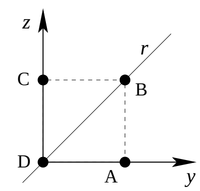
Nome: ____ R.A.: __________

MA141 % **2ª Prova** (13/05/2005)

Todas as respostas devem ser justificadas. Contra-exemplos são especialmente bem vindos.
Boa prova.

1. (2,5 pontos) A diagonal BD do quadrado $ABCD$ está contida na reta $r : \vec{X} = (1,0,0) + \lambda(0,1,1)$. Sabendo que $A = (1,1,0)$, determine os outros três vértices.

A reta r e o ponto A pertencem ao plano $\pi : x = 1$. Logo, $\overline{ABCD} \in \pi$. A figura ao lado mostra o problema como visto sobre o plano π, de onde se conclui que $B = (1,1,1)$, $C = (1,0,1)$ e $D = (1,0,0)$.



2. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja também $\vec{B}_i = Col_i\, A$ o vetor correspondente a i-ésima coluna de A. Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas e justifique suas escolhas.

(a) (1 Ponto) A matriz A não tem inversa.
Falso, *como se pode ver, por exemplo, calculando-se $det(A) = 1$.*

(b) (1 Ponto) Os vetores $\vec{B}_i = Col_i\, A^2$, sendo $A^2 = A \cdot A$, são linearmente dependentes.
Falso, *como se pode ver, por exemplo, calculando-se $det(A^2) = det^2(A) = 1$.*

(c) O sistema linear $x\vec{B}_1 + y\vec{B}_2 + z\vec{B}_3 = \vec{V}$:

i. (1 Ponto) tem sempre alguma solução, para qualquer $\vec{V}$;
Falso. *Para $\vec{V} = \vec{B}_4$, por exemplo, o sistema não tem solução.*

ii. (1 Ponto) tem infinitas soluções para $\vec{V} = 0$;
Falso. *Os vetores $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ e $\vec{B}_3$ são L.I., logo o sistema admite somente a solução trivial.*

iii. (1 Ponto) tem solução única para $\vec{V} = \vec{B}_4$.
Falso, *veja item* (c)i *acima.*

3. (2,5 Pontos) Determine o volume do cubo cujas faces opostas estão contidas nos planos:

$\pi_1 :\ 4x + 2y - 4z = 1,$

$\pi_2 :\ 2x + y - 2z = 1.$

Os planos são paralelos e têm como vetor normal $\vec{N} = (2,1,-2)$. Sejam $P = (0,1/2,0) \in \pi_1$ e $Q = (0,1,0) \in \pi_2$. Sabe-se que

$$dist(\pi_1,\pi_2) = \left|\left|\mathrm{Proj}_{\vec{N}}\overrightarrow{PQ}\right|\right| = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{N}\right|}{||\vec{N}||} = \frac{|(2,1,-2)\cdot(0,1/2,0)|}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = \frac{1}{6}.$$

4. (2,0 pontos) Identifique e esboce a cônica dada, em coordendas polares, por

$$r = \frac{2}{1 + 3\cos\theta}.$$

Trata-se de uma hipérbole, o problema é equivalente ao 5.2.2(a) do Texto 1.

5. (2,5 pontos) Considere a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

(a) Escreva, em coordenadas cartesianas, a equação da superfície $\mathcal{H}_x$ obtida por revolução em torno do eixo x. Encontre uma parametrização para esta superfície.

A superfície é um hiperbolóide de duas folhas com equação $x^2 - y^2 - z^2 = 1$. Uma possível parametrização para $\mathcal{H}_x$ é $(\pm\cosh(\tau), \operatorname{senh}\tau \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh}\tau \cos\theta)$, $\tau \in (-\infty, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) Idem para $\mathcal{H}_y$, o caso de revolução em torno do eixo y.

A superfície é um hiperbolóide de uma folha com equação $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Uma possível parametrização para $\mathcal{H}_y$ é $(\cosh\tau \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh}\tau, \cosh\tau \cos\theta)$, $\tau \in (-\infty, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

(c) Mostre que, em qualquer ponto P_0 de $\mathcal{H}_y$, existe sempre uma reta passando por P_0 e inteiramente contida em $\mathcal{H}_y$.

A equação de $\mathcal{H}_y$ pode ser fatorada como $(x+y)(x-y) = (1-z)(1+z)$. Daí, vê-se claramente que o sistema

$$\begin{cases} x + y = k(1+z) \\ k(x-y) = 1 - z \end{cases}$$

sendo k uma constante arbitrária, implica na equação de $\mathcal{H}_y$, o que significa que a reta solução do sistema está inteiramente contida em $\mathcal{H}_y$, para qualquer $(x, y, z) \in \mathcal{H}_y$. As soluções destes sistema são as famílias de retas $\left(\frac{k^2+1}{2k}, \frac{k^2-1}{2k}, 0\right) + \lambda\left(\frac{k^2-1}{2k}, \frac{k^2+1}{2k}, 1\right)$, que são uma parametrização (regrada) de $\mathcal{H}_y$. Introduzindo-se $k = \tan\theta$, esta parametrização fica $(\operatorname{cosec}\theta + \lambda\operatorname{cotan}\theta, \operatorname{cotan}\theta + \lambda\operatorname{cossec}\theta, \lambda)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

(d) O mesmo é verdade para $\mathcal{H}_x$? Por que?

Não é verdade, já que $\mathcal{H}_x$ tem duas partes desconexas, sendo impossível que uma reta esteja inteiramente contida em $\mathcal{H}_x$.