Gabarito

1. (5,0) Diga se as seguintes séries convergem (absolutamente ou condicionalmente) ou se divergem, justificando.

   (a) (2,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

   Solução: Observe que a sequência $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_n$ é decrescente já que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Portanto, pela regra de Leibniz concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente. No entanto, ao analisarmos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ vemos que seu termo geral satisfaz a desigualdade $\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ também diverge. Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ é condicionalmente convergente.

   (b) (3,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$.

   Solução: Como visto no exercício anterior temos que a sequência $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_n$ é decrescente e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Além disso, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ é convergente pois é uma série telescópica $\sum(b_n - b_{n+1})$ onde $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge a zero para $n \to \infty$. Consequentemente, a sequência das somas parciais da série $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ é limitada e portanto, pelo teste de Dirichlet, obtemos a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$. Por fim, observe que $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ é absolutamente convergente.

2. (3,0) Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right)$ é absolutamente convergente.

Solução: Vamos considerar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem 4 (isso será suficiente) da função $f(x)=\cos(x)$ no intervalo $[0,y]$, ou seja, temos que existe $\theta_y \in (0,y)$ tal que

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{\cos(\theta_y)}{4!}y^4.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, tome $y = \frac{1}{n}$ na expressão acima. Dessa forma temos que existe $\theta_n \in (0, \frac{1}{n})$ tal que

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!} + \frac{\cos(\theta_n)}{4!}\left(\frac{1}{n}\right)^4.$$

Multiplicando a equação acima por n^2 e rearranjando os termos chegamos que

$$\frac{1}{2}+n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = \frac{\cos(\theta_n)}{4!}\frac{1}{n^2}$$

Como $\frac{1}{n} \leq 1$ e a função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ então $0 < \cos(1) \leq \cos(\theta_n) \leq \cos(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$0 < \frac{1}{2}+n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = \frac{\cos(\theta_n)}{4!}\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4!}\frac{1}{n^2}.$$

Pelo critério de comparação, como a série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, então $\sum\left(\frac{1}{2}+n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right)$ converge. Além disso, como os termos da série são positivos então a convergência é absoluta.

3. (2,0) Considere a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que

   (i) (1,0) $\{f_n\}_n$ converge pontualmente para a função identicamente nula em $[0,1]$,

   (ii) (1,0) $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

   Solução: Para demonstrar o item (i) observe que $f_n(x) = 0$, para $x = 0$ e $x = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 1$. Para provar a convergência pontual de $\{f_n(x)\}_n$ nos pontos $x \in (0,1)$ vamos primeiro provar que a série $\sum f_n(x)$ é convergente, para cada $x \in (0,1)$, visto que disso seguirá que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, para todo $x \in (0,1)$. Para mostrar a convergência da série vamos aplicar o teste da razão. Observe que

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)x(1-x)^{n+1}}{nx(1-x)^n} = \frac{(n+1)(1-x)}{n}.$$

   Portanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 - x$ e como $x \in (0,1)$ temos que $1 - x < 1$ e portanto a série $\sum f_n(x)$ converge pelo teste da razão.

   Para provar (ii) observe que como f_n converge pontualmente a 0 então $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$. Por outro lado, fazendo integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx(1-x)^n dx &= nx\frac{(-1)(1-x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 n\frac{(-1)(1-x)^{n+1}}{n+1}dx \\ &= 0 - n\frac{(-1)^2(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Bigg|_0^1 = \frac{n}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

   Por fim, como $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0$ concluímos que

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

4. (3,0) Considere a mesma sequência da questão anterior, ou seja, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O objetivo desta questão é provar que $\{f_n\}_n$ não converge uniformemente para a função identicamente nula em $[0,1]$.

   (i) (0,5) Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor máximo de f_n no intervalo $[0,1]$ é atingido em $x = \frac{1}{n+1}$ e verifique que $f_n(\frac{1}{n+1}) = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$.

   (ii) (1,5) Prove que a sequência $\{f_n(\frac{1}{n+1})\}_n$ é crescente (Dica: Use a desigualdade de Bernoulli que diz que $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \geq -1$). Conclua que $f_n(\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) (1,0) Prove que $\{f_n\}_n$ não converge uniformemente para a função identicamente nula em $[0,1]$.

Solução:

(i) Como a função $f_n(x) \geq 0$ no intervalo $[0,1]$ e $f_n(0) = 0 = f_n(1)$ então o ponto de máximo é atingido em $(0,1)$. Sendo assim, os pontos de máximo são aqueles que anulam a derivada. Pela regra do produto temos que

$$f_n'(x) = n(1-x)^n + nxn(1-x)^{n-1}(-1) = n(1-x)^{n-1}((1-x) - nx),$$

consequentemente o único ponto que anula a derivada e pertence ao intervalo $(0,1)$ é $x = \frac{1}{n+1}$. Por fim, é claro que

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n\frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

(ii) Para provar que a sequência $\left\{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}_n$ é crescente basta mostrar que

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \geq 1, \text{ para todo } n \geq 2. \tag{1}$$

Observe que

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Sendo assim, a desigualdade (1) é equivalente a

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \frac{n+1}{n}.$$

Pela desigualdade de Bernoulli temos que

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n^2-1}.$$

Observe que
$$1+n\frac{1}{n^2-1}=1+\frac{1}{n-\frac{1}{n}}\geq 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$$
então
$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\geq\frac{n+1}{n},$$
o que prova (1).

Por fim, como a sequência $f_n(\frac{1}{n+1})$ é crescente então $f_n(\frac{1}{n+1})\geq f_1(\frac{1}{1+1})=\frac{1}{4}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

(iii) Vamos provar que existe $\varepsilon_0>0$ para o qual dado qualquer $n\in\mathbb{N}$ existe $x\in[0,1]$ (que depende de n) tal que $|f_n(x)-0|\geq\varepsilon_0$. Observe que isso implica que f_n não converge uniformemente a 0 já que para isso precisaríamos ter, em particular, que dado este ε_0 existisse $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ e para todo $x\in[0,1]$ valesse que $|f_n(x)-0|<\varepsilon$. Tome $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ e observe que, dado $n\in\mathbb{N}$, podemos tomar $x=\frac{1}{n+1}$ para obter
$$|f_n(x)-0|=f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\geq\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$
como queríamos.