$1^{\underline{a}}$ Prova de MM 425 - Análise Funcional

Prof$^{\underline{a}}$ Anne Bronzi

29/04/2015

Nome:____ RA:______________

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	TOTAL
NOTA						

1. Sejam M e N subespaços fechados de um espaço vetorial normado X. Prove que se $M \neq N$ então $M^{\perp} \neq N^{\perp}$.

2. Seja X um espaço de Banach e $T : X \to X^*$ um operador linear satisfazendo a seguinte relação:
$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle, \forall x, y \in X.$$
Prove que T é um operador limitado.

3. Considere o operador $A : D(A) \subset l_1 \to l_1$ definido por
$$D(A) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1 : (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1\} \text{ e } Ax = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Prove que A é densamente definido e fechado. Determine $R(A)^{\perp}$ e $N(A^*)$.

4. Sejam X e Y espaços de Banach. Considere $\mathcal{F}$ uma família de operadores lineares contínuos de X em Y, ou seja, $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

   (i) $\mathcal{F}$ é equicontínua.

   (ii) $\mathcal{F}$ é equicontínua em $x = 0$.

   (iii) existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leq M$ para todo $T \in \mathcal{F}$.

   (Lembre que uma família $\mathcal{F}$ é equicontínua em $x_0 \in X$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $\|x - x_0\| < \delta$ tem-se que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ para toda $T \in \mathcal{F}$.)

5. Seja X um espaço de Banach e $K \subset X$ um subconjunto compacto na topologia forte. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em K tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca. Prove que $x_n \to x$ na topologia forte.