

MA 311

1S 2016

Teste 3

20/04/2016

Tempo Limite: 60 minutos

Nome: _____

RA: _____

Professora Anne Bronzi

PED: Charles Almeida

Este teste possui 5 páginas (incluindo a capa) e 2 problemas. Veja se o teste tem todas as páginas e preencha todas as informações a caneta. Coloque suas iniciais no topo de TODAS as páginas.

Você não pode usar nenhum material de consulta durante a prova, incluindo qualquer tipo de equipamento eletrônico.

Você deve mostrar a resolução completa de cada questão, de modo que as seguintes regras se apliquem:

- **Se você usar um teorema, deve enunciá-lo, e explicar porque pode ser usado.**
- **Organize seu trabalho**, usando o espaço fornecido para a solução de forma coerente. Trabalhos espalhados por todas as partes da folha sem uma ordem clara poderão ser penalizados.
- **Soluções sem justificativas não serão consideradas.** Podem ser atribuídos pontos parciais a cada questão, mesmo que a solução não seja completa.
- Se você precisar de mais espaço, use a parte de trás da folha, indicando explicitamente quando fizer isso.

| Questão | Ponto | Nota |
|---------|-------|------|
| 1 | 7,0 | |
| 2 | 6,0 | |
| Total | 13,0 | |

Não escreva na tabela ao lado.

1. (7,0) Considere a função $P(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ b(1+x), & x < 0 \end{cases}$.

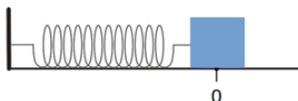
(a) Resolva a seguinte equação diferencial

$$y' + P(x)y = x^2 \quad (1)$$

no intervalo $(1, 4)$ e com condição inicial $y(2) = 4$. É possível garantir a unicidade da solução neste intervalo?

(b) É possível encontrar valores de a e b para os quais a equação admita uma única solução no intervalo $(-\infty, \infty)$, de modo que $y(0) = 0$? Em caso positivo, diga quais são esses valores e determine a solução para estes valores.

2. (6,0) Esta questão tem por objetivo modelar matematicamente o sistema massa-mola com atrito. Considere um corpo de massa $m > 0$ sobre uma superfície horizontal preso por uma mola de massa desprezível (veja a figura abaixo). Denote por $y(t)$ a posição do corpo no instante de tempo t com respeito à origem que é o centro de massa do corpo com o sistema em equilíbrio.



- (a) Suponha que a força de atrito devido à superfície é dada por $F_a = -\alpha v$, onde v é a velocidade do corpo e $\alpha > 0$, e que a força de restauração da mola é dada por $F_r = -ky$, onde $k > 0$. Usando a segunda lei de Newton (que diz que a soma das forças que agem sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo com a aceleração) mostre que a equação diferencial de segunda ordem que determina a posição do corpo em qualquer instante de tempo é dada por

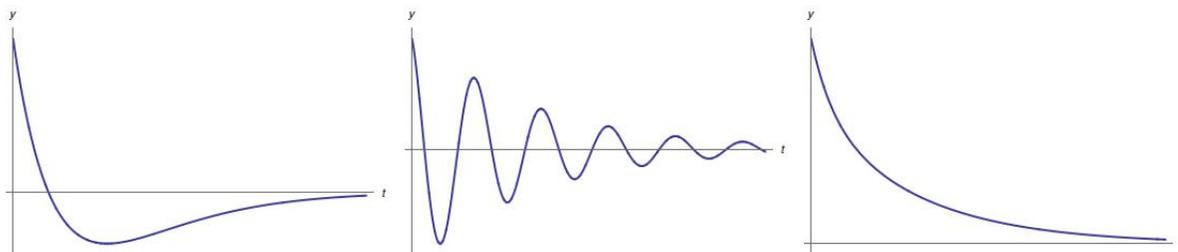
$$y'' + \beta y' + \omega^2 y = 0, \quad (2)$$

onde $\beta = \alpha/m$ e $\omega^2 = k/m$.

- (b) Determine a forma geral da solução da equação (2) nos seguintes casos:

- (i) $\beta^2 > 4\omega^2$
- (ii) $\beta^2 = 4\omega^2$
- (iii) $\beta^2 < 4\omega^2$

- (c) Faça a correspondência entre os itens (i), (ii) e (iii) e os gráficos abaixo:



Rascunho