	1830.23	0.00	2290.82	1692.00	208.17
Marimbondo	1969.72	2554.35	262873.03	-	-	-
A. Vermelhas	2388.08	2814.99	51089.42	-	-	-
Emborcação	1025.86	1048.00	222.44	1075.45	1048.00	507.13
Ilha Solteira	4631.60	5691.42	2090808.91	-	-	-
Itumbiara	3151.79	3221.99	139658.40	-	-	-

Os mínimos descritos na Tabela 2 foram obtidos com o auxílio de métodos de otimização de Estratégias Evolutivas, capazes de encontrar mínimos locais (Schwefel, 1981). Foram utilizadas Estratégias Evolutivas multimembros ( $\mu, \lambda$ ) e com apenas um membro ( $1, \lambda$ ) e ( $1 + \lambda$ ) com inicialização aleatória ou fio de água e critério de parada tal que os dez últimos indivíduos sejam iguais.

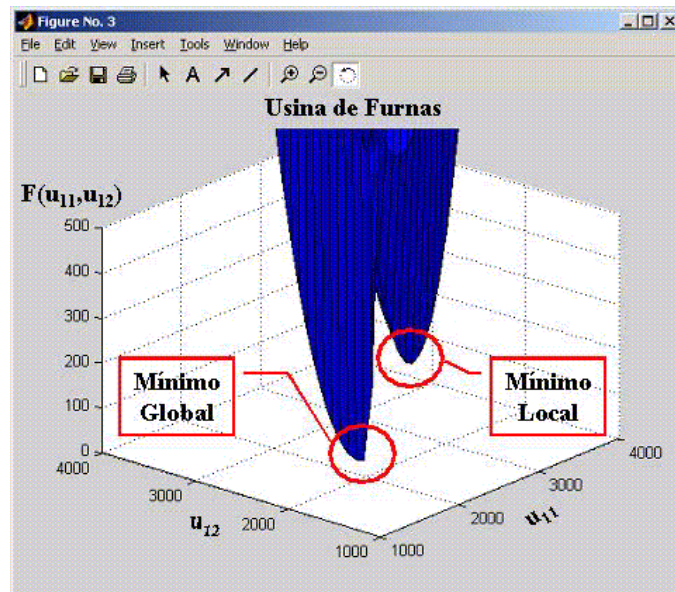
É importante destacar que analisando todos os quinze casos restantes de formulação do problema, não foi encontrada função, para as seis usinas consideradas, com mais de um mínimo.

Para melhor compreender os dois pontos de mínimos da usina de Furnas, considerando a função  $f(u_{1,1}, u_{1,2})$ , é construído o gráfico da Fig. 7.

Ao ponto de mínimo global corresponde à  $f(u_{1,1}, u_{1,2}) = 0.0$  e ao ponto de mínimo local corresponde à  $f(u_{1,1}, u_{1,2}) = 208.17$ .

Os resultados dos problemas com mais de um mínimo fornecem as seguintes interpretações físicas acerca das características das soluções:





**Figura 7:** Gráfico de  $f$  em relação à  $u_{1,1}$  e  $u_{1,2}$ .

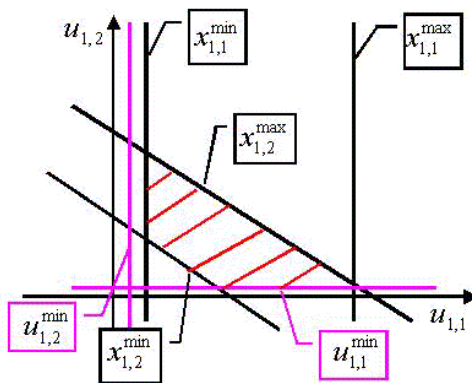
- Considerações gerais: O valor de máxima turbinagem para Furnas é  $q_{max} = 1692$  e para Emborcação é  $q_{max} = 1048$ .
- Solução Global: Para Furnas ocorre vertimento no segundo período, mas a energia gerada é menor ou igual a demanda. Para Emborcação a turbinagem máxima não é ultrapassada e a geração hidrelétrica não ultrapassa a demanda. Ou seja, a solução Global tem por característica que a energia hidrelétrica gerada é menor ou igual a demanda, podendo ou não ocorrer vertimento.
- Solução Local: Para Furnas ocorre vertimento nos dois períodos e a geração é maior que a demanda. Para Emborcação ocorre vertimento no primeiro período e a geração de energia excede a demanda no primeiro período. Ou seja, para os casos analisados, a solução Local é tal que a geração supera a demanda a ser satisfeita, sempre ocorrendo vertimento.

Uma característica presente nas duas soluções é o vertimento, indicando que, quando a capacidade da usina hidrelétrica é mais que suficiente para atender a demanda, pode ocorrer mais de um mínimo. O mínimo local, neste caso, é uma solução sem sentido físico por exigir que a produção exceda a demanda de energia.

Além dos valores da função objetivo e da interpretação física das soluções, é importante verificar se as soluções propostas são factíveis, respeitando os limites dados pela Eq. (3). Esta verificação pode ser feita graficamente.

Para tanto, é necessário projetar as restrições relativas à variável  $x$  no espaço das variáveis  $u$ . Uma representação esquemática de um gráfico, com as curvas de nível e as restrições para a usina de Furnas, está na Fig. 8

Para projetar as restrições de  $x$  em  $u$ , as equações de balanço dadas pela Eq. (2) são aplicadas à Eq. (3). Assim, os limites de  $x_{1,1}$  projetados para  $u_{1,1}$  e os limites de  $x_{1,2}$  projetados para  $u_{1,2}$  são dados pelas Eqs. (8) e (9), respectivamente:

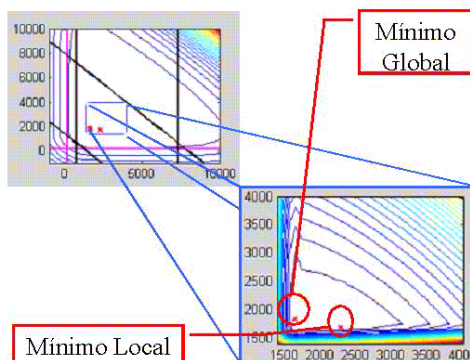


**Figura 8:** Representação esquemática de  $f$  de Furnas com restrições em  $u$  e  $x$ .

$$y_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,1}^{min}}{\Delta t_t} \geq u_{1,1} \geq y_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,1}^{max}}{\Delta t_t} \quad (8)$$

$$y_{1,1} + y_{1,2} - u_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,2}^{min}}{\Delta t_t} \geq u_{1,2} \geq y_{1,1} + y_{1,2} - u_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,2}^{max}}{\Delta t_t} \quad (9)$$

Aplicando estas projeções nas curvas de contorno da Fig. 8, a Fig. 9 é obtida.



**Figura 9:** Gráfico de  $f$  de Furnas com restrições de  $u$  e  $x$ .

A Figura 9 permite observar que os pontos de mínimo que foram encontrados para a Usina de Furnas respeitam as restrições da Eq. (3).

Se nas considerações anteriores, o volume final, ao invés de ser livre (Caso 2), for fixo (Caso 1), isto irá modificar a natureza da solução do problema.

Esta consideração trará duas modificações ao problema:

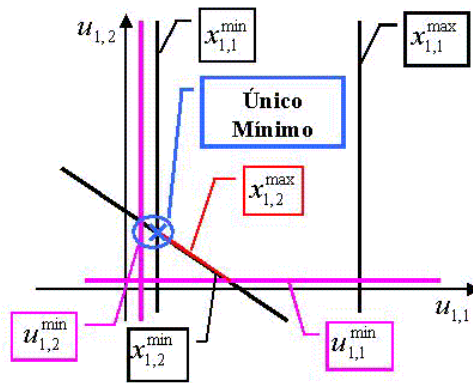
1. Se o volume final é fixo, então,  $u_{1,2}$  será fixada e apenas  $u_{1,1}$  é variável.

2. As restrições de  $u_{1,2}$  antes podiam variar entre  $u_{1,2}^{min}$  e  $u_{1,2}^{max}$ . Agora,  $u_{1,2} = u_{1,2}^{min} = u_{1,2}^{max}$ .

Uma consequência é que a Eq. (9) será substituída pela Eq. (10).

$$y_{1,1} + y_{1,2} - u_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,2}^{min}}{\Delta t_t} = u_{1,2} = y_{1,1} + y_{1,2} - u_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,2}^{max}}{\Delta t_t} \quad (10)$$

Uma análise da Eq. (10) fornece que as soluções factíveis para  $u_{1,2}$  deixaram de definir uma região limitada por duas retas e passaram a estar apenas em uma única reta, como descrito na representação esquemática da Fig. 10.



**Figura 10:** Representação esquemática das curvas de nível de  $f$  de Furnas com restrições.

Portanto, a região que contém dois mínimos é eliminada por meio da meta de volume final  $x_{1,2}^{max}$ , tal que  $f$  passa a ter apenas um ponto de mínimo localizado na reta  $u_{1,2} = y_{1,1} + y_{1,2} - u_{1,1} + \frac{x_{1,0} - x_{1,2}^{max}}{\Delta t_t}$ .

Ou seja, a projeção das restrições  $x$  no espaço de  $u$  serve como justificativa para a eliminação da possibilidade de múltiplas soluções do problema com duas variáveis. Além disso, a junção das restrições de  $x$  projetadas em  $u$ , para a Usina de Furnas, fornecem o novo único ponto de mínimo da função.

A inspiração que surge deste fato, para problemas com volume final fixo, é reescrever o problema dado pela Eq. (5), projetando as restrições relativas a  $x$  como restrições do espaço  $u$ . Para o problema de duas variáveis em questão, basta substituir as restrições em  $x$  pelas restrições descritas pela Eq. (8) e pela Eq. (9).

A nova formulação do problema, além de garantir a existência de apenas um mínimo, é tal que o comando *fmincon* do Matlab converge em um número menor de iterações. O comando *fmincon* é baseado em técnicas de programação quadrática sucessiva (Fletcher, 1987; Schittkowski, 1985).

Uma outra questão que é resolvida com a técnica de projeção das restrições é que em algumas usinas, apesar de somente apresentarem um ponto de mínimo, o *fmincon* apresenta uma solução pior do que a apresentada pelas estratégias evolutivas. Isto ocorre, porque na vizinhança do mínimo a superfície apresenta valores de gradiente muito próximos ao valor zero.

Para ilustrar o desempenho do *fmincon* com e sem projeção de  $x$  em  $u$  (identificadas pelas siglas com e sem, respectivamente), foi construída a Tabela 3. Os parâmetros utilizados foram

**Tabela 3:** Número de iterações do *fmincon* com e sem projeção de  $x$  em  $u$ .

Usina	Furnas	Marimbondo	A. Vermelhas	Emborcação	I. Solteira	Itumbiara
Sem	4	7	7	Não Conv.	7	8
Com	4	2	2	18	2	2

turbinagem máxima constante, volume médio, intervalo de tempo constante e volumes inicial fixo e final livre (Caso 1).

Pela Tabela 3, a projeção das restrições de  $x$  em  $u$  acelera a convergência de métodos exatos, como o comando *fmincon*.

### 3.2 Uma usina e doze períodos

O maior interesse nos testes com doze períodos é verificar se o procedimento de projeção das restrições de  $x$  no espaço de  $u$  acelera a convergência da solução do problema.

Considerando:

- Turbinagem Máxima: Constante.
- Volume: Médio.
- Intervalo de Tempo: Constante.
- Hidrologia: MLT de maio até abril.
- Volume inicial fixo e final fixo (Caso 1).

O tempo em segundos, usando Matlab 6.1, das estratégias evolutivas e o *fmincon* sem e com projeção de  $x$  em  $u$  (denotado pelas siglas sem e com, respectivamente), para seis usinas, é dado na Tabela 4.

**Tabela 4:** Tempo, em segundos, das EE e do *fmincon* com e sem projeção.

Usina	Furnas	Marimbondo	A. Vermelhas	Emborcação	I. Solteira	Itumbiara
EE	13.5780	13.7030	27.8740	14.1090	34.4840	14.5940
Sem	4.1410	0.9530	Não Conv.	2.6710	1.3590	3.5470
Com	0.5000	0.3910	Não Conv.	0.4220	0.4690	0.5160

Os valores de função objetivo obtidos para cada método são dados na Tabela 5.

**Tabela 5:** Valores de f.o. das EE e do *fmincon* com e sem projeção.

Usina	Furnas	Marimbondo	A. Vermelhas	Emborcação	I. Solteira	Itumbiara
EE	3909437	5723522	5244467	5979460	49138011	19433534
Sem	4144754	6079462	Não Conv.	6077844	50346536	19973178
Com	4295883	6079462	Não Conv.	6077844	50346536	19973178

Os valores da Tabela 4 indicam que a projeção das restrições de  $x$  no espaço de  $u$  aceleram a convergência do *fmincon*. Tanto assim, que o *fmincon* com projeção reduz em, no mínimo, 59% o tempo computacional do *fmincon* sem a projeção (caso da usina de Marimbondo), que por sua vez reduz, no mínimo, 70% o tempo computacional das estratégias evolutivas (caso da usina de Furnas).

As estratégias evolutivas têm seus méritos, pois conseguem resultados melhores em todas as usinas testadas, mesmo quando o *fmincon* não converge (caso da usina de Águas Vermelhas). Uma desvantagem, porém, é que maior tempo computacional não implica em um ganho substancial no valor da solução.

O *fmincon* sem projeções oferece apenas para uma usina um valor melhor de função objetivo do que o *fmincon* com projeções. Além disso, o *fmincon* sem projeções não consegue ter a mesma velocidade do *fmincon* com projeções.

A utilização de projeções acelera a convergência, mas não consegue obter a melhor solução em nenhuma das seis usinas testadas. A explicação, para que a solução com projeção possa ser maior que a sem projeção (caso da usina de Furnas), vem da forma como são construídas as restrições  $x$  no espaço de  $u$  para mais de duas variáveis.

O procedimento adotado para se construir as restrições de  $x$  no espaço de  $u$ , utiliza a notação matricial dada pela Eq. (5). Por meio desta, é possível obter a Eq. (11):

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \Rightarrow \tilde{A}x^{min} \leq b - Su \leq \tilde{A}x^{max} \Rightarrow b - \tilde{A}x^{min} \geq Su \geq b - \tilde{A}x^{max} \quad (11)$$

Porém, se fossem construídas de acordo com as restrições dadas por Eq. (8) e Eq. (9), fica clara a necessidade de se ter os valores de  $u_{1,1}, \dots, u_{1,t-1}$ , (onde  $t$  é o número de períodos considerados) para a construção de uma nova formulação. Porém, antes de iniciar o processo de otimização, os valores de  $u_{1,1}, \dots, u_{1,t-1}$  não são conhecidos. A Equação (11) contorna este problema ao se utilizar apenas de valores conhecidos como  $x_{1,1}^{min}, \dots, x_{1,t}^{min}$  e  $x_{1,1}^{max}, \dots, x_{1,t}^{max}$ . A equação (12), que é uma equação de conservação, exemplifica o motivo pelo qual isto pode ser feito:

$$x_{1,1} = x_{1,0} + (y_{1,1} - u_{1,1})\Delta t \Rightarrow x_{1,1}^{min} \leq x_{1,0} + (y_{1,1} - u_{1,1})\Delta t \leq x_{1,1}^{max} \quad (12)$$

Utilizando a Eq. (12), a Eq. (9) será substituída pela Eq. (13):

$$y_{1,2} + \frac{x_{1,1}^{min} - x_{1,2}^{min}}{\Delta t} \geq u_{1,2} \geq y_{1,2} + \frac{x_{1,1}^{max} - x_{1,2}^{max}}{\Delta t} \quad (13)$$

Portanto, a Eq. (11) ao invés de usar a equação de balanço, usa os limitantes inferiores e superiores relativos a  $x$ , obtendo uma minoração do valor máximo e uma majoração do valor mínimo das restrições de  $x$  projetadas no espaço de  $u$ .

Como a função objetivo do problema (dada pela Eq. 5) é de minimização, então, para problemas com mais de dois períodos, apenas  $Su \geq b - \tilde{A}x^{max}$  é considerada.

Considerar  $x^{max}$  em  $Su \geq b - \tilde{A}x^{max}$ , significa que, no mínimo, uma solução, cujos volumes do reservatório da usina estão no máximo (solução à fio de água), será obtida.

Da situação anterior, modificamos apenas a condição de volume final fixo para volume final livre (Caso 2), obtendo as Tabelas 6 e 7.

Por meio destas tabelas, fica visível o melhor desempenho, sempre, das EE em relação ao valor da função objetivo encontrado. Neste sentido o *fmincon* com ou sem restrições de  $x$  e  $u$  apresenta soluções cujo valor de função objetivo é muito próximo. Em relação ao tempo computacional, *fmincon* com restrições, na maioria dos casos, apresenta o melhor desempenho.

**Tabela 6:** Tempo, em segundos, das EE e do *fmincon* com e sem projeção, Caso 2.

Usina	Furnas	Marimbondo	A. Vermelhas	Emborcação	I. Solteira	Itumbiara
EE	35.7490	32.8580	41.0920	34.4680	49.5770	37.8270
Sem	Não Conv.	1.9690	Não Conv.	7.1870	2.2350	5.4060
Com	Não Conv.	1.1560	Não Conv.	7.4850	1.2500	3.5630

**Tabela 7:** Valores de f.o. das EE e do *fmincon* com e sem projeção, Caso 2.

Usina	Furnas	Marimbondo	A. Vermelhas	Emborcação	I. Solteira	Itumbiara
EE	1838985	5703124	5241053	4912715	49138009	18419837
Sem	Não Conv.	6079462	Não Conv.	6019742	50346536	19973178
Com	Não Conv.	6079462	Não Conv.	6019742	50346536	19973178

#### 4. Conclusões e Trabalhos Futuros

Para os problemas que tenham o volume inicial e final fixos, o método de projeção de restrições de  $x$  no espaço de  $u$  conjugado com o comando *fmincon* oferece o melhor desempenho computacional, sem sacrificar muito a qualidade da solução encontrada ou pela EE ou pelo *fmincon* sem restrições.

Para problemas de grande porte, como os problemas relacionados ao conjunto de usinas hidrelétricas do Brasil, esta pode ser uma informação extremamente valiosa.

Uma idéia que surge é de, no futuro, conjugar a robustez das EE com melhoria de tempo computacional propiciada pela projeção de restrições de  $x$  no espaço de  $u$ .

No caso de se aumentar o desempenho dos métodos testados, ou mesmo outros que possam ser testados, é importante explorar a estrutura esparsa do problema dada pela Eq. (6).

Para os problemas com volume inicial fixo e volume final livre, as EE mostraram indiscutível superioridade, em termos de qualidade de solução, para todos os casos. Novamente, o *fmincon* com restrições é aquele que apresenta melhor desempenho computacional e sem perda na qualidade do valor da função objetivo oferecida por *fmincon* sem restrições.

Como trabalhos futuros, ainda, existem as seguintes sugestões:

- Verificar se outras usinas oferecem mais de um mínimo para qualquer uma das configurações aqui descritas.
- Expandir a análise gráfica para duas variáveis (dois períodos) para problemas com mais de duas variáveis (como por exemplo doze períodos).
- Generalizar a projeção para várias usinas e períodos.
- Estabelecer uma analogia do problema com dois mínimos para outros problemas reais e fornecer uma interpretação física para a existência de dois ou mais mínimos.
- Encontrar outras formas de se estimar o limitante inferior  $Su \geq b - \tilde{A}x^{max}$ .
- Testar projeção de restrições de  $x$  em  $u$  utilizando  $Su \geq b - \tilde{A}(\delta x^{max})$ , onde  $\delta$  é um escalar variando de 1 até 0, verificando a qualidade das soluções obtidas.

## Agradecimentos

Este trabalho contou com o suporte financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## Referências

- Carvalho, M. & Soares, S., 1987. An efficient hydrothermal scheduling algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 2, n. 3, pp. 537–542.
- Carvalho, M. F., Soares, M. F., & Ohishi, T., 1988. Optimal active power dispatch by network flow approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 3, n. 3, pp. 1640–1647.
- Cicogna, M., 1999. Modelo de planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos a usinas individualizadas orientado por objetos. Tese de Mestrado da FEEC - UNICAMP - Campinas.
- Fletcher, R., 1987. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and Sons.
- Franco, P., Carvalho, M. F., & Soares, S., 1994. A network flow model for short-term hydro-dominated hydrothermal scheduling problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, pp. 1016–1021.
- Oliveira, A., Soares, S., & Nepomuceno, L., 2004. Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches. Aceito para publicação na *Electrical Power & Energy Systems*.
- Oliveira, G. & Soares, S., 1995. A second-order network flow algorithm for hydrothermal scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10, n. 3, pp. 1635–1641.
- Quintana, V. H., Torres, G. L., & Medina-Palomo, J., 2000. Interior point methods and their applications to power systems: a classification of publications and software. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, pp. 170–176.
- Schittkowski, K., 1985. Nlqpl: A fortran-subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research*, vol. 5, pp. 485–500.
- Schwefel, H. P., 1981. *Numerical Optimization of Computer Models*. Wiley.
- Soares, S. & Salmazo, C. T., 1997. Minimum loss predispatch model for hydroelectric systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 12, pp. 1220–1228.