GABARITO PROVA 1 - MA 449

1. (2.5) Considere a função f dada por $f(\theta) = |\theta|$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, periódica de período 2π.

   (a) Calcule os coeficientes de Fourier de f.
   Solução: Por definição os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

   Como f é par segue que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}2\int_{0}^{\pi} \theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

   Seja $n \neq 0$. Usando a definição de f e integração por partes obtemos

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\theta)e^{-in\theta}d\theta + \int_{0}^{\pi}\theta e^{-in\theta}d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left((-\theta)\frac{e^{-in\theta}}{-in}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}(-1)\frac{e^{-in\theta}}{-in}d\theta + \theta\frac{e^{-in\theta}}{-in}\Bigg|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{e^{-in\theta}}{-in}d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi\frac{(-1)^n}{in} + \frac{e^{-in\theta}}{(-in)^2}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \pi\frac{(-1)^n}{in} - \frac{e^{-in\theta}}{(-in)^2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi\frac{(-1)^n}{in} + \frac{1-(-1)^n}{(-in)^2} - \pi\frac{(-1)^n}{in} - \frac{(-1)^n - 1}{(-in)^2}\right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

   Portanto, $\hat{f}(0) = \pi/2$, $\hat{f}(n) = 0$ se $n \neq 0$ é par e $\hat{f}(n) = -\frac{2}{\pi n^2}$ se n é ímpar.

   (b) Calcule a série de Fourier de f e analise sua convergência.
   Solução: A série de Fourier de f é

$$f(\theta) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{e^{in\theta}}{n^2}.$$

   Note que a série de Fourier de f converge absolutamente já que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Logo, como f é contínua a série de Fourier de f converge uniformemente para f.

   (c) Use o item anterior para demonstrar as seguintes identidades:

   1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

   Solução:

   1. Avaliando a função f no ponto $\theta = 0$ e usando a igualdade com a série de Fourier obtemos

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^2}.$$

Note que

$$\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

e consequentemente

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

donde segue o resultado.

2. Como f é contínua e portanto integrável em $[-\pi, \pi]$, então podemos usar a Identidade de Parseval para obter que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^4}.$$

Temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{\theta^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Substituindo acima obtemos que

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^4} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

donde segue o resultado.

3. Separando a série em termos pares e ímpares e usando o resultado obtido em 1. obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

logo,

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

donde segue o resultado.

4. Procedendo de maneira análogo ao item anterior obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

logo,

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

donde segue o resultado.

2. (2,5) Sejam f uma função integrável no círculo unitário e u a solução do problema de Dirichlet no disco unitário

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

(a) Mostre que o valor de u na origem do disco é a média de seus valores no círculo, ou seja,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta.$$

Solução: Como por hipótese f é contínua então existe uma única solução para o problema de Dirichlet dada por

$$u(r,\theta) = (P_r * f)(\theta),$$

onde $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$ é o núlceo de Poisson. Note que $P_0(\theta) = 1$ para todo θ. Logo,

$$u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\eta)P_0(\theta-\eta)d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\eta)d\eta,$$

como queríamos.

(b) Mostre que se $f(\theta) \leq M$ para todo θ então $u(r,\theta) \leq M$ para todo θ e para todo $r < 1$.
Solução: Lembre que P_r é positivo, periódico de período 2π e $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 2\pi$. Logo,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\eta)P_r(\theta-\eta)d\eta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} MP_r(\theta-\eta)d\eta$$

$$= M\frac{1}{2\pi}\int_{\pi+\theta}^{-\pi+\theta} P_r(\xi)(-1)d\xi = M\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\xi)d\xi = M$$

ou seja, $u(r,\theta) \leq M$.

3. (2,5) Seja f uma função no círculo unitário.

(a) Prove que se $f \in C^k$ então $\hat{f}(n) = o(1/|n|^k)$.
Solução: Primeiro vamos provar por indução que $\widehat{f^m}(n) = (2\pi in)^m \hat{f}(n)$, para todo $1 \leq m \leq k$. Para $m = 1$ temos que

$$\widehat{f'}(n) = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx}dx = 2\pi in \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx = 2\pi in\hat{f}(n).$$

Suponha o resultado válido para m e vamos provar que vale para $m+1$:

$$\widehat{f^{m+1}}(n) = \widehat{(f^m)'}(n) = 2\pi in\widehat{f^m}(n) = 2\pi in(2\pi in)^m \hat{f}(n),$$

logo $\widehat{f^{m+1}}(n) = (2\pi in)^{m+1}\hat{f}(n)$ o que conclui a indução.
Em particular, $(2\pi in)^k \hat{f}(n) = \widehat{f^k}(n)$ e como f^k é continua (e portanto integrável) temos que $\widehat{f^k}(n)$ converge a zero quando $n \to \infty$ pelo Lema de Riemann-Lebesgue. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\hat{f}(x)|}{\frac{1}{|n|^k}} = \lim_{n\to\infty} |n|^k |\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} |\widehat{f^k}(n)| = 0,$$

o que implica $\hat{f}(n) = o(1/|n|^k)$.

(b) A recíproca é verdadeira? Justifique sua resposta.
Solução: Não, por exemplo a função $f(\theta) = |\theta|$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, 2π-periódica, não é continuamente diferenciável no entanto $\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|}\right)$. De fato, na questão 1 mostramos que $\hat{f}(0) = \pi/2$, $\hat{f}(n) = 0$ se $n \neq 0$ é par e $\hat{f}(n) = -\frac{2}{\pi n^2}$ se n é ímpar. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{\frac{1}{|n|}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\pi|n|^2}}{\frac{1}{|n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi|n|} = 0,$$

o que prova $\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|}\right)$.

(c) Prove que se $f \in C^{k-1}$, f^k é contínua por partes e existe $\alpha > 1$ tal que $\hat{f}(n) = O(1/|n|^{k+\alpha})$ então $f \in C^k$.
Solução: Temos que f^j é integrável para todo $1 \leq j \leq k$ e seus coeficientes de Fourier satisfazem a relação

$$\widehat{f^j}(n) = (2\pi in)^j \widehat{f}(n).$$

Por hipótese $\hat{f}(n) = O(1/|n|^{k+\alpha})$, ou seja, existe M tal que $|\hat{f}(n)| \leq \frac{M}{|n|^{k+\alpha}}$ para $|n|$ sufientemente grande. Sendo assim, a série de Fourier de f^j satisfaz a seguinte estimativa

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f^j}(n)e^{2\pi inx}| \leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^j |\hat{f}(n)| \leq CM \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n|^{k-j+\alpha}} \leq CM \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n|^\alpha}, \forall j \leq k.$$

Como $\alpha > 1$ concluimos que a série de Fourier de f^j converge uniformemente e absolutamente pelo teste M de Weierstrass. Em particular, como a série de Fourier de f^{k-1} é uniformemente convergente e f^{k-1} é contínua temos que $f^{k-1}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}^{k-1}(n)e^{2\pi inx}$ e portanto, como a série de Fourier de f^k é uniformemente convergente, então podemos derivar a série de f^{k-1} termo a termo e obter que $f^k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}^k(n)e^{2\pi inx}$ o que implica f^k contínua.

4. (2,5)

(a) Seja f uma função periódica de período L contínua tal que sua derivada f' é contínua por partes e $\int_0^L f(t)dt = 0$.

1. Mostre que
$$\int_0^L |f(t)|^2 dt \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^L |f'(t)|^2 dt.$$

Solução: Temos que f' é integrável e seus coeficientes de Fourier são dados por

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{L}\int_0^L f'(t)e^{-\frac{2\pi i n}{L}t}dt.$$

Usando integração por partes obtemos que

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{L}\int_0^L f'(t)e^{-\frac{2\pi i n}{L}t}dt = \frac{1}{L}\left(f(t)e^{-\frac{2\pi i n}{L}t}|_0^L - \int_0^L f(t)\left(-\frac{2\pi i n}{L}\right)e^{-\frac{2\pi i n}{L}t}dt\right)$$

$$= \frac{2\pi i n}{L}\frac{1}{L}\int_0^L f(t)e^{-\frac{2\pi i n}{L}t}dt = \frac{2\pi i n}{L}\hat{f}(n),$$

ou seja, $\widehat{f'}(n) = \frac{2\pi i n}{L}\hat{f}(n)$.
Usando a identidade de Parseval para f' obtemos que

$$\frac{1}{L}\int_0^L |f'(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{2\pi i n}{L}\hat{f}(n)\right|^2.$$

Note que como $\hat{f}(0) = 0$ por hipótese então

$$|n\hat{f}(n)|^2 \geq |\hat{f}(n)|^2, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Logo,
$$\int_0^L |f'(t)|^2 dt = L\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{2\pi i n}{L}\hat{f}(n)\right|^2 \geq \frac{4\pi^2}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2.$$

Por outro lado, usando a identidade de Parseval para f temos que

$$\frac{1}{L}\int_0^L |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2.$$

Portanto,
$$\int_0^L |f(t)|^2 dt = L\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^L |f'(t)|^2 dt,$$

como queríamos.

2. Mostre que a igualdade é válida se e somente se $f(t) = A\sin(2\pi t/L) + B\cos(2\pi t/L)$.
Solução: Note que na demonstração acima utilizamos uma única desigualdade

$$|n\hat{f}(n)|^2 \geq |\hat{f}(n)|^2, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sendo assim, a igualdade será válida se e somente se $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $|n| \neq 1$ (lembre que por hipótese $\hat{f}(0) = 0$). É claro que, neste caso, a série de Fourier de f converge absolutamente já que é uma série de apenas dois termos. Como f é contínua concluímos que a série de Fourier de f converge a f. Logo,

$$f(t) = \hat{f}(-1)e^{-\frac{2\pi i}{L}t} + \hat{f}(1)e^{\frac{2\pi i}{L}t} = A\sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + B\cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right),$$

com $A = \hat{f}(-1) + \hat{f}(1)$ e $B = i(\hat{f}(1) - \hat{f}(-1))$.

(b) Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ continuamente diferenciável e tal que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Mostre que
$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Solução: A ideia é aplicar o resultado anterior. Para isso vamos considerar a função g que é a extensão ímpar da função f com respeito ao ponto $x = a$ e periódica de período $2(b-a)$, ou seja,

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in [a, b] \\ -f(-t+2a), & \text{se } t \in [2a-b, a) \end{cases}$$

e $g(t + 2(a-b)k) = g(t)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Note que como g é periódica de período $2(b-a)$ então

$$\int_0^{2(b-a)} g(t)dt = \int_{2a-b}^b g(t)dt.$$

Usando a definição de g obtemos

$$\int_{2a-b}^b g(t)dt = \int_{2a-b}^a f(t)dt + \int_a^b (-f(-t+2a))dt = \int_{2a-b}^a f(t)dt + \int_a^{-b+2a} f(s)ds = 0$$

onde acima utilizamos a mudança de variáveis $s = -t + 2a$.
É fácil ver que g é contínuamente diferenciável já que por hipótese $f(a) = f(b) = 0$ e f é continuamente diferenciável.
Sendo assim, podemos aplicar o resultado anterior para g e obter

$$\int_0^{2(b-a)} |g(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{2(b-a)} |g'(t)|^2 dt.$$

Agora observe que como g é $2(b-a)$ periódica e pela definição de g temos que

$$\int_0^{2(b-a)} |g(t)|^2 dt = \int_{2a-b}^b |g(t)|^2 dt = \int_{2a-b}^a |g(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

$$= \int_{2a-b}^a |f(-t+2a)|^2 dt + \int_a^b |f(t)|^2 dt = -\int_b^a |f(s)|^2 ds + \int_a^b |f(t)|^2 dt = 2\int_a^b |f(t)|^2 dt$$

onde acima usamos a mudança de variáveis $s = -t + 2a$. Analogamente, temos que

$$\int_0^{2(b-a)} |g'(t)|^2 dt = 2\int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Portanto,

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt. \tag{1}$$

2. Prove que a constante $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ não pode ser melhorada.

   Solução: Pelo resultado do item (a) temos que $g(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{2(b-a)}\right) + B\cos\left(\frac{2\pi t}{2(b-a)}\right)$ satisfaz

$$\int_0^{2(b-a)} |g(t)|^2 dt = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{2(b-a)} |g'(t)|^2 dt.$$

   Como por construção g é ímpar com respeito ao ponto a e portanto $B = 0$. Além disso, $g(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{2(b-a)}\right)$ se e somente se $f(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{2(b-a)}\right)$. Logo, a igualdade em (1) é realizada e portanto a constante já é a melhor possível.