Gabarito

1. (3,0) Diga se as seguintes séries convergem ou divergem, justificando.

   (a) (1,5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$.

   Solução: Vamos aplicar o teste da razão. Para isso, observe que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2+2^{n+1}}{(n+1)^3+3^{n+1}}}{\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}} = \left(\frac{(n+1)^2+2^{n+1}}{n^2+2^n}\right)\left(\frac{n^3+3^n}{(n+1)^3+3^{n+1}}\right) = \left(\frac{\frac{(n+1)^2}{2^n}+2}{\frac{n^2}{2^n}+1}\right)\left(\frac{\frac{n^3}{3^n}+1}{\frac{(n+1)^3}{3^n}+3}\right).$$

   Note ainda que para quaisquer números reais positivos α e β vale que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\beta^n} = 0$. De fato, aplicando L'Hôpital m vezes, onde m é o menor natural maior ou igual a α, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m)n^{\alpha-m}}{(\ln\beta)^m\beta^n} = 0.$$

   Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)^2}{2^n}+2}{\frac{n^2}{2^n}+1}\right)\left(\frac{\frac{n^3}{3^n}+1}{\frac{(n+1)^3}{3^n}+3}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

   Pelo teste da razão concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$ converge.

   (b) (1,5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^{3n+1}}$.

   Solução 1: É natural tentar aplicar o teste da raíz. Para facilitar vamos trabalhar com a série $\displaystyle\sum\frac{n^n}{3^{3n}}$ já que a convergência (respectivamente, divergência) desta série implica na convergência (respectivamente, divergência) da série dada na questão.

   Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{3n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^3} = +\infty.$$

   Disso segue que o termo geral da série não converge a zero e portanto a série é divergente. De fato, dado $M=1$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{3n}}} > M = 1$ para todo $n\geq N$. Logo, $\frac{n^n}{3^{3n}} > 1$, para todo $n \geq N$, e portanto não pode convergir a zero.

   Solução 2: Bastava observar que para todo $n \geq 3^3$ temos que $\frac{n^n}{3^{3n+1}} \geq \frac{(3^3)^n}{3^{3n+1}} = \frac{1}{3}$ logo o termo geral da série não converge a zero e isso implica que a série diverge.

2. (4,5) Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando ou dando contra-exemplo:

   i) (1,5) Existem duas sequências de números reais (a_n) e (b_n), tais que a_n é limitada, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pi^2$.

   Solução: A afirmação é falsa pois para quaisquer sequências (a_n) e (b_n) tais que (a_n) é limitada e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ vale que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. De fato, como (a_n) é limitada existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$. Portanto, $0 \leq |a_n b_n| \leq M|b_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

   ii) (1,5) Toda sequência limitada de números reais converge.

   Solução: A afirmação é falsa, basta observar que a sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada mas não converge.

   iii) (1,5) Para toda sequência de números reais (a_n), tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ é convergente.

   Solução: A afirmação é falsa, basta tomar $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. É claro que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mas $\sum a_n^2$ diverge pois é a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$.

3. (2,5) Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ para $\alpha > 0$.

Solução: Primeiro observe que $\ln(x) \geq 1$ para todo $x \geq e$. Portanto,

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} < \frac{1}{n^\alpha}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Pelo Teste da Integral, temos que a série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge para todo $\alpha > 1$ e consequentemente a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ também convirgirá para $\alpha > 1$. (1,0)

Vamos tratar o caso $\alpha = 1$. Temos que a função $f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)}$ está definida para todo $x \geq 3$, é positiva e decrescente já que $f'(x) = -\dfrac{1}{(x \ln(x))^2}(\ln x + 1) < 0$, para todo $x \geq 3$. Além disso, fazendo a substituição $u = \ln(x)$ obtemos

$$\int_3^n f(x)dx = \int_3^n \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_{\ln(3)}^{\ln(n)} \frac{1}{u} du = \ln(u)|_{\ln(3)}^{\ln(n)} = \ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(3)}\right).$$

Portanto, a sequência $t_n := \int_3^n \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(3)}\right)$ é divergente. Sendo assim, pelo Teste da Integral temos que a série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ é divergente.(0,5)

Por fim, temos que analisar o caso $0 < \alpha < 1$. Observe que neste caso $n^\alpha < n$ e portanto $\frac{1}{n \ln(n)} < \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$. Já vimos que a série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ é divergente, logo, pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ também será divergente.(1,0)

4. (2,0) Dizemos que uma série $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{i=0}^{\infty} |a_n|$ converge. Mostre que, se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ converge. (Sugestão: Se (b_n) é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ temos $b_n < 1$)

   Solução: Como por hipótese $\sum b_n$ é absolutamente convergente então $\sum |b_n|$ converge. Disso segue que $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$ e portanto dado $\varepsilon = 1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < 1$, para todo $n \geq N$. Logo, $b_n^2 = |b_n||b_n| \leq |b_n|$, para todo $n \geq N$. Pelo Critério da Comparação, como $\sum |b_n|$ converge e $0 \leq b_n^2 \leq |b_n|$, para todo $n \geq N$, segue que $\sum b_n^2$ também converge.