Gabarito Teste 4

1. Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = x.$$

Solução: Primeiro vamos encontrar a solução geral da equação homogênea. Temos que $p(r) = r^4 - 2r^2 + 1$ é o polinômio característico associado à equação. Fatorando vemos que

$$p(r) = r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2 - 1)^2 = (r - 1)^2(r + 1)^2.$$

Portanto, as raízes de p são $r_1 = 1$ com multiplicidade 2 e $r_2 = -1$ com multiplicidade 2. Logo, a equação homogênea pode ser escrita como

$$(D - 1)^2(D + 1)^2 y = 0.$$

Associadas a estas raízes temos as seguintes soluções linearmente independentes:

$$u_1 = e^x, u_2 = xe^x, u_3 = e^{-x} \text{ e } u_4 = xe^{-x}.$$

Portanto, a solução geral da equação homogênea é

$$y_h(x) = a_1e^x + a_2xe^x + a_3e^{-x} + a_4xe^{-x}.$$

Para obter a solução geral da equação não-homogênea basta encontrar agora uma solução particular. Neste caso é fácil ver que $y(x) = x$ é uma solução particular. Uma forma de obter essa mesma solução particular é observar que $D^2(x) = 0$ e portanto uma solução particular da equação não-homogênea será também uma solução de $D^2(D - 1)^2(D + 1)^2(y) = 0$. Mas a solução geral desta equação é dada por

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5e^{-x} + c_6xe^{-x}.$$

Como a função $c_4xe^x + c_5e^{-x} + c_6xe^{-x}$ é solução da equação homogênea basta encontrarmos c_1 e c_2 tais que

$$(D - 1)^2(D + 1)^2(c_1 + c_2x) = x,$$

ou equivalentemente,

$$(c_1 + c_2x)^{(4)} - 2(c_1 + c_2x)^{(2)} + (c_1 + c_2x) = x.$$

Como $(c_1 + c_2x)^{(4)} = 0$ e $(c_1 + c_2x)^{(2)} = 0$ concluímos que

$$c_1 + c_2x = x$$

logo $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Portanto uma solução particular da equação não-homogênea é $y_p(x) = x$. Com isso obtemos que a solução geral da equação não homogênea é dada por

$$y(x) = x + a_1e^x + a_2xe^x + a_3e^{-x} + a_4xe^{-x}.$$

2. Seja $L(y) = y'' + ay' + by$, onde a e b são constantes. Seja f uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Seja R uma função contínua. Prove que a função

$$g(x) = \int_c^x f(x-t)R(t)dt$$

é solução da equação $L(y) = R$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Solução: Podemos seguir diversos caminhos para resolver esta questão. A primeira, mais trabalhosa, é calcular as derivadas de g usando que

$$f(x) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, & \text{se } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2, \\ c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}, & \text{se } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2, \\ c_1 \cos(r_1 x) + c_2 \sin(r_2 x), & \text{se } r_1, r_2 \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes do polinômio característico $p(r) = r^2 + ar + b$.

A segunda é encontrar uma expressão geral para as derivada de g usando a definição da derivada como um limite. Outra forma, talvez a menos trabalhosa, é definir a seguinte função de duas variáveis:

$$F(x,y) = \int_c^x f(y-t)R(t)dt.$$

Daí, como $g(x) = F(x,x)$ vamos usar as derivadas parciais de F e a regra da cadeia para calcular g' e g''. Note que as derivadas parcias de primeira e segunda ordem de F são:

$$\partial_x F(x,y) = f(y-x)R(x),$$

$$\partial_y F(x,y) = \int_c^x f'(y-t)R(t)dt,$$

$$\partial_{xx} F(x,y) = -f'(y-x)R(x) + f(y-x)R'(x),$$

$$\partial_{xy} F(x,y) = f'(y-x)R(x),$$

$$\partial_{yy} F(x,y) = \int_c^x f''(y-t)R(t)dt.$$

Usando a regra da cadeia obtemos que

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(x-t)R(t)dt = \frac{d}{dx}F(x,x) = \partial_x F(x,x) + \partial_y F(x,x)$$

$$= f(0)R(x) + \int_c^x f'(x-t)R(t)dt,$$

$$\text{e}\quad g''(x) = \frac{d^2}{dx^2}F(x,x) = \frac{d}{dx}\left(\partial_x F(x,x) + \partial_y F(x,x)\right) = \partial_{xx}F(x,x) + 2\partial_{xy}F(x,x) + \partial_{yy}F(x,x)$$

$$= -f'(0)R(x) + f(0)R'(x) + 2f'(0)R(x) + \int_c^x f''(y-t)R(t)dt$$

$$= f'(0)R(x) + f(0)R'(x) + \int_c^x f''(y-t)R(t)dt.$$

Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ temos que

$$g'(x) = \int_c^x f'(x-t)R(t)dt \ \text{ e } \ g''(x) = R(x) + \int_c^x f''(y-t)R(t)dt.$$

Usando as expressões obtidas para g' e g'' e que $L(f) = 0$ obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} g''(x) + ag'(x) + bg(x) &= R(x) + \int_c^x f''(y-t)R(t)dt + a\int_c^x f'(x-t)R(t)dt + b\int_c^x f(x-t)R(t)dt \\ &= R(x) + \int_c^x (f''(y-t) + af'(x-t) + bf(x-t))R(t)dt = R(x), \end{aligned}$$

ou seja, $L(g) = R$.

3. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0, \tag{1}$$

no intervalo $(0, +\infty)$.

(a) Prove que $y_1(x) = \frac{1}{x^2}$ é solução da equação (1) no intervalo $(0, +\infty)$.

Solução: Temos que y_1 é continuamente diferenciável em $x \in (0, +\infty)$. Além disso, temos que $y_1'(x) = -\frac{2}{x^3}$ e $y_1''(x) = \frac{6}{x^4}$. Logo,

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x}\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Portanto, y_1 é solução de (1).

(b) Encontre outra solução y_2 de (1) tal que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes (**Use a questão** 4).

Solução: Pela questão 4 temos que

$$y_2(x) = \frac{1}{x^2}\int \frac{Q(x)}{\frac{1}{x^4}}dx$$

onde $Q(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = x^{-2}$, é uma solução de (1) linearmente independente de y_1. Logo,

$$y_2(x) = \frac{1}{x^2}\int \frac{x^{-2}}{x^{-4}}dx = \frac{1}{x^2}\frac{x^3}{3} = \frac{x}{3}.$$

Portanto, $y_2(x) = \frac{x}{3}$ é uma solução de (1) linearmente independente de y_1.

(c) Encontre a solução geral da equação não-homogênea

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x}, \tag{2}$$

no intervalo $(0, +\infty)$.

Solução: Vamos usar o método de variação de parâmetros. Observe que qualquer múltiplo de y_2 também é solução de (1) linearmente independente de y_1. Sendo assim, para facilitar as contas vamos tomar $y_2(x) = x$. Temos que o Wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & x \\ -\frac{2}{x^3} & 1 \end{bmatrix} \text{ e portanto sua inversa é } W(x)^{-1} = \frac{x^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -x \\ \frac{2}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

Temos que uma solução particular da equação não-homogênea é dada por

$$y_p(x) = (y_1(x), y_2(x)) \cdot \int \frac{1}{t}W(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = (y_1(x), y_2(x)) \cdot \left(-\int \frac{t^2}{3}dt, \int \frac{1}{3t}dt\right)$$

$$= -y_1(x)\frac{x^3}{9} + y_2(x)\frac{\ln x}{3} = -\frac{x}{9} + \frac{x\ln x}{3}.$$

Portanto, a solução geral da equação não-homogênea é $y(x) = c_1\frac{1}{x^2} + c_2x + \frac{x\ln x}{3}$.

4. Considere a seguinte equação diferencial em um intervalo J,

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0, \tag{3}$$

onde P_1 e P_2 são funções contínuas em J. Seja y_1 uma solução de (3) que nunca se anula em J. O objetivo deste exercício é encontrar uma solução y_2 de (3) linearmente independente de y_1.

(a) Suponha que $y_2 = y_1 u$ é solução da equação (3) em J. Substitua y_2 na equação e encontre que

$$u(x) = \int_c^x \frac{Q(t)}{y_1(t)^2} dt, \ x \in J,$$

onde $Q(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ e $c \in J$. Conclua que $y_2 = y_1 u$ é solução da equação (3) em J.

Solução: Escreva $y_2 = y_1 u$ onde y_1 é solução de (3). Temos que

$$y_2' = y_1' u + y_1 u' \text{ e } y_2'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''.$$

Substituindo em (3) obtemos

$$(y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'') + P_1(y_1' u + y_1 u') + P_2 y_1 u = 0.$$

Usando que y_1 é solução da equação (3) obtemos

$$y_1 u'' + (2y_1' + P_1 y_1) u' = 0.$$

Como por hipótese $y_1 \neq 0$ podemos dividir a equação acima por y_1 e obter

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P_1 \right) u' = 0.$$

Defina $v = u'$ e note que v satisfaz a equação

$$v' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P_1 \right) v = 0,$$

e portanto $v(x) = k_1 e^{-A(x)}$ onde

$$A(x) = \int \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + P_1(x) \right) dx = \ln((y_1(x))^2) + \int P_1(x) dx,$$

ou seja, $v(x) = \frac{k_1}{y_1(x)^2} e^{-\int P_1 dx}$. Consequentemente,

$$u(x) = k_1 \int_c^x \frac{Q(t)}{y_1(t)^2} dt + k_2.$$

Tomando $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ chegamos ao resultado.

(b) Prove que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Solução: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a y_1(x) + b y_2(x) = 0, \text{ para todo } x \in J.$$

Em particular, para $x = c$ temos que $y_2(c) = 0$ e portanto $a = 0$ já que y_1 nunca se anula. Consequentemente, $b y_2(x) = 0$ para todo $x \in J$. Como $y_2 = y_1 u$ e y_1 nunca se anula obtemos que $bu(x) = 0$ para todo $x \in J$. Derivando esta expressão obtemos que

$$0 = bu'(x) = \frac{Q(x)}{y_1(x)^2}.$$

Lembre que $Q(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ e portanto $Q(x) \neq 0$, para todo $x \in J$, o que implica $b = 0$. Logo, y_1 e y_2 são linearmente independentes.