MA 311
1S 2016
Teste II
23/03/2016
Tempo Limite: 60 minutos

Nome: ____________________
RA: ____________________

Professora Anne Bronzi
PED: Charles Almeida

Este teste possui 5 páginas (incluindo a capa) e 4 problemas. Veja se o teste tem todas as páginas e preencha todas as informações a caneta. Coloque suas iniciais no topo de TODAS as páginas.

Você não pode usar nenhum material de consulta durante a prova, incluindo qualquer tipo de equipamento eletrônico.

Você deve mostrar a resolução completa de cada questão, de modo que as seguintes regras se aplicam:

- **Se você usar um teorema, deve enunciá-lo, e explicar porque pode ser usado.**
- **Organize seu trabalho**, usando o espaço fornecido para a solução de forma coerente. Trabalhos espalhados por todas as partes da folha sem uma ordem clara poderão ser penalizados.
- **Soluções sem justificativas não serão consideradas**. Podem ser atribuídos pontos parciais a cada questão, mesmo que a solução não seja completa.
- Se você precisar de mais espaço, use a parte de trás da folha, indicando explícitamente quando fizer isso.

Não escreva na tabela ao lado.

Questão	Ponto	Nota
1	5,0	
2	3,0	
3	2,0	
4	3,0	
Total	13,0	

1. (5,0) Diga se as seguintes séries convergem (absolutamente ou condicionalmente) ou se divergem, justificando.

   (a) (2,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

   (b) (3,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. (3,0) Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + n^2 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \right)$ é absolutamente convergente.

3. (2,0) Considere a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que

   (i) (1,0) $\{f_n\}_n$ converge pontualmente para a função identicamente nula em $[0,1]$,

   (ii) (1,0) $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

4. (3,0) Considere a mesma sequência da questão anterior, ou seja, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O objetivo desta questão é provar que $\{f_n\}_n$ não converge uniformemente para a função identicamente nula em $[0,1]$.

   (i) (0,5) Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor máximo de f_n no intervalo $[0,1]$ é atingido em $x = \frac{1}{n+1}$ e verifique que $f_n(\frac{1}{n+1}) = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$.

   (ii) (1,5) Prove que a sequência $\{f_n(\frac{1}{n+1})\}_n$ é crescente (Dica: Use a desigualdade de Bernoulli que diz que $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \geq -1$). Conclua que $f_n(\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) (1,0) Prove que $\{f_n\}_n$ não converge uniformemente para a função identicamente nula em $[0,1]$.