$2^{\underline{a}}$ Prova de MM 425 - Análise Funcional

Prof$^{\underline{a}}$ Anne Bronzi

26/06/2015

Nome:____ RA:______________

	Q1	Q2	Q3	Q4	TOTAL
NOTA					

1. Demonstre as seguintes afirmações ou exiba um contra-exemplo:

   (i) Seja X um espaço de Banach separável. Então X^* é separável.

   (ii) Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$ um subespaço vetorial fechado. Então M é reflexivo.

   (iii) Sejam H um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em H. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco a x se e somente se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente fraco-$*$ a x.

   (iv) O operador identidade é sempre compacto em espaços de Banach.

2. Seja $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ um operador definido por

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds,$$

   onde o núcleo $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ pertence a $L^2([0,1] \times [0,1])$. Prove que T é compacto.

3. Seja $T : l^2 \to l^2$ um operador definido por

$$T((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right).$$

   Prove que T é compacto e autoadjunto e determine os espectros pontual, contínuo e residual de T.

4. Sejam H um espaço de Hilbert e $\{e_n\}_n$ um sistema ortonormal completo em H. Prove que

   (i) Para cada $x \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. (Dica: Primeiro prove a desigualdade para as somas parciais, ou seja, $\sum_{n=1}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.)

   (ii) A sequência $(e_n)_n$ converge fracamente a zero.