Abaixo vamos enunciar e demonstrar um resultado do livro "Cálculo Avançado", Vol II, Wilfred Kaplan (veja última página). Mas antes disso, vamos definir e enunciar algumas propriedades do limite superior e do limite inferior de uma sequência:

Definição 1. *Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Dizemos que L é o limite superior de $\{a_n\}_n$, e denotamos por $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$, se L for o maior número para o qual dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número infinito de índices n para os quais*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Analogamente, dizemos que l é o limite inferior de $\{a_n\}_n$, e denotamos por $l = \limsup_{n\to\infty} a_n$, se l for o menor número para o qual dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número infinito de índices n para os quais

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Pode-se mostrar que toda sequência limitada possui limite superior e limite inferior. No caso de sequência não limitadas o limite superior pode ser $\pm\infty$. Dizemos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se dado qualquer $K > 0$ existir um número infinito de índices n para os quais $a_n > K$. Analogamente, dizemos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ se dado qualquer $K > 0$ existir um número infinito de índices n para os quais $a_n < -K$. Pode-se mostrar que o limite superior ou existe ou é $\pm\infty$. O mesmo vale para o limite inferior com definições análogas. Além disso, temos que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

e a iguadalde só vale quando o limite da sequência existe e, neste caso, o limite será igual aos limites superior e inferior.

Teorema 2. *Seja $\sum a_n(x - x_0)^n$ uma série de potências. Então existe $r \geq 0$, chamado de raio de convergência, tal que para $|x - x_0| < r$ a série converge absolutamente e para $|x - x_0| > r$ a série diverge. No caso em que $r = 0$ a série converge para $x = x_0$ e diverge caso contrário. Se $r \neq 0$ então a série será uniformemente convergente em $|x - x_0| \leq r_1$, para qualquer $0 < r_1 < r$. Além disso, o raio de convergência pode ser determinado da seguinte forma:*

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ caso o limite exista, ou} \tag{1}$$

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ caso o limite exista.} \tag{2}$$

Demonstração. Suponha que o limite $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ exista e denote-o por r. Para provar a convergência absoluta de $\sum a_n(x-x_0)^n$ vamos usar o teste da razão. Para isso, observe que para todo $x \neq x_0$ temos que

$$\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-x_0| = \frac{|x-x_0|}{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$ segue que, se $r \neq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = \frac{|x-x_0|}{r}.$$

Portanto, pelo teste da razão concluímos que se $|x-x_0| < r$ a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente e se $|x-x_0| > r$ a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ diverge. Se $r = 0$ então a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ diverge para todo $x \neq x_0$ visto que $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = +\infty$. Além disso, se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty$ então a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ é absolutamente convergente todo x já que $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = 0$. No caso em que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existe a demonstração é análoga usando o teste da raíz. No caso geral o raio de convergência será $r = \limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Observe que, em particular, no caso em que os limites (1) e (2) existem eles coincidem com o valor $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Sabemos que $\limsup\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \inf\limits_{m\geq 1}\sup\limits_{n\geq m}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ e que o limite superior ou existe ou é $+\infty$. No caso em que o limite superior é $+\infty$, para cada $x \neq x_0$, tomando $K = 2|x-x_0|$ existem infinitos índices n para os quais

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} > A,$$

equivalentemente,

$$|a_n| < \frac{1}{A^n}.$$

Portanto,

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq \frac{|x-x_0|^n}{2^n|x-x_0|^n} = \frac{1}{2^n}, \text{ para um número infinito de índices } n,$$

disso segue que $\sum a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para todo x (argumente por contradição). Logo, o raio de convergência é $+\infty$.

No caso em que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ é finito denote este valor por r e observe que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|x-x_0|}{\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \frac{|x-x_0|}{r}.$$

Logo, se $|x-x_0| < r$ então

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1$$

e portanto, pelo definição de limite superior temos que dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe um número infinito de índices n para os quais

$$\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1-\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Portanto, para número infinito de índices n temos que

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{1}{2^n}$$

donde segue que a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ é absolutamente convergente.

Para o caso em que $|x-x_0| > r$ temos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > 1.$$

Defina $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}$ e observe que pela definição de limite superior dado $\varepsilon = L-1 > 0$ existe um número infinito de índices n para os quais

$$\left| \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} - L \right| < \varepsilon,$$

ou seja, $\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > L-\varepsilon = 1$. Em outras palavras, existem infinitos índices para os quais $|a_n(x-x_0)^n| > 1$ e portanto a sequência $\{|a_n(x-x_0)^n|\}_n$ não converge a zero. Disso segue que a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ diverge.

Por fim, vamos provar que se $r \neq 0$ então a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ será uniformemente convergente em $|x-x_0| \leq r_1$, para qualquer $0 < r_1 < r$. De fato, para qualquer $0 < r_1 < r$ tome $x = x_0 + r_1$. Como a série $\sum a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para todo $|x-x_0| < r$ então a série $\sum a_n((x_0+r_1)-x_0)^n = \sum a_n r_1^n$ converge absolutamente. Além disso, note que para todo $|x-x_0| < r_1$ temos que

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r_1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o teste M de Weierstrass implica na convergência uniforme da série $\sum a_n(x-x_0)^n$ em $|x-x_0| < r_1$, para todo $0 < r_1 < r$. $\square$

que há um excesso de tais valores; mais especificamente, há mais de um valor-limite.

No caso de tais seqüências limitadas, são do maior interesse o maior e o menor valor de limite, que são chamados *limite superior* e *limite inferior* da seqüência s_n. Define-se o limite superior como

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = k$$

se, para todo ε positivo, temos

$$|s_n - k| < \varepsilon$$

para infinitos valores de n e se nenhum número maior que k goza dessa propriedade. Define-se o limite inferior de modo análogo:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = h$$

se, para todo ε positivo, temos

$$|s_n - h| < \varepsilon$$

para infinitos valores de n e se nenhum número menor que h goza dessa propriedade. Teorema: *toda seqüência limitada possui um limite superior e um limite inferior;* a demonstração é análoga à do Teorema 1.

Exemplos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n = -1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\operatorname{sen}(\tfrac{1}{3}n\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\operatorname{sen}(\tfrac{1}{3}n\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n(1 + 1/n) = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n(1 + 1/n) = -1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\operatorname{sen} n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\operatorname{sen} n = -1.$$

Convém verificar esses resultados por meio de representações gráficas das seqüências, como as da Fig. 6-1. As demonstrações não são difíceis, salvo nos dois últimos casos, que são bastante sutis.

As definições de limite superior e limite inferior podem ser generalizadas para seqüências não-limitadas. Nesse caso, ∞ e $-\infty$ devem ser considerados como possíveis "valores de limite"; assim sendo, ∞ é um valor de limite se, para todo número K, vale $s_n > K$ para infinitos n; $-\infty$ é um valor de limite se, para todo número K, $s_n < K$ para infinitos n. Define-se então o limite superior como sendo o "maior valor de limite" e o limite inferior como sendo o "menor valor de limite".

Exemplos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n n = \infty, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n n = -\infty,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2 \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{2}n\pi) = \infty, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2 \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{2}n\pi) = 0.$$

Nessas condições, toda seqüência terá um limite superior e um limite inferior. Deve-se observar que, quando $\lim s_n = -\infty$, os limites superior e inferior são ambos $-\infty$. O limite inferior não pode superar o limite superior.

Teorema 3. *Se a seqüência s_n convergir para s, então*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s;$$

reciprocamente, se o limite superior e o limite inferior forem iguais e finitos, a seqüência convergirá.

A primeira parte do teorema decorre da definição de convergência, pois o limite s satisfaz a todas as condições, tanto as do limite superior como as do limite inferior. Se os limites superior e inferior forem ambos finitos e iguais a s, a seqüência será, necessariamente, limitada, pois, do contrário, o limite superior seria $+\infty$ ou o limite inferior seria $-\infty$. Se s_n não convergisse para s, então, para algum ε, haveria infinitos termos da seqüência tais que $|s_n - s| > \varepsilon$. Podemos então proceder como na demonstração do Teorema 1 para exibir um valor de limite k diferente de s. Isso contradiria o fato de s ser o maior e o menor valor de limite.

6-4. PROPRIEDADES ADICIONAIS DE SEQÜÊNCIAS. Vejamos primeiro algumas relações entre seqüências e continuidade de funções.

Teorema 4. *Seja $y = f(x)$ uma função definida para $a \leqq x \leqq b$. Se $f(x)$ for contínua em x_0, então*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

para toda seqüência x_n no intervalo convergindo para x_0. Analogamente, se $f(x, y)$ for definida num domínio D e for contínua em (x_0, y_0), então

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$$

para todas as seqüências x_n, y_n tais que (x_n, y_n) pertencem a D, x_n converge para x_0, e y_n converge para y_0.

Demonstramos o resultado para $f(x)$, sendo análoga a prova para uma função de duas (ou mais) variáveis. Dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um δ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $|x - x_0| < \delta$; isso é simplesmente a definição de continuidade. Podemos então escolher N de modo tal que $|x_n - x_0| < \delta$

tituição $t = x - a$ ou $t = 1/x$, podemos reduzir uma série da forma (6-36) ou da forma (6-37) à forma (6-35).

A série de potências (6-36) converge quando $x = a$. Pode acontecer que seja esse o único valor de x para o qual a série converge. Quando há outros valores de x que tornam a série convergente, veremos que eles formam um intervalo, o "intervalo de convergência", cujo ponto médio é $x = a$. A Fig. 6-11 ilustra isso. O intervalo pode ser infinito. O teorema fundamental que segue resume essas propriedades.

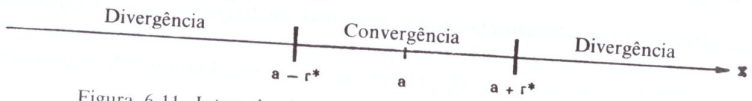

Figura 6-11. Intervalo de convergência de uma série de potências

Teorema 35. *Toda série de potências*

$$c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

tem um "raio de convergência" r^* tal que a série converge absolutamente quando $|x-a| < r^*$ e diverge quando $|x-a| > r^*$.

O número r^* pode ser 0 (no qual caso a série converge somente quando $x = a$), um número positivo, ou ∞ (no qual caso a série converge para todo x).

Se r^* não for nulo e r_1 for tal que $0 < r_1 < r^*$, então a série convergirá uniformemente em $|x-a| \leqq r_1$.

O número r^* pode ser determinado do seguinte modo:

$$r^* = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \text{ desde que o limite exista,} \tag{6-38}$$

ou

$$r^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \text{ desde que o limite exista,} \tag{6-39}$$

e, em todos os casos, pela fórmula:

$$r^* = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{6-40}$$

Demonstração. Consideremos primeiro o caso no qual o limite (6-38) existe, pois ele sugere de imediato o caso geral. Aplicando o critério da razão à série dada, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot |x-a|$$

$$= \frac{|x-a|}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|} = \frac{|x-a|}{r^*}.$$

A série converge absolutamente quando

$$\frac{|x-a|}{r^*} < 1, \quad \text{isto é,} \quad |x-a| < r^*$$

e diverge quando

$$\frac{|x-a|}{r^*} > 1, \quad \text{isto é,} \quad |x-a| > r^*.$$

Se $r^* = 0$, o critério mostra que a série diverge, salvo se $x = a$. Se $r^* = \infty$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 0,$$

o critério mostra que a série converge absolutamente para todo x.

Quando existe o limite (6-39), procedemos de modo análogo usando o critério da raiz. Esse caso está incluído na fórmula final (6-40), que segue imediatamente do Teorema 21(a) da Sec. 6-8, pois

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} (\sqrt{|c_n|} \cdot |x-a|) = (\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{|c_n|}) \cdot |x-a|.$$

A série converge absolutamente quando o limite superior é menor que 1, isto é, quando

$$|x-a| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt{|c_n|}} = r^*,$$

e diverge se $|x-a| > r^*$.

Portanto, qualquer que seja o método de determinação, existe um número r^*, $0 \leqq r^* \leqq \infty$, com as propriedades descritas. Resta provar que, se $0 < r_1 < r^*$, a série converge uniformemente em $|x-a| \leqq r_1$. Isso segue do critério M, tomando-se $M_n = |c_n| r_1^n$, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \, |x_1 - a|^n, \qquad x_1 = a + r_1,$$

e essa série converge, visto que $|x_1 - a| = r_1 < r^*$. Se $|x-a| \leqq r_1$, então

$$|c_n| \, |x-a|^n \leqq |c_n| r_1^n = M_n,$$

de sorte que a convergência é uniforme. Já mencionamos a idéia principal desta demonstração na Sec. 6-12: a rapidez de convergência para uma série de potências é menor na vizinhança dos *extremos* do intervalo de convergência.

Destacamos ainda que, quando r^* é um número positivo finito, a série pode convergir ou divergir em cada um dos valores extremos $x = a + r^*$, $x = a - r^*$. Esses valores devem ser estudados separadamente, para cada série.