

**CILAMCE**



Ouro Preto/MG - Brazil

**2003**

**XXIV IBERIAN LATIN-AMERICAN  
CONGRESS ON COMPUTATIONAL  
METHODS IN ENGINEERING**

# APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO AC UTILIZANDO COORDENADAS CARTESIANAS

**Aurelio R. L. Oliveira**

Departamento de Matemática Aplicada – IMECC

Universidade Estadual de Campinas, 13083-859, Campinas - SP, Brazil

*aurelio@ime.unicamp.br*

**Adriano Thomaz**

**Secundino Soares**

Departamento de Engenharia de Sistemas – FEEC

Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas - SP, Brazil

*adriano@denfis.fee.unicamp.br*

*dino@denfis.fee.unicamp.br*

**Abstract.** *The primal-dual interior point method are developed to the AC optimal power flow problem and the resulting matricial structure is studied. A representation of the voltage through cartesian coordinates is adopted, once that Hessian of the problem is constant and the expansion in Taylor is accurate for the second order term. The advantage of working with polar coordinates, that easily shape the voltage magnitudes, lose importance due to the efficient treatment of inequalities proportionated by the interior point methods. These methods is developed applying Newton's methods to the optimality conditions of the problem. Before the application of the method, the number of variables of the problem is reduced through the elimination of free dual variables. This reduction does not modify the sparse structure of the problem. The linear system obtained can be reduced the dimension of twice number of buses. Moreover, such matrix is symmetric in structure. This feature can be explored reducing the computational effort per iteration.*

**Keywords:** *Optimal power flow, Interior point methods, Nonlinear programming*

## 1. INTRODUÇÃO

O problema de fluxo de potência ótimo é um problema de programação não-linear de grande porte não convexo. Torna-se complicado na prática pela presença de variáveis discretas. Dada sua importância no planejamento e operação de sistemas de potência, os problemas de fluxo de potência ótimo têm sido assunto de intensa pesquisa.

As ferramentas de planejamento e operação de redes elétricas precisam trabalhar com problemas com alto grau de não-linearidade no comportamento do sistema.

Uma técnica mais recentemente utilizada para a resolução de problemas de fluxo de potência ótimo de grande porte AC é a dos métodos de pontos interiores (Momoh, El-Hawary & Adapa, 1999, Quintana, Torres & Medina-Palomo, 2000).

Problemas de programação não-linear têm sido resolvidos eficientemente pelos métodos de pontos interiores para programação não-linear derivados da abordagem de função barreira logarítmica. Embora tenha sido desenvolvida para resolver problemas de programação não-linear em geral, foi no campo da programação linear que sua excelente eficiência computacional foi primeiramente demonstrada e amplamente aceita (Adler et al, 1989, Mehrotra, 1992).

## 2. PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO AC

O problema de fluxo de potência ótimo AC é um dos mais importantes na área de sistemas de potência, servindo como base para diversas outras aplicações. Uma dificuldade que este problema apresenta é instabilidade numérica proveniente dos métodos de solução tradicionais. Os métodos de pontos interiores trouxeram à tona uma nova linha de pesquisa na área de sistemas de potência (Granville, 1994, Oliveira, Nepomuceno & Soares, 2003, Oliveira, Nepomuceno & Soares, 2001, Oliveira & Soares, 2000).

Esses métodos são reconhecidos atualmente por sua robustez (Momoh, El-Hawary & Adapa, 1999, Quintana, Torres & Medina-Palomo, 2000). Além disso, o tratamento eficiente de desigualdades permite uma revisão dos procedimentos geralmente adotados.

### 2.1 Motivação

A tensão (complexa) da barra ( $\underline{E}$ ) é definida em coordenadas cartesianas como  $\underline{E} = r + js$ , onde  $r$  e  $s$  são os componentes real e imaginário de ( $\underline{E}$ ) respectivamente.

Optou-se pela utilização de coordenadas cartesianas para as tensões pois desta forma, tanto as restrições do problema como as funções objetivos porventura adotadas são quadráticas. Conseqüentemente, as matrizes do problema são mais fáceis de trabalhar e o cálculo do termo de correção do método preditor-corretor pode ser feito de forma menos custosa do ponto de vista computacional. Outra vantagem é que a Hessiana do problema é constante e a expansão em Taylor é exata para o termo de ordem dois.

Finalmente, a vantagem em se trabalhar com coordenadas polares, que modelam mais facilmente os limites de magnitude de tensão, perde importância devido ao tratamento de desigualdades eficiente proporcionado pelos métodos de pontos interiores (Momoh, El-Hawary & Adapa, 1999, Quintana, Torres & Medina-Palomo, 2000).

### 2.2 Formulação do Problema

O problema de fluxo de potência ótimo com coordenadas cartesianas pode então ser escrito da seguinte forma, onde as equações são dadas pela formulação do fluxo de potência apresentado anteriormente e pela representação do fluxo entre as linhas de transmissão e as inequações

representam a canalização de variáveis.

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \frac{1}{2}p^t H p + c^t p \\
& \text{sujeito a} && RGr + SGs + SBr - RBs = p - l_p \\
& && SGr - RGs - RBr - SBs = q - l_q \\
& && v^{\min} \leq r^2 + s^2 \leq v^{\max} \\
& && f_{km} = g_{km}(r_k^2 + s_k^2 - r_k r_m - s_k s_m) + b_{km}(r_k s_m - r_m s_k) \\
& && p^{\min} \leq p \leq p^{\max} \\
& && q^{\min} \leq q \leq q^{\max} \\
& && f^{\min} \leq f \leq f^{\max},
\end{aligned} \tag{1}$$

onde:

$G$  representa a matriz de condutância;

$B$  representa a matriz de susceptância;

$p$  representa a geração de potência ativa;

$q$  representa a geração de potência reativa;

$f_{km}$  representa o fluxo de potência ativa da linha  $k$  para a linha  $m$ ;

$g_{km}$  representa a parte real da admitância entre as linhas  $k$  e  $m$ ;

$b_{km}$  representa a parte imaginária da admitância entre as linhas  $k$  e  $m$ ;

$H$  matriz diagonal representando o termo quadrático do custo de geração;

$c$  representa a componente linear do custo de geração;

$l_p$  representa as demandas de potência ativa;

$l_q$  representa as demandas de potência reativa;

$v^{\min}$  e  $v^{\max}$  são os limites de tensão ao quadrado;

$p^{\min}$  e  $p^{\max}$  são os limites de geração de potência ativa;

$q^{\min}$  e  $q^{\max}$  são os limites de geração de potência reativa;

$f^{\min}$  e  $f^{\max}$  são os limites de fluxo de potência ativa.

A minimização das perdas na geração é utilizada como critério de otimização. Essas perdas podem ser modeladas como uma função quadrática separável tanto para geradores térmicos representando os custos, como hidrelétricos representando as perdas (Soares & Salmazo, 1997). Vale ressaltar que outras funções objetivo podem ser adotadas sem muitas alterações no desenvolvimento apresentado a seguir.

### 2.3 Simplificação da Matriz Hessiana

No mesmo espírito de obter Hessianas mais fáceis de trabalhar utilizando as coordenadas cartesianas, optou-se por acrescentar a restrição  $r^2 + s^2 = v$ , onde  $v$  representa o quadrado da magnitude da tensão. Assim, as equações:

$$v^{\min} \leq r^2 + s^2 \leq v^{\max} \quad \text{e} \quad f_{km} = g_{km}(r_k^2 + s_k^2 - r_k r_m - s_k s_m) + b_{km}(r_k s_m - r_m s_k),$$

são substituídas por:

$$v^{\min} \leq v \leq v^{\max} \quad \text{e} \quad f_{km} = g_{km}(v^2 - r_k r_m - s_k s_m) + b_{km}(r_k s_m - r_m s_k),$$

transformando um conjunto de restrições em canalização de variáveis e simultaneamente, simplificando outro conjunto de restrições.

Apesar deste modelo conter um conjunto adicional de variáveis e restrições, as derivadas são mais simples e a Hessiana obtida no desenvolvimento dos métodos de pontos interiores mais esparsa.

### 3. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

A aplicação do método de Newton às condições de otimalidade leva a um método de pontos interiores primal-dual específico para este modelo. As condições de otimalidade por sua vez podem ser obtidas através da função lagrangiana do problema onde as restrições de desigualdade são representadas por funções de barreira logarítmicas das variáveis de folga.

Para simplificar o desenvolvimento do método, vamos considerar um problema onde cada barra pode gerar potência ativa e reativa e está diretamente conectada a todas as outras barras. Desta forma, a representação do fluxo entre as linhas pode ser escrita da seguinte forma:

$$f = VG - RGR - SGS + RBS - SBR.$$

Uma vez desenvolvido o método, basta considerar os elementos de  $f$  que representam linhas de transmissão existentes no sistema em estudo preservando assim a esparsidade do problema.

Na prática é muito comum resolver problemas desconsiderando os fluxos nas linhas de transmissão, pois as restrições têm utilidade somente para verificar as capacidades das linhas. Esta representação do modelo pode ser facilmente alterada caso não existam muitas linhas carregadas.

Com o objetivo de reduzir o número de variáveis do problema, antes de construir a função lagrangiana, vamos fazer uma mudança de variáveis de tal forma que todos os limites inferiores das variáveis canalizadas sejam anulados. O modelo adotado pode ser então escrito da seguinte forma, onde as variáveis de folga para os limites superiores também são acrescentadas:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \phi(p) \\
 &\text{sujeito a} && RGr + SGs + SBr - RBs - p = -l_p \\
 & && SGr - RGs - RBr - SBs - q = -l_q \\
 & && VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f = l_f \\
 & && r^2 + s^2 - v = l_v \\
 & && p + s_p = p^{\max} \\
 & && q + s_q = q^{\max} \\
 & && f + s_f = f^{\max} \\
 & && v + s_v = v^{\max} \\
 & && (p, q, f, v, s_p, s_q, s_f, s_v) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

onde  $\phi(p) = \frac{1}{2}p^tHp + c^tp$  e, por abuso de notação, utilizamos os mesmos símbolos para representar os vetores antes e depois das mudanças de variáveis.

#### 3.1 Função Barreira Logarítmica

Para tratar as restrições de desigualdade das variáveis no método de pontos interiores, utiliza-se funções de barreira logarítmica (Wright, 1996) que são adicionadas à função objetivo:

$$\phi(p) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \tag{3}$$

onde  $x = (p, q, f, v, s_p, s_q, s_f, s_v)$ ,  $n$  é a dimensão do vetor  $x$  e  $\mu > 0$  representa o parâmetro de barreira.

### 3.2 A Função Lagrangiana

A função lagrangiana da Eq. (2) com a barreira logarítmica Eq. (3) é dada por (Luenberger, 1984):

$$L(r, s, x, l) = \phi(p) - \mu \sum \ln(x_i) + l^t L_d(x), \quad (4)$$

onde  $l^t = (y_p, y_q, y_f, y_v, w_p, w_q, w_f, w_v)$  representa os multiplicadores de Lagrange e,

$$L_d(x) = \begin{pmatrix} RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p \\ SGr - RGs - RBr - SBs - q + l_q \\ VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f \\ r^2 + s^2 - v - l_v \\ p + s_p - p^{max} \\ q + s_q - q^{max} \\ f + s_f - f^{max} \\ v + s_v - v^{max} \end{pmatrix}.$$

Uma solução de Eq. (2) deve satisfazer  $\nabla_{(r,s,x,l)} L = 0$ , ou seja,  $\nabla_l L = L_d(x) = 0$  e:

$$\begin{aligned} \nabla_p L &= Hp + c - \mu P^{-1}e - y_p + w_p, & \nabla_{sp} L &= -\mu S_p^{-1}e + w_p, \\ \nabla_q L &= -\mu Q^{-1}e - y_q + w_q, & \nabla_{sq} L &= -\mu S_q^{-1}e + w_q, \\ \nabla_f L &= -\mu F^{-1}e - y_f + w_f, & \nabla_{sf} L &= -\mu S_f^{-1}e + w_f, \\ \nabla_v L &= Gy_f - \mu V^{-1}e - y_v + w_v, & \nabla_{sv} L &= -\mu S_v^{-1}e + w_v, \\ \nabla_r L &= \nabla_r L_p^t y_p + \nabla_r L_q^t y_q + \nabla_r L_f^t y_f + 2Ry_v, \\ \nabla_s L &= \nabla_s L_p^t y_p + \nabla_s L_q^t y_q + \nabla_s L_f^t y_f + 2Sy_v, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} L_p &= RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p, \\ L_f &= VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f, \\ L_q &= SGr - RGs - RBr - SBs - q + l_q, \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{aligned} \nabla_r L_p^t &= GR + \text{diag}(Gr) + BS - \text{diag}(Bs), \\ \nabla_s L_p^t &= GS + \text{diag}(Gs) - BR + \text{diag}(Br), \\ \nabla_r L_q^t &= GS - \text{diag}(Gs) - BR - \text{diag}(Br), \\ \nabla_s L_q^t &= -GR + \text{diag}(Gr) - BS - \text{diag}(Bs). \end{aligned}$$

E para  $\nabla_r L_f^t$  e  $\nabla_s L_f^t$  considere o termo  $\tilde{L} = RCS$  onde  $C$  é uma matriz constante. Então:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial r_i} = \begin{bmatrix} \text{diag}(Ce_{i-1}S_{i-1}) \\ \text{diag}(Ce_i S_i) \\ \text{diag}(Ce_{i+1}S_{i+1}) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial s_i} = \begin{bmatrix} (CE_{i-1})^t R \\ (CE_i)^t R \\ (CE_{i+1})^t R \end{bmatrix},$$

onde  $E_i = \text{diag}(e_i)$ ,  $i = 1, \dots, NB$ .

Com isso podemos construir as expressões de  $\nabla_r L_f^t$  e  $\nabla_s L_f^t$ , pois  $L_f$  é composto de combinações de termos similares a  $\tilde{L}$ , se ignorarmos aqueles independentes de  $r$  e  $s$ . Além dessas relações, devemos ter  $x \geq 0$  o que implica  $(w_p, w_q, w_f, w_v) \geq 0$ .

Para obter um método estritamente primal-dual resta ainda definir as variáveis de folga duais:

$$z_p = \mu P^{-1}e, \quad z_q = \mu Q^{-1}e, \quad z_f = \mu F^{-1}e, \quad z_v = \mu V^{-1}e.$$

Estas variáveis também são não-negativas por definição.

### 3.3 Eliminação de Variáveis Livres $y$

É possível aplicar o método de pontos interiores primal-dual diretamente ao sistema não-linear proveniente do reescalamento dos conjuntos de equações referentes às condições de complementaridade, que corresponde às condições de otimalidade de primeira ordem do problema Eq. (2). No entanto, parece ser mais aconselhável eliminar as variáveis  $y$  do sistema antes da aplicação do método. As variáveis  $y$  podem ser eliminadas trivialmente através das equações:

$$\begin{aligned} y_p &= Hp + c - z_p + w_p, & y_q &= w_q - z_q, \\ y_f &= w_f - z_f, & y_v &= Gy_f - z_v + w_v = Gy_f + \tilde{y}_v. \end{aligned}$$

Obtendo o seguinte sistema:

$$\left( \begin{array}{c} RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p \\ SGr - RGS - RBr - SBs - q + l_q \\ VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f \\ r^2 + s^2 - v - l_v \\ p + s_p - p^{max} \\ q + s_q - q^{max} \\ f + s_f - f^{max} \\ v + s_v - v^{max} \\ -\mu e + Pz_p \\ -\mu e + Qz_q \\ -\mu e + Fz_f \\ -\mu e + Vz_v \\ \nabla_r L_p^t(Hp + c - z_p + w_p) + \nabla_r L_q^t(w_q - z_q) + \tilde{\nabla}_r L_f^t(w_f - z_f) + 2R(w_v - z_v) \\ \nabla_s L_p^t(Hp + c - z_p + w_p) + \nabla_s L_q^t(w_q - z_q) + \tilde{\nabla}_s L_f^t(w_f - z_f) + 2S(w_v - z_v) \\ -\mu e + S_p w_p \\ -\mu e + S_q w_q \\ -\mu e + S_f w_f \\ -\mu e + S_v w_v \end{array} \right) = 0 \quad (5)$$

com  $(x, t) \geq 0$ , onde  $\tilde{\nabla}_r L_f^t = \nabla_r L_f^t + 2RG$  e  $\tilde{\nabla}_s L_f^t = \nabla_s L_f^t + 2SG$ .

### 3.4 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Dada uma classe de problemas, a forma padrão para desenvolver um método de pontos interiores consiste na aplicação do método de Newton (Dennis & Schnabel, 1996) às condições de otimalidade, desconsiderando as restrições de capacidade.

A convergência do método a uma solução é obtida partindo-se de um ponto estritamente positivo e nunca permitindo que estas variáveis se tornem negativas. Este controle é realizado através do tamanho do passo. O método resultante é essencialmente um método primal-dual específico para esta classe de problemas (El-Bakry et al, 1996).

O método de pontos interiores primal-dual para o problema Eq. (2) consiste portanto, na aplicação do método de Newton à Eq. (5) desconsiderando as restrições de não-negatividade  $(x, t) \geq 0$ . Esta aplicação resulta no seguinte método:

#### Método 1 (Método de Pontos Interiores)

Dados  $(x^0, t^0) > 0$  e  $(r^0, s^0)$  livres.

Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , faça:

(1) Escolha:  $\beta^k \in (0, 1)$  e faça  $\mu^k = \beta^k \left( \frac{\gamma^k}{n} \right)$ , onde  $\gamma^k = (x^k)^t t^k$  e  $n$  é a dimensão do vetor  $x$ .

(2) Calcule as direções de Newton:  $\Delta x^k$  e  $\Delta t^k$ .

(3) Calcule o tamanho do passo para permanecer em um ponto interior:

$$\alpha_p^k = \frac{-\tau^k}{\min_i \left\{ \frac{\Delta x_i^k}{x_i^k} \right\}} \quad e \quad \alpha_d^k = \frac{-\tau^k}{\min_i \left\{ \frac{\Delta t_i^k}{t_i^k} \right\}} \quad \text{para } \tau^k \in (0, 1) \text{ e } \alpha^k = \min \{1, \alpha_p^k, \alpha_d^k\}.$$

(4) Calcule o novo ponto:  $(x^{k+1}, t^{k+1}) = (x^k, t^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta t^k)$ .

### Direções de Newton

As direções de Newton são definidas pelo seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p + \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s = r_1 \\ -\Delta q + \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s = r_2 \\ -\Delta f + G \Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s = r_3 \\ -\Delta v + 2R \Delta r + 2S \Delta s = r_4 \\ \Delta p + \Delta s_p = r_5 \\ \Delta q + \Delta s_q = r_6 \\ \Delta f + \Delta s_f = r_7 \\ \Delta v + \Delta s_v = r_8 \\ Z_p \Delta p + P \Delta z_p = r_9 \\ Z_q \Delta q + Q \Delta z_q = r_{10} \\ Z_f \Delta f + F \Delta z_f = r_{11} \\ Z_v \Delta v + V \Delta z_v = r_{12} \\ \nabla_r L_p^t (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_r L_q^t (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_r L_f^t (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2R (\Delta w_v - \Delta z_v) + M \Delta r + N \Delta s = r_{13} \\ \nabla_s L_p^t (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_s L_q^t (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_s L_f^t (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2S (\Delta w_v - \Delta z_v) - N \Delta r + M \Delta s = r_{14} \\ W_p \Delta s_p + S_p \Delta w_p = r_{15} \\ W_q \Delta s_q + S_q \Delta w_q = r_{16} \\ W_f \Delta s_f + S_f \Delta w_f = r_{17} \\ W_v \Delta s_v + S_v \Delta w_v = r_{18} \end{array} \right. \quad (6)$$

onde:

$$M = GY_p + Y_p G - (BY_q + Y_q B) + GY_f + 2\tilde{Y}_v, \quad N = BY_p - Y_p B + GY_q - Y_q G + BY_f,$$

e os resíduos de  $r_1$  a  $r_{18}$  são dados pela aplicação do ponto corrente  $(x, t)$  ao lado esquerdo do sistema de equações Eq. (5) com o sinal trocado.

## 4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para a implementação foram utilizados alguns parâmetros e variáveis, como a precisão, representada por  $\epsilon$ , o número de barras de geração  $NG$ , número de barras com limites de geração de potência reativa  $NH$  e também representamos o número total de barras por  $NB$ .

### 4.1 Atualização das Variáveis

As novas variáveis primais e duais são calculadas da seguinte maneira:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \Delta x \quad e \quad t^{k+1} = t^k + \alpha^k \Delta t, \quad (7)$$

onde o escalar  $\alpha^k \in (0, 1]$  é o parâmetro de comprimento do passo.

## 4.2 Cálculo do Comprimento do Passo

O comprimento máximo do passo  $\alpha^k$  é determinado por:

$$\alpha_p^{k\max} = \min_{\Delta x_i^k < 0} \left\{ \frac{-x_i^k}{\Delta x_i^k} \right\}, \quad \alpha_d^{k\max} = \min_{\Delta t_i^k < 0} \left\{ \frac{-t_i^k}{\Delta t_i^k} \right\}, \quad \alpha^k = \min \{ \tau \alpha_p^{k\max}; \tau \alpha_d^{k\max}; 1, 0 \}.$$

O escalar  $\tau \in (0, 1)$  é um fator de segurança para assegurar que o próximo ponto satisfará as condições estritas de positividade. Pode-se notar que na descrição do Método 1, o cálculo do comprimento do passo é realizado de uma forma diferente da apresentada nessa seção. A forma utilizada no método é uma forma mais econômica de se calcular o passo, ambas levam ao mesmo resultado.

## 4.3 Redução do Parâmetro de Barreira

O resíduo das condições de complementaridade  $\gamma$ , chamado *gap de complementaridade*, na  $k$ -ésima iteração é:

$$\gamma^k = (x^k + \Delta x^k)^t \cdot (t^k + \Delta t^k). \quad (8)$$

A seqüência  $\{\gamma^k\}_{k=0}^{\infty}$  deve convergir pra zero, e a relação entre  $\gamma^k$  e  $\mu^k$ , implícita nas condições de KKT, sugerem que  $\mu^k$  poderia ser reduzido baseado numa diminuição prevista do gap de complementaridade, como:

$$\mu^{k+1} = \beta^k \frac{\gamma^k}{2 \cdot (NG + NH)}. \quad (9)$$

O parâmetro  $\beta^k \in (0, 1)$  é chamado de *parâmetro de centralização* e é interpretado como segue. Se  $\beta^k = 1$ , as condições de KKT definem uma direção de centralização, um passo de Newton em direção ao ponto na trajetória da barreira. Por outro lado,  $\beta^k = 0$  temos o passo de Newton puro, conhecido como direção afim-escala. Para redução do  $\mu^k$  e melhorar a centralização,  $\beta^k$  é dinamicamente escolhido como  $\beta^k = \max\{0, 95\beta^{k-1}; 0, 1\}$ , com  $\beta^0 = 0, 2$ .

## 4.4 Critério de Convergência

As iterações do método são consideradas terminadas quando:

$$erro = \max \{ \nu_n^k, \hat{\gamma}^k \} \leq \epsilon, \quad (10)$$

sendo  $\nu_n^k$  em função das normas relativas dos resíduos e  $\hat{\gamma}^k$  o gap relativo à função objetivo, que são calculados da seguinte maneira:

$$\nu_n^k = \max \left\{ \frac{\|rp^k\|}{np^k}, \frac{\|rq^k\|}{nq^k}, \frac{\|rv^k\|}{nv}, \frac{\|rsp^k\|}{npu}, \frac{\|rsq^k\|}{nqu}, \frac{\|rsv^k\|}{nvu}, \frac{\|rr^k\|}{nc}, \frac{\|rs^k\|}{nc} \right\},$$

$$\hat{\gamma}^k = \left| \frac{\gamma^k}{1 + |2 \cdot \phi(p^k)|} \cdot \frac{1}{nnn} \right| \quad (11)$$

onde:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 10^{-3}, & npu &= 1 + \|p^{\max}\|, \\ np^k &= 1 + \|p^k\| + \|r^k\| + \|s^k\|, & nqu &= 1 + \|q^{\max}\|, \\ nq^k &= 1 + \|q^k\| + \|r^k\| + \|s^k\|, & nvu &= 1 + \|v^{\max}\|, \\ nv &= 1 + \left\| v^{\min^2} \right\|, & nnn &= 2 \cdot (NG + NH + NB), \\ nc &= 1 + \|H + c\|, \end{aligned}$$

e os resíduos:

$$\begin{aligned}
rp &= p + l_p - RGr - SGs - SBr + RBs, & rsp &= p^{\max} - p - s_p, \\
rq &= q + l_q - SGr + RGs + RBr + SBs, & rsq &= q^{\max} - q - s_q, \\
rv &= v^{\min^2} - r^2 - s^2 + v, & rsv &= v^{\max} - v - s_v, \\
rr &= -2Ry_v - \nabla_r L_p^t y_p - \nabla_r L_q^t y_q, & rs &= -2Sy_v - \nabla_s L_p^t y_p - \nabla_s L_q^t y_q.
\end{aligned}$$

## 5. RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

O sistema linear da Eq. (6) pode ser resolvido diretamente. No entanto, é mais vantajoso reduzir a dimensão do sistema através da eliminação das variáveis de folga sem modificar sua estrutura esparsa (Oliveira, Nepomuceno & Soares, 2003). Substituindo as variáveis de folga primais:

$$\Delta s_p = r_5 - \Delta p, \quad \Delta s_q = r_6 - \Delta q, \quad \Delta s_f = r_7 - \Delta f, \quad \Delta s_v = r_8 - \Delta v,$$

e as variáveis de folga duais:

$$\begin{aligned}
\Delta z_p &= P^{-1}(r_9 - Z_p \Delta p), & \Delta w_p &= S_p^{-1}(r_{15} + W_p(\Delta p - r_5)), \\
\Delta z_q &= Q^{-1}(r_{10} - Z_q \Delta q), & \Delta w_q &= S_q^{-1}(r_{16} + W_q(\Delta q - r_6)), \\
\Delta z_f &= F^{-1}(r_{11} - Z_f \Delta f), & \Delta w_f &= S_f^{-1}(r_{17} + W_f(\Delta f - r_7)), \\
\Delta z_v &= V^{-1}(r_{12} - Z_v \Delta v), & \Delta w_v &= S_v^{-1}(r_{18} + W_v(\Delta v - r_8)),
\end{aligned}$$

o sistema linear se reduz a:

$$\begin{cases}
-\Delta p + \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s = r_1 \\
-\Delta q + \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s = r_2 \\
-\Delta f + G \Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s = r_3 \\
-\Delta v + 2R \Delta r + 2S \Delta s = r_4 \\
\nabla_r L_p^t D_p \Delta p + \nabla_r L_q^t D_q \Delta q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f \Delta f + 2RD_v \Delta v + M \Delta r + N \Delta s = r_a \\
\nabla_s L_p^t D_p \Delta p + \nabla_s L_q^t D_q \Delta q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f \Delta f + 2SD_v \Delta v - N \Delta r + M \Delta s = r_b,
\end{cases} \quad (12)$$

onde:

$$\begin{aligned}
r_a &= r_{13} + \nabla_r L_p^t r_p + \nabla_r L_q^t r_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t r_f + 2Rr_v, & r_p &= P^{-1}r_9 + S_p^{-1}(W_p r_5 - r_{15}), \\
r_b &= r_{14} + \nabla_s L_p^t r_p + \nabla_s L_q^t r_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t r_f + 2Sr_v, & r_q &= Q^{-1}r_{10} + S_q^{-1}(W_q r_6 - r_{16}), \\
r_f &= F^{-1}r_{11} + S_f^{-1}(W_f r_7 - r_{17}), & r_v &= V^{-1}r_{12} + S_v^{-1}(W_v r_8 - r_{18}), \\
D_p &= P^{-1}Z_p + S_p^{-1}W_p + H, & D_f &= F^{-1}Z_f + S_f^{-1}W_f, \\
D_q &= Q^{-1}Z_q + S_q^{-1}W_q, & D_v &= V^{-1}Z_v + S_v^{-1}W_v.
\end{aligned}$$

Somente inversas de matrizes diagonais são envolvidas nestas substituições. As substituições de variáveis encontradas na literatura terminam neste ponto e o equivalente ao sistema da Eq. (12) é resolvido. No entanto, a eliminação das variáveis de geração ativa e reativa, fluxo de potência e tensão:

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s - r_1, & \Delta f &= G \Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s - r_3, \\
\Delta q &= \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s - r_2, & \Delta v &= 2R \Delta r + 2S \Delta s - r_4,
\end{aligned} \quad (13)$$

resulta em:

$$\begin{cases}
A_{rr} \Delta r + A_{rs} \Delta s = \tilde{r}_a \\
A_{sr} \Delta r + A_{ss} \Delta s = \tilde{r}_b,
\end{cases} \quad (14)$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_{rr} &= M + \nabla_r L_p^t D_p \nabla_r L_p + \nabla_r L_q^t D_q \nabla_r L_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f \tilde{\nabla}_r L_f + 4RD_v R, \\
A_{rs} &= N + \nabla_r L_p^t D_p \nabla_s L_p + \nabla_r L_q^t D_q \nabla_s L_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f \tilde{\nabla}_s L_f + 4RD_v S, \\
A_{sr} &= -N + \nabla_s L_p^t D_p \nabla_r L_p + \nabla_s L_q^t D_q \nabla_r L_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f \tilde{\nabla}_r L_f + 4SD_v R, \\
A_{ss} &= M + \nabla_s L_p^t D_p \nabla_s L_p + \nabla_s L_q^t D_q \nabla_s L_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f \tilde{\nabla}_s L_f + 4SD_v S, \\
\tilde{r}_a &= r_a + \nabla_r L_p^t D_p r_1 + \nabla_r L_q^t D_q r_2 + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f (r_3 + Gr_4) + 2RD_v r_4, \\
\tilde{r}_b &= r_b + \nabla_s L_p^t D_p r_1 + \nabla_s L_q^t D_q r_2 + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f (r_3 + Gr_4) + 2SD_v r_4.
\end{aligned}$$

Estas últimas substituições Eq. (13) alteram a estrutura matricial do sistema de forma mais radical. A esparsidade dos blocos matriciais envolvidos é, até antes desta última transformação Eq. (14), determinada pelas linhas da rede de transmissão onde cada linha corresponde a um elemento não nulo nas matrizes envolvidas. Uma vez que os novos blocos matriciais são formados por produtos dos blocos anteriores, eles correspondem a uma rede onde novas linhas surgem entre barras que se encontram a uma distância de comprimento dois na rede original.

Essa abordagem parece ser indicada para sistemas reais, pois o enchimento da matriz é relativamente pequeno e como veremos a seguir, a matriz do sistema linear Eq. (14) tem propriedades interessantes.

## 5.1 Estrutura Matricial

O sistema de equações linear Eq. (14) pode ser mais facilmente estudado ao ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\left[ \begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_r L_p^t & 0 \\ 0 & \nabla_s L_p^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_p & D_p \\ D_p & D_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_r L_p & 0 \\ 0 & \nabla_s L_p \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \begin{pmatrix} \nabla_r L_q^t & 0 \\ 0 & \nabla_s L_q^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_q & D_q \\ D_q & D_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_r L_q & 0 \\ 0 & \nabla_s L_q \end{pmatrix} + \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_r L_f^t & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}_s L_f^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_f & D_f \\ D_f & D_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_r L_f & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}_s L_f \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \left. 4 \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_v & D_v \\ D_v & D_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_a \\ \tilde{r}_b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cada uma das quatro últimas matrizes do lado esquerdo deste sistema linear é simétrica semidefinida positiva. A primeira matriz é bloco antissimétrica e definida positiva, se e somente se,  $M$  é uma matriz definida positiva pois:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^t M a + b^t M b,$$

para quaisquer vetores  $a$  e  $b$  de dimensão apropriada.

A existência de quatro matrizes semidefinidas positiva indica que o sistema resultante deve permanecer numericamente estável ao longo das iterações dos métodos de pontos interiores em comparação com a matriz do sistema linear Eq. (12). Além disso, embora não seja uma matriz simétrica, sua estrutura esparsa é simétrica, proporcionando a resolução do sistema linear de forma mais eficiente que para matrizes assimétricas em geral.

## 6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

### 6.1 Implementação e Ambiente

A implementação desse trabalho foi feita inicialmente em MATLAB versão 5.3.0 (R11) e migrada para linguagem C. Testes com o sistema IEEE30 foram feitos utilizando quatro esquemas de limitantes de tensão nas barras, pois dessa forma poderia-se analisar com mais detalhes o comportamento do sistema sob um forte controle e restrição, e isso pode ser realizado devido a uma boa estrutura do modelo. Os esquemas utilizados são mostrados na Tabela 1.

**Tabela 1:** Limites de tensão (pu)

limite	L-A	L-B	L-C	L-D
inferior	0,90	0,94	0,98	0,99999
superior	1,10	1,06	1,02	1,00001

### 6.2 Análises

Pode-se observar que o programa convergiu para todos os esquemas, nota-se também que o tempo computacional para a resolução desse sistema foi muito pequeno. Estão também dispostos na Tabela 2 o número de iterações necessárias e o número de operações realizadas para a convergência do método.

**Tabela 2:** Iterações, função objetivo, tempo, flops, erro e gap de complementaridade relativo

esquema	iterações	$\phi$	tempo (s)	flops	erro	$\hat{\gamma}$
L-A	4	0,901	0,047	98906	$0,9697 \times 10e-1$	$0,8532 \times 10e-1$
L-B	4	0,899	0,047	98594	$0,9774 \times 10e-1$	$0,8331 \times 10e-1$
L-C	6	0,450	0,078	146187	$0,8341 \times 10e-1$	$0,1957 \times 10e-1$
L-D	10	0,718	0,125	245115	$0,9104 \times 10e-1$	$0,2169 \times 10e-3$

Os esquemas de limites L-A, L-B e L-D, resultaram valores de *erro* muito próximo (veja Tabela 2). Ao passo que os valores de  $\hat{\gamma}$  ficaram bastante reduzidos nos esquemas L-C e L-D em comparação com os outros, resultado de uma maior restrição nos limites de tensão e geração de potência ativa nas barras.

### Potência Ativa

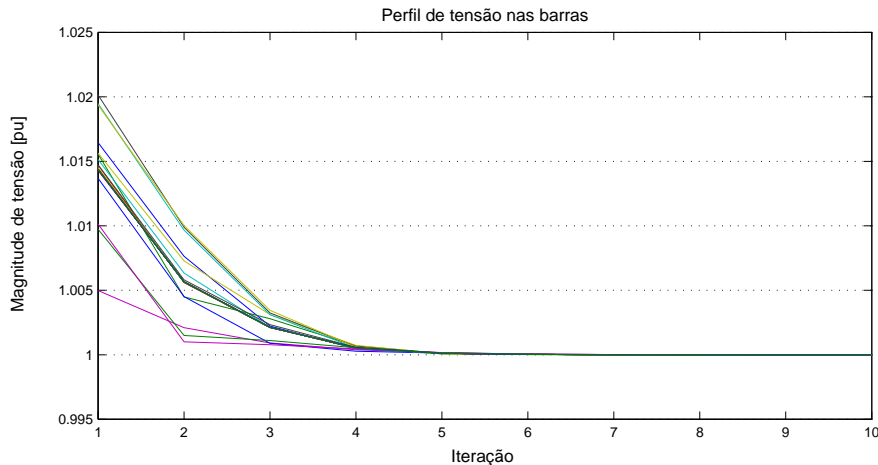
Os resultados finais da injeção de potência ativa nas barras de geração podem ser vistos na Tabela 3.

**Tabela 3:** Geração de potência ativa (pu)

barra	L-A	L-B	L-C	L-D
1	0,549	0,548	0,384	0,480
2	0,563	0,562	0,391	0,478
5	0,555	0,555	0,394	0,488
8	0,536	0,537	0,383	0,496
11	0,543	0,543	0,386	0,497
13	0,542	0,542	0,386	0,495

## Tensão

A tensão nas barras, obtida ao final das iterações, podem ser observadas na Tabela 4, onde a barra 1 é a barra de referência do sistema. No gráfico da Fig. 1 pode-se ter uma visualização da evolução da tensão nas barras através das iterações para o esquema L-D, onde inicialmente estão fora dos limites e são forçadas a 1,0 pu pela restrição imposta pelo esquema.



**Figura 1:** Tensão nas barras (pu) (L-D)

**Tabela 4:** Tensão nas barras (pu)

barra	L-A	L-B	L-C	L-D	barra	L-A	L-B	L-C	L-D
1*	1,005	1,000	0,996	1,000	16	1,005	1,002	1,000	1,000
2	1,011	1,006	1,009	1,000	17	1,005	1,002	1,000	1,000
3	1,006	1,002	1,000	1,000	18	1,005	1,002	1,000	1,000
4	1,007	1,003	0,999	1,000	19	1,005	1,002	1,000	1,000
5	0,998	0,995	1,000	1,000	20	1,005	1,002	1,000	1,000
6	1,006	1,002	0,998	1,000	21	1,005	1,002	1,000	1,000
7	1,008	1,006	1,000	1,000	22	1,005	1,002	1,000	1,000
8	1,006	1,003	1,002	1,000	23	1,005	1,002	1,000	1,000
9	1,001	0,997	0,991	1,000	24	1,005	1,002	1,000	1,000
10	1,007	1,003	1,001	1,000	25	1,005	1,002	1,000	1,000
11	1,012	1,008	1,010	1,000	26	1,005	1,002	1,000	1,000
12	1,002	0,998	0,991	1,000	27	1,006	1,002	1,001	1,000
13	1,012	1,008	1,010	1,000	28	1,006	1,002	1,000	1,000
14	1,005	1,002	1,000	1,000	29	1,005	1,002	1,000	1,000
15	1,005	1,001	1,000	1,000	30	1,005	1,002	1,000	1,000

## Fluxo e Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão

Na Tabela 5 mostra-se os valores para o fluxo e para as perdas de potência ativa nas linhas resultado da utilização do esquema L-D.

## 7. CONCLUSÕES

Os resultados indicam que os métodos de pontos interiores são promissores para esta classe de problemas. Pode-se observar que as iterações do método são rápidas. Esta velocidade é obtida através da redução do sistema linear via eliminação de variáveis, resultando em um sistema cuja dimensão corresponde a duas vezes o número de barras do problema original.

A utilização de coordenadas cartesianas contribuiu para o desenvolvimento do método fornecendo Jacobianas menos complexas e contribuindo também para a exploração mais eficiente

**Tabela 5:** Fluxos e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão (pu)

linha		fluxo	fluxo	perdas
(índice)	(k-m)	(k-m)	(m-k)	
1	1-2	0,2773	-0,2757	$0,1580 \times 10e-2$
2	1-3	0,6163	-0,6084	$0,7894 \times 10e-2$
3	2-4	0,1346	-0,1338	$0,8671 \times 10e-3$
4	3-4	0,01214	-0,01213	$0,8653 \times 10e-5$
5	2-5	0,3287	-0,3237	$0,4998 \times 10e-2$
6	2-6	0,1465	-0,1455	$0,1014 \times 10e-2$
7	4-6	0,05061	-0,05057	$0,3313 \times 10e-4$
8	5-7	-0,1338	0,1346	$0,8755 \times 10e-3$
9	6-7	0,02033	-0,0203	$0,2332 \times 10e-4$
10	6-8	-0,0375	0,03759	$0,8915 \times 10e-4$
11	6-9	-0,004969	0,004971	$0,1411 \times 10e-5$
12	6-10	-0,006363	0,006366	$0,2343 \times 10e-5$
13	9-11	-1,128	1,166	$0,3795 \times 10e-1$
14	9-10	-0,002997	0,002998	$0,2588 \times 10e-6$
15	4-12	0,006619	-0,006618	$0,1312 \times 10e-5$
16	12-13	-0,1264	0,1264	0,0
17	12-14	0,0001006	-0,0001006	0,0
18	12-15	0,0001957	-0,0001957	0,0
19	12-16	0,0004284	-0,0004284	0,0
20	14-15	0,0004809	-0,0004809	0,0
21	16-17	0,00166	-0,00166	0,0
22	15-18	0,0006443	-0,0006443	0,0
23	18-19	0,00066	-0,0006599	$0,2946 \times 10e-7$
24	19-20	0,0002488	-0,0002488	$0,5675 \times 10e-8$
25	10-20	-0,003928	0,003929	$0,1977 \times 10e-6$
26	10-17	-0,002434	0,002434	$0,6968 \times 10e-7$
27	10-21	-0,001511	0,001511	$0,2730 \times 10e-7$
28	10-22	-0,001972	0,001972	$0,4599 \times 10e-7$
29	21-22	-0,000101	0,000101	$0,5191 \times 10e-9$
30	15-23	0,00022	-0,00022	0,0
31	22-24	-0,001035	0,001036	$0,1179 \times 10e-6$
32	23-24	0,0006103	-0,0006103	$0,2374 \times 10e-7$
33	24-25	-0,004222	0,004223	$0,7945 \times 10e-6$
34	25-26	$-0,8774 \times 10e-4$	$0,8774 \times 10e-4$	$0,6175 \times 10e-8$
35	25-27	-0,000811	0,0008111	$0,1091 \times 10e-6$
36	28-27	0,001998	-0,001997	$0,1360 \times 10e-5$
37	27-29	-0,0003001	0,0003001	$0,2478 \times 10e-7$
38	27-30	-0,0003371	0,0003372	$0,3129 \times 10e-7$
39	29-30	-0,0001232	0,0001232	$0,1250 \times 10e-8$
40	8-28	0,03509	-0,03502	$0,6595 \times 10e-4$
41	6-28	-0,0134	0,01341	$0,1098 \times 10e-4$

da estrutura matricial resultante. A estrutura da modelagem permitiu a imposição de fortes restrições à algumas variáveis sem o aumento do tempo e operações de ponto flutuante, contribuindo para um melhor resultado no gap relativo e mantendo o erro dentro do limite desejável.

Estes métodos podem ser implementados para resolver problemas de grande porte e problemas sob condições mais restritas. Para isso é necessário um melhor aproveitamento da estrutura esparsa dos problemas e também um estudo mais detalhado sobre a obtenção de parâmetros e pontos iniciais adequados.

### Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo e pelo CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

## Referências

- Adler, I., Resende, M. G. C., Veiga, G. & Karmarkar, N., 1989, “An implementation of Karmarkar’s algorithm for linear programming”, *Mathematical Programming*, 44, pp. 297–335.
- Dennis, J. E. & Schnabel, R. B., 1996, “Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations”, SIAM, Philadelphia, PA.
- El-Bakry, A. S., Tapia, R. A., Tsuchiya, T. & Zhang, Y., 1996, “On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89, pp. 507–541.
- Fiacco, A. V. & McCormick, G. P., 1968, “Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques”, John Wiley, New York.
- Frisch, K. R., 1955, “The logarithmic potential method of convex programming”, memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway.
- Golub, G. H. & Van Loan, C. F., 1996, “Matrix Computations”, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- Gondzio, J., 1997, “Presolve analysis of linear programming prior to applying an interior point method”, *ORSA Journal on Computing*, 9, pp. 73–91.
- Granville, S., 1994, “Optimal reactive power dispatch through interior point methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, 9, pp. 136–146.
- Luenberger, D. G., 1984, “Linear and Nonlinear Programming”, Addison-Wesley, Reading.
- Lustig, I. J., Marsten, R. E. & Shanno, D. F., 1992, “On implementing Mehrotra’s predictor-corrector interior point method for linear programming”, *SIAM J. Optimization*, 2, pp. 435–449.
- Martinez, J. M. & Santos, L. T., 1998, “Some new theoretical results on recursive quadratic programming algorithms”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97, pp. 435–454.
- Mehrotra, S., 1992, “On the implementation of a primal-dual interior point method”, *SIAM Journal on Optimization*, 2, pp. 575–601.
- Momoh, J. A., El-Hawary, M. E. & Adapa, R., 1999, “A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II Newton, linear programming and interior point methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, 14, pp. 105–111.
- Monteiro, R. D. C., Adler, I. & Resende, M. G. C., 1990, “A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension”, *Mathematics of Operations Research*, 15, pp. 191–214.
- Monticelli, A. J., 1983, “Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica”, Edgard Blücher, São Paulo.
- Oliveira, A. R. L., Nepomuceno, L. & Soares, S., 2001, “Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches”, Trabalho submetido à *Electrical Power & Energy Systems*.

- Oliveira, A. R. L., Nepomuceno, L. & Soares, S., 2003, "Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches", Aceito para publicação, IEEE Transactions on Power Systems.
- Oliveira, A. R. L. & Soares, S., 2000, "Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo", Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática, em CD-ROM, Florianópolis, SC, aceito para publicação na SBA: Controle & Automação na condição de artigo convidado, pp. 790–795.
- Quintana, V. H., Torres, G. L. & Medina-Palomo, J., 2000, "Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes", IEEE Transactions on Power Systems, 15, pp. 170–176.
- Soares, S. & Salmazo, C. T., 1997, "Minimum loss predispatch model for hydroelectric systems", IEEE Transactions on Power Systems, 12, pp. 1220–1228.
- Tapia, R. A. & Zhang, Y., 1992, "Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited", Journal of Optimization Theory and Applications, 73, pp. 229–242.
- Vanderbei, R. J., 1996, "Linear Programming – Foundations and Extensions", Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.
- Wright, S. J., 1996, "Primal–Dual Interior–Point Methods", SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA.