Gabarito

1. (2,0) Diga se as seguintes séries convergem (absolutamente ou condicionalmente) ou se divergem, justificando.

   (a) (0,5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin^2(n)+1)}{2\sqrt{n}}$

   Solução: Vamos aplicar o teste da comparação. Para isso, observe que:

   $$\sin^2(n)+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{(\sin^2(n)+1)}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}.$$

   Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ diverge segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin^2(n)+1)}{2\sqrt{n}}$ diverge.

   (b) (1,5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$

   Solução: Primeiro veja que $\displaystyle\left|\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right| = \frac{1}{n\ln(n)}$. Defina $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ e veja que

   $$f'(x) = -\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$$

   que é negativo para todo $x>1$ e em particular para $x\geq 2$. Consequentemente, f é positiva e decrescente para todo $x\geq 2$ e podemos aplicar o teste da integral. Defina

   $$t_n = \int_2^n \frac{1}{x\ln x}dx$$

   Fazendo a substituição $u=\ln(x)$ obtemos

   $$t_n = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)}\frac{1}{u}du = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln 2).$$

   Logo, $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ e pelo teste da integral a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right|$ diverge.

   Para a convergência condicional, aplicaremos o teste de Leibniz. Já vimos que f é decrescente, logo $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ é decrescente. Além disso, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Portanto, pelo teste de Leibniz, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ converge. Logo a série converge condicionalmente.

2. (1,5) Calcule o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+3)!}$ e calcule sua soma.

Solução: Seja $a_n = \frac{1}{(n+3)!}$. Para obter o raio de convergência vamos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+3)!}}{\frac{1}{(n+4)!}} = \lim_{n\to+\infty} (n+4) = +\infty.$$

Isso implica que o o raio de convergência é infinito. Para calcular a soma da série vamos usar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = e^{x-a}$. Para colocar a série neste formato vamos fazer a substituição $k = n+3$, sendo assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+3)!} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x-2)^{k-3}}{k!}.$$

Agora, se $x \neq 2$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x-2)^{k-3}}{k!} &= \frac{1}{(x-2)^3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k!} = \frac{1}{(x-2)^3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k!} - \left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(x-2)^3} \left(e^{x-2} - \left(x - 1 + \frac{(x-2)^2}{2}\right)\right) = \frac{e^{x-2} - x + 1}{(x-2)^3} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+3)!} = \frac{e^{x-2} - x + 1}{(x-2)^3} + \frac{1}{2}, \text{ se } x \neq 2,$$

e para $x = 2$ a série é igual a $\frac{1}{6}$.

3. (2,0) Calcule o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}$ e analise a convergência da série nos extremos do intervalo de convergência.

Solução: Seja $a_n = \dfrac{1}{3n+2}$. Para obter o raio de convergência vamos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3n+2}}{\frac{1}{3(n+1)+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+5}{3n+2} = 1.$$

Como o limite existe então o raio de convergência r é igual ao valor do limite, ou seja, $r = 1$. Sendo assim, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2} x^n$ converge uniformemente em todo subintervalo fechado de $(-1, 1)$. No caso em que $x = 1$ temos que a série se reduz a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$. Vamos mostrar que essa série diverge. Primeiro note que $a_n = \dfrac{1}{3n+2} \geq 0$ e portanto podemos aplicar o teste da comparação no limite com $b_n = \dfrac{1}{n}$, e daí:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}.$$

Como a série harmônica diverge, segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ diverge.

Quando $x = -1$, temos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ e usaremos o teste de Leibniz. Veja que $a_n = \dfrac{1}{3n+2}$ é decrecente pois $3n+2 < 3(n+1)+2 = 3n+5$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim, $a_n = \dfrac{1}{3n+2} > \dfrac{1}{3n+5} = a_{n+1}$. Ademais, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n+2} = 0$, então a série converge para $x = -1$. Portanto a série converge no intervalo $[-1, 1)$

4. (2,5) Considere a sequência de funções $g_n(x) = x + \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$.

   (a) (1,0) Prove que a sequência de funções $\{g_n\}$ converge uniformemente à função $g(x) = x$ no intervalo $[0,1]$.

   Solução: Para mostrar que $\{g_n\}$ convergenge uniformemente para x em $[0,1]$ considere $\varepsilon > 0$ qualquer. Tome $N \in \mathbb{N}$ de modo que $N > \frac{1}{\varepsilon}$, assim para todo $x \in [0,1]$, temos

   $$|g_n(x) - x| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

   Como a escolha de N não depende de x, segue que $\{g_n\}$ converge uniformemente para x no intervalo $[0,1]$.

   (b) (1,0) Prove que sequência de derivadas $\{g'_n\}$ converge pontualmente, no intervalo $[0,1]$, à função $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$. Conclua que $g' \neq \lim\limits_{n\to\infty} g'_n$.

   Solução: Note que $g'_n(x) = 1 + x^{n-1}$. Como, para $x \in (0,1)$, temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n-1} = 0$ então $\lim g'_n(x) = 1$ para $x \in (0,1)$. Se $x = 0$, $g'_n(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e se $x = 1$, $g'_n(1) = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue que

   $$\lim_{n\to+\infty} g'_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases},$$

   como queríamos. Por fim, como $g(x) = x$, segue que $g'(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$, mas $\lim\limits_{n\to+\infty} g'_n(1) = 2 \neq 1 = g(1)$.

   (c) (0,5) Dada uma sequência de funções $\{f_n\}$ que converge uniformemente a f, qual condição sobre a convergência de $\{f'_n\}$ garantiria que $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$?

   Solução: Nas condições da questão, se $\{f'_n\}$ covergir uniformemente então $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n$. O que não é o caso da sequência $\{g_n\}$, uma vez que se $\{g'_n\}$ convergisse uniformemente então $\lim\limits_{n\to+\infty} g'_n$ deveria ser uma função contínua, o que não é o caso.

5. (2,0) Considere a função f dada por $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)x^k$, para cada $x \in (-1,1)$. Prove que, para todo $x \in (-1,1)$ vale que

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{1-x}.$$

Conclua que, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)x^k = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

Solução: Para obter o raio de convergência da série vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{k+1}{k+2} = 1.$$

Como o limite existe então o raio de convergência r é igual ao valor do limite, ou seja, $r = 1$. Assim a série converge uniformemente em cada intervalo fechado contido em $(-1,1)$. Daí podemos trocar o somatório com a integral nesse intervalo. Assim, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)t^k dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x (k+1)t^k dt = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k+1} = \frac{x^2}{1-x}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right),$$

e portanto

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)x^k = f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2},$$

como queríamos.