MA 311
1S 2016
Prova 1
08/04/2016
Tempo Limite: 2 horas

Nome: ______________________________
RA: ______________________________

Professora Anne Bronzi
PED: Charles Almeida

Esta prova possui 7 páginas (incluindo a capa) e 5 problemas. Veja se a prova tem todas as páginas e preencha todas as informações a caneta. Coloque suas iniciais no topo de TODAS as páginas.

Você não pode usar nenhum material de consulta durante a prova, incluindo qualquer tipo de equipamento eletrônico.

Você deve mostrar a resolução completa de cada questão, de modo que as seguintes regras se aplicam:

- **Se você usar um teorema, deve enunciá-lo, e explicar porque pode ser usado.**
- **Organize seu trabalho**, usando o espaço fornecido para a solução de forma coerente. Trabalhos espalhados por todas as partes da folha sem uma ordem clara poderão ser penalizados.
- **Soluções sem justificativas não serão consideradas**. Podem ser atribuídos pontos parciais a cada questão, mesmo que a solução não seja completa.
- Se você precisar de mais espaço, use a parte de trás da folha, indicando explícitamente quando fizer isso.

Não escreva na tabela ao lado.

Questão	Ponto	Nota
1	2,0	
2	1,5	
3	2,0	
4	2,5	
5	2,0	
Total	10	

1. (2,0) Diga se as seguintes séries convergem (absolutamente ou condicionalmente) ou se divergem, justificando.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin^2(n) + 1)}{2\sqrt{n}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$

2. (1,5) Calcule o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+3)!}$ e calcule sua soma.

3. (2,0) Calcule o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}$ e analise a convergência da série nos extremos do intervalo de convergência.

4. (2,5) Considere a sequência de funções $g_n(x) = x + \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$.

   (a) Prove que a sequência de funções $\{g_n\}$ converge uniformemente à função $g(x) = x$ no intervalo $[0,1]$.

   (b) Prove que sequência de derivadas $\{g_n'\}$ converge pontualmente, no intervalo $[0,1]$, à função $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$. Conclua que $g' \neq \lim\limits_{n\to\infty} g_n'$.

   (c) Dada uma sequência de funções $\{f_n\}$ que converge uniformemente a f, qual condição sobre a convergência de $\{f_n'\}$ garantiria que $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$?

5. (2,0) Considere a função f dada por $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)x^k$, para cada $x \in (-1,1)$. Prove que, para todo $x \in (-1,1)$ vale que

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{1-x}.$$

Conclua que, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)x^k = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

Rascunho