Gabarito Prova 2

1. (a) Prove que

$$\mathcal{L}[\sin(kt)](s) = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

Solução: Como $|\sin(kt)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que a a função é de ordem exponencial e portanto existe a transformada de Laplace. Por definição temos que

$$\mathcal{L}[\sin(kt)](s) = \int_0^\infty \sin(kt)e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(kt)e^{-st}dt.$$

Usando integração por partes obtemos

$$\int_0^R \sin(kt)e^{-st}dt = -\sin(kt)\frac{e^{-st}}{s}|_0^R + \int_0^R k\cos(kt)\frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$= -\sin(kR)\frac{e^{-sR}}{s} - k\cos(kt)\frac{e^{-st}}{s^2}|_0^R - \int_0^R k^2\sin(kt)\frac{e^{-st}}{s^2}dt$$

$$= -\sin(kR)\frac{e^{-sR}}{s} - k\cos(kR)\frac{e^{-sR}}{s^2} + \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2}\int_0^R k^2\sin(kt)e^{-st}dt$$

Como $\lim_{R\to\infty} e^{-sR} = 0$ então passando ao limite quando $R \to \infty$ na equação acima obtemos que

$$\int_0^\infty \sin(kt)e^{-st}dt = \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2}\int_0^\infty k^2\sin(kt)e^{-st}dt$$

donde segue que

$$\int_0^\infty \sin(kt)e^{-st}dt = \frac{k}{k^2+s^2}.$$

(b) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+k^2)}\right]$.

Solução: Vamos usar frações parcias

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+k^2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+k^2} = \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(Ak^2+C)s+Bk^2+D}{(s^2+1)(s^2+k^2)}$$

logo, devemos ter $A+C=0$, $B+D=0$, $Ak^2+C=0$ e $Bk^2+D=1$. No caso em que $k^2 \neq 1$ obtemos $A=C=0$, $B=1/(k^2-1)$ e $D=-1/(k^2-1)$. Portanto,

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+k^2)} = \frac{1}{k^2-1}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+k^2}\right), \text{ se } k^2 \neq 1.$$

Usando a linearidade da inversa da transformada de Laplace segue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+k^2)}\right](t) = \frac{1}{k^2-1}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+k^2}\right](t)\right), \text{ se } k^2 \neq 1.$$

Pelo item (a) temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \sin(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+k^2}\right](t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kt)}{k}, & \text{se } k \neq 0 \\ \\ t, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Portanto, se $k^2 \neq 1$ então

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+k^2)}\right](t) \begin{cases} \frac{1}{k^2-1}\left(\sin(t) - \dfrac{\sin(kt)}{k}\right) & \text{se } k \neq 0 \\ \\ t - \sin(t), & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

No caso em que $k^2 = 1$ vamos usar a propriedade da convolução:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \sin(t) * \sin(t) \\
&= \int_0^t \sin(t-x)\sin(x)dx = \sin(t)\int_0^t \cos(x)\sin(x)dx - \cos(t)\int_0^t \sin^2(x)dx \\
&= \frac{\sin(t)}{2}\int_0^t \sin(2x)dx - \frac{\cos(t)}{2}\int_0^t (1-\cos(2x))dx \\
&= \frac{\sin(t)(1-\cos(2t))}{4} - \frac{\cos(t)}{2}\left(t - \frac{\sin(2t)}{2}\right) \\
&= \frac{\sin(t)}{2} - \frac{t\cos(t)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+k^2)}\right](t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2-1}\left(\sin(t) - \dfrac{\sin(kt)}{k}\right), & k^2 \neq 0, 1 \\ \\ \dfrac{\sin(t)}{2} - \dfrac{t\cos(t)}{2}, & k^2 = 1 \\ \\ t - \sin(t), & k^2 = 0 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = A\sin t \\ \\ y(0) = a,\ y'(0) = b. \end{cases}$$

(a) Use a transformada de Laplace para encontrar a solução geral do problema acima (Use a questão 1).

Solução: Vamos denotar por $\bar{y}(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Aplicando a transformada de Laplace na equação e usando suas propriedades obtemos a seguinte equação

$$s^2\bar{y}(s) - sy(0) - y'(0) + k^2\bar{y}(s) = A\mathcal{L}[\sin(t)](s).$$

Segue da equação acima e do item (a) da questão anterior que

$$\bar{y}(s) = A\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+k^2} + a\frac{s}{s^2+k^2} + b\frac{1}{s^2+k^2}.$$

Do item (b) da questão anterior sabemos que, para $k \neq 0$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+k^2}\right](t) = \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Além disso, da propriedade da derivada temos que

$$\mathcal{L}[\cos(kt)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\sin(kt)\right](s) = \frac{1}{k}s\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \frac{s}{s^2+k^2}$$

e portanto, para $k \neq 0$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right](t) = \cos(kt).$$

No caso em que $k = 0$ temos que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right](t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) = 1$.
Por fim, usando a linearidade da inversa da transformada de Laplace, o item (b) da questão anterior e os cálculos acima, concluímos que

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{k^2-1}\left(\sin(t) - \dfrac{\sin(kt)}{k}\right) + a\cos(kt) + \dfrac{b\sin(kt)}{k}, & k^2 \neq 0, 1 \\ \\ \dfrac{A\sin(t)}{2} - \dfrac{At\cos(2t)}{2} + a\cos(kt) + \dfrac{b\sin(kt)}{k}, & k^2 = 1 \\ \\ A(t - \sin(t)) + a + bt, & k^2 = 0 \end{cases}$$

(b) Encontre os valores de k para os quais a solução y satisfaz a condição $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = +\infty$.

Solução: O enunciado desta questão está errado, ao invés da condição $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = +\infty$ o certo seria $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t)| = +\infty$. Em outras palavras, a questão pedia os valores de k para os quais a solução é ilimitada quando $t \to \infty$. Lembrando que a equação acima descreve o movimento harmônico, este seria o caso em que há ressonância.

Olhando para a expressão obtida no item anterior vemos que quando $k^2 \neq 0, 1$ a solução y é formada por uma combinação linear das funções $\sin(t)$, $\sin(kt)$ e $\cos(kt)$ e portanto y é sempre limitada. No caso em que $k^2 = 1$ a solução y é formada por funções limitadas e pelo termo $At\cos(2t)/2$ que em módulo converge a infinito. Já no caso em que $k = 0$ a solução é formada por funções limitadas e At que em módulo converge a infinito.

3. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'' + 4xy' + Q(x)y = 0.$$

Encontre as funções u e Q de tal forma que $u(0) = 1$ e as funções definidas por $y_1(x) = u(x)$ e $y_2(x) = xu(x)$ sejam soluções da equação.

Solução: Temos por hipótese que $y_2(x) = xu(x)$ é solução. Como $y_2'(x) = u(x) + xu'(x)$ e $y_2''(x) = 2u'(x) + xu''(x)$ então

$$2u'(x) + xu''(x) + 4x(u(x) + xu'(x)) + Q(x)xu(x) = 0.$$

Agrupando alguns termos obtemos

$$x(u''(x) + 4xu'(x) + Q(x)u(x)) + 2u'(x) + 4xu(x) = 0.$$

Agora usando que u é solução da equação concluímos que

$$2u'(x) + 4xu(x) = 0,$$

ou ainda,

$$u'(x) + 2xu(x) = 0.$$

Como a equação acima é linear e de primeira ordem sabemos que sua solução é dada por

$$u(x) = u(0)e^{-A(x)},$$

onde $A(x) = \int_0^x 2tdt = x^2$. Portanto, $u(x) = e^{-x^2}$. Para obter $Q(x)$ usaremos a equação para u (note que $u \neq 0$)

$$u'' + 4xu + Q(x)u = 0 \Rightarrow Q(x) = -\frac{u'' + 4xu}{u} = -\frac{(4x^2 - 2)e^{-x^2} + 4x(-2x)e^{-x^2}}{e^{-x^2}} = 4x^2 + 2.$$

Portanto, $u(x) = e^{-x^2}$ e $Q(x) = 4x^2 + 2$.

4. Considere a equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0.$$

Encontre a solução geral da equação de Bessel no intervalo $(0, \infty)$ para o caso em que 2α não é inteiro.

Solução: Primeiro note que podemos reescrever a equação da seguinte forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Temos então que $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{x^2}$ são tais que $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são funções analíticas. Sendo assim podemos aplicar o método de Frobenius. O polinômio indicial é $p(r) = r^2 - \alpha^2$ e suas raízes $-\alpha$ e α. Como por hipótese 2α é não inteiro então a diferença das raízes do polinômio indicial é não interiro e portanto a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = k_1x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + k_2x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n.$$

Vamos calcular os termos $a_n's$ e $b_n's$. Para isso, basta substituir as funções $y_1(x) = x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ e $y_2(x) = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ na equação. Faremos isso usando a forma geral $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r}$ e depois substituiremos os valores $r = -\alpha$ e $r = \alpha$.

Temos que

$$\phi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_nx^{n+r-1} \text{ e } \phi''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)c_nx^{n+r-2}.$$

Substituindo na equação chegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)c_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(x^2 - \alpha^2)c_nx^{n+r} = 0$$

Agrupando os termos com a mesma potência em x obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n + r)^2 - \alpha^2)c_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r+2} = 0.$$

Note que, como $r^2 = \alpha^2$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n + r)^2 - \alpha^2)c_nx^{n+r} = (r^2 - \alpha^2)c_0 + ((1 + r)^2 - \alpha^2)c_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(n^2 + 2nr)c_nx^{n+r}$$

$$= (1 + 2r)c_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n + 2)(n + 2 + 2r)c_{n+2}x^{n+r+2}.$$

Substituindo na expressão anterior chegamos a

$$(1+2r)c_1 + \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+2+2r)c_{n+2} + c_n)x^{n+r+2} = 0$$

donde concluímos que $a_1 = 0$ e

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+2+2r)}c_n,$$

ou ainda,

$$c_n = -\frac{1}{n(n+2r)}c_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2$$

Segue da fórmula de recursão que os termos ímpares são todos nulos e os pares são dados por

$$c_2 = -\frac{1}{2(2+2r)}c_0 = -\frac{1}{2^2(1+r)}c_0$$

$$c_4 = \frac{1}{4(4+2r)}\frac{1}{2^2(1+r)}c_0 = \frac{1}{4\cdot 2\cdot 2^2(2+r)(1+r)}c_0,$$

$$c_6 = -\frac{1}{6(6+2r)}\frac{1}{4\cdot 2\cdot 2^2(2+r)(1+r)}c_0 = -\frac{1}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 2^3(3+r)(2+r)(1+r)}c_0,$$

donde podemos concluir que

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)\cdot(2n-2)\ldots 4\cdot 2\cdot 2^n(n+r)(n-1+r)\ldots(1+r)}c_0$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n!2^{2n}(n+r)(n-1+r)\ldots(1+r)}c_0 = (-1)^n \frac{\Gamma(r+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+r+1)}c_0.$$

Portanto, substituindo $r = -\alpha$ e $r = \alpha$ concluímos que

$$y_1(x) = c_0 x^{-\alpha}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma(-\alpha+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n-\alpha+1)}x^{2n}\right)$$

e

$$y_2(x) = c_0 x^{\alpha}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n}\right).$$