Gabarito Teste 3

1. (7,0) Considere a função $P(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ b(1+x), & x < 0 \end{cases}$.

   (a) Resolva a seguinte equação diferencial

   $$y' + P(x)y = x^2 \tag{1}$$

   no intervalo $(1,4)$ e com condição inicial $y(2) = 4$. É possível garantir a unicidade da solução neste intervalo?

   Solução: Como queremos uma solução no intervalo $(1,4)$, temos que $P(x) = 3x^2$ neste intervalo e assim a equação (1) fica:

   $$y' + 3x^2 y = x^2.$$

   Como P e $Q(x) = x^2$ são contínuas em $(1,4)$ para quaisquer valores de a e b, segue pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDO's lineares de primeira ordem, que existe solução e ela é única. Além disso, a solução tem a seguinte forma:

   $$y(x) = 4e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_2^x e^{A(t)} t^2 dt,$$

   onde $A(x) = \int_2^x 3t^2 dt$.
   Calculando as integrais obtemos:

   $$A(x) = x^3 - 8$$

   e

   $$\int_2^x e^{A(t)} t^2 dt = \int_2^x e^{t^3-8} t^2 dt = \int_0^{x^3-8} \frac{e^u}{3} du = \frac{e^{x^3-8} - 1}{3}.$$

   acima usamos a substituição $u = t^3 - 8$.
   Assim, obtemos

   $$y(x) = 4e^{-x^3+8} + e^{-x^3+8} \frac{e^{x^3-8} - 1}{3} = \frac{11e^8 e^{-x^3}}{3} + \frac{1}{3}.$$

   Logo, a única solução no intervalo $(1,4)$, independente dos valor de a e b, é

   $$y(x) = \frac{11e^8 e^{-x^3}}{3} + \frac{1}{3}.$$

(b) É possível encontrar valores de a e b para os quais a equação admita uma única solução no intervalo $(-\infty, \infty)$, de modo que $y(0) = 0$? Em caso positivo, diga quais são esses valores e determine a solução para estes valores.

Solução: Se P for contínua em $(-\infty, \infty)$, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDO's lineares de primeira ordem, garantiremos a existência e unicidade de solução para o PVI já que $Q(x) = x^2$ é contínua em $(-\infty, \infty)$.

Portanto, devemos determinar a e b de modo que P seja contínua em $(-\infty, \infty)$. Temos que P é contínua em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ já que nestes intervalos $P(x)$ é igual a $3x^2$ e $b(1+x)$ respectivamente. Assim precisamos determinar os valores de a e b de modo que P seja contínua em 0. Daí:

$$\lim_{x\to 0+} P(x) = \lim_{x\to 0+} 3x^2 = 0$$

e também:

$$\lim_{x\to 0-} P(x) = \lim_{x\to 0+} b(1+x) = b$$

A condição $\lim_{x\to 0+} P(x) = \lim_{x\to 0-} P(x) = P(0)$ garantem a continuidade de P e implicam em $a = 0$ e $b = 0$.

Portanto, no caso em que $a = 0$ e $b = 0$ a equação tem solução única no intervalo $(-\infty, \infty)$ satisfazendo a condição $y(0) = 0$, pelo Teorema de Existência e Unicidade. Além disso, com a condição $y(0) = 0$ temos que a solução tem a seguinte forma:

$$y(x) = e^{-A(x)} \int_0^x e^{A(t)} t^2 dt,$$

onde $A(x) = \int_0^x P(t)dt$.

Para calcular A vamos separar em dois casos. Se $x \geq 0$, temos $P(x) = 3x^2$ e assim $A(x) = x^3$. Logo, para $x \geq 0$ temos que

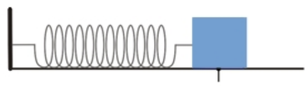
$$y(x) = e^{-x^3} \int_0^x e^{t^3} t^2 dt = e^{-x^3} \int_0^{x^3} \frac{e^u}{3} du = \frac{1 - e^{-x^3}}{3}.$$

Para $x < 0$ temos que $P(x) = 0$ e portanto $A(x) = 0$. Consequentemente, a solução neste intervalo será $y(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Por fim temos que a solução do problema é

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x^3}}{3}, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^3}{3}, & x < 0. \end{cases}$$

2. (6,0) Esta questão tem por objetivo modelar matematicamente o sistema massa-mola com atrito. Considere um corpo de massa $m > 0$ sobre uma superfície horizontal preso por uma mola de massa desprezível (veja a figura abaixo). Denote por $y(t)$ a posição do corpo no instante de tempo t com respeito à origem que é o centro de massa do corpo com o sistema em equilíbrio.



(a) Suponha que a força de atrito devido à superfície é dada por $F_a = -\alpha v$, onde v é a velocidade do corpo e $\alpha > 0$, e que a força de restauração da mola é dada por $F_r = -ky$, onde $k > 0$. Usando a segunda lei de Newton (que diz que a soma das forças que agem sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo com a aceleração) mostre que a equação diferencial de segunda ordem que determina a posição do corpo em qualquer instante de tempo é dada por

$$y'' + \beta y' + \omega^2 y = 0, \tag{2}$$

onde $\beta = \alpha/m$ e $\omega^2 = k/m$.

Solução: Sabendo que a velocidade $v(t) = y'(t)$, a aceleração no instante de tempo t é $y''(t)$ e que as forças agindo sobre o corpo são F_a e F_r, temos, pela segunda lei de Newton, que

$$my'' = F_a + F_r$$

ou seja,

$$my'' = -\alpha y' - ky.$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por m e rearranjando os termos segue que

$$y'' + \beta y' + \omega^2 y = 0,$$

onde $\beta = \alpha/m$ e $\omega^2 = k/m$.

(b) Determine a forma geral da solução da equação (2) nos seguintes casos:

(i) $\beta^2 > 4\omega^2$

(ii) $\beta^2 = 4\omega^2$

(iii) $\beta^2 < 4\omega^2$

Solução: O discriminante da EDO é dado por $d = \beta^2 - 4\omega^2$. Defina $\gamma = \sqrt{\dfrac{\beta}{2} + \omega^2}$. Temos que a forma geral da solução da EDO linear de 2ª ordem é dada por

(i) Se $d > 0$, ou seja, $\beta^2 > 4\omega^2$, temos

$$y(t) = e^{-\dfrac{\beta t}{2}} (C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}).$$

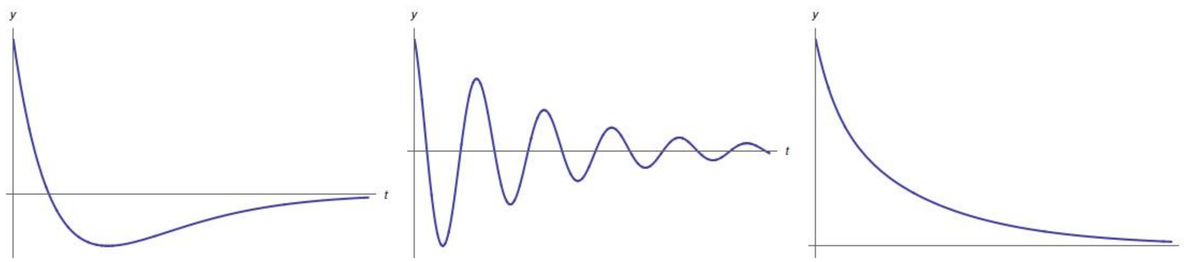
(ii) Se $d = 0$, ou seja, $\beta^2 = 4\omega^2$ temos

$$y(t) = e^{-\dfrac{\beta t}{2}}(C_1 t + C_2).$$

(iii) Se $d < 0$, ou seja, $\beta^2 < 4\omega^2$ temos

$$y(t) = e^{-\dfrac{\beta t}{2}}(C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \sin(\gamma t)).$$

(c) Faça a correspondência entre os itens (i), (ii) e (iii) e os gráficos abaixo:



Ao primeiro gráfico da esquerda para a direita corresponde o item (ii) já que a solução é o produto de uma exponencial que decai no infinito por uma função linear que se anula em exatamente um ponto. Ao gráfico do meio corresponde o item (iii) pois a solução é o produto de uma função que oscila e uma exponencial que decai a zero. Por fim, ao terceiro gráfico corresponde o item (i) já que a solução neste caso é o produto de uma função exponencial que decai por uma combinação de funções exponenciais.