para todo $x \geqslant 0$. Logo, h é crescente em $[0, +\infty[$. Segue que, para todo $x \in [0, r]$,

$$0 \leqslant x - n \operatorname{sen} \frac{x}{n} \leqslant r - n \operatorname{sen} \frac{r}{n}.$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} \left(r - n \operatorname{sen} \frac{r}{n} \right) = 0$$

dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| r - n \operatorname{sen} \frac{r}{n} \right| < \epsilon.$$

Segue que, para todo $x \in [-r, r]$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| x - n \operatorname{sen} \frac{x}{n} \right| < \epsilon.$$

Portanto, a sequência converge uniformemente a $f(x) = x$ em $[-r, r]$. (Tente enxergar este fato graficamente.) ■

Exercícios 6.2

1. Para cada $n \geqslant 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2}$.

   a) Determine o domínio da função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   b) Esboce os gráficos de f e das f_n.

   c) f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformemente a f em $]0, +\infty[$? E em $[1, +\infty[$?

2. Para cada $n \geqslant 1$, seja $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

   a) Qual o domínio da função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   b) A sequência f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformemente a f em $[0, 1[$? E em $[0, r]$, com $0 < r < 1$?

3. Para cada $n \geqslant 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2 + 1}$.

   a) Determine o domínio da função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   b) Esboce os gráficos de f e das f_n.

   c) A sequência f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformemente a f em $]0, +\infty[$? E em $[\frac{1}{2}, +\infty[$?

4. Para cada $n \geqslant 1$, seja $f_n(x) = n \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{n}$.

   a) Determine o domínio da função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   b) Mostre que f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformemente a f em $[-r, r]$, onde $r > 0$ é um real dado.
   c) Mostre que a sequência f_n não converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$.

5. Para cada $n \geqslant 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^2 + 1}$. Considere a função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   a) Esboce os gráficos de f e das f_n.
   b) f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$? E em $[\alpha, +\infty[$, com $\alpha > 0$?

6. Para cada $n \geqslant 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^4}$. Considere a função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   a) Esboce os gráficos de f e das f_n.
   b) f_n converge uniformemente a f em $[0, 1]$? Justifique.

   (*Sugestão*: Verifique que o valor máximo de f_n em $[0, 1]$ tende a $+\infty$ quando n tende a $+\infty$.)

   c) Verifique que
   $$\int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx \neq \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

7. Mesmo exercício que o anterior onde f_n, $n \geqslant 1$, é dada por $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

6.3. Continuidade, Integrabilidade e Derivabilidade de Função Dada como Limite de Uma Sequência de Funções

As demonstrações dos teoremas que enunciaremos a seguir serão feitas na Seção 6.5. Consideremos a sequência de funções $f_n(x) = x^n$. Já vimos que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$