1. Seja $a > 0$, defina

$$f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)},$$

$$g_a(x) = \frac{\sin(ax)}{\pi x}.$$

   Use a transformada de Fourier para demonstrar as identidades a seguir para quaisquer $a, b > 0$

   (a) $f_a * f_b = f_{a+b}$.

   (b) $g_a * g_b = g_{\min\{a,b\}}$.

2. Use o Teorema de Plancherel para demonstrar as seguintes fórmulas

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2} dt = \pi \min\{a, b\}$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{a + b}$.

3. Sejam $f \in S(\mathbb{R})$ e $G \in S(\mathbb{R}^2)$. Use a Transformada de Fourier para deduzir que a solução da equação do calor não homogênea

$$u_t = u_{xx} + G(x, t)$$

   com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, é dada por

$$u(x, t) = f * \mathcal{H}_t(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(y, s)\mathcal{H}_{t-s}(x - y) dy ds$$

onde $\mathcal{H}_t$ é o núcleo do calor.