LISTA 4
MM 425 - 1º SEMESTRE 2015

Exercícios que devem ser entregues até o dia 22 de Junho: $4, 11, 18, 21$ e os seguintes exercícios do Brezis: $6.17, 6.24(item 1)$.

(1) Seja X um espaço vetorial com produto interno e seja A um conjunto ortonormal em X. Prove que A é completo se e somente se vale que

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle, \forall x \in A \Rightarrow y = z.$$

(2) Sejam H um espaço de Hilbert, $A = \{x_n \in H : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal e $\{\alpha_n\}_n$ uma sequência em $\mathbb{K}$. Prove que
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty$.
   (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge a x então $\alpha_n = \langle x, x_n\rangle$.

(3) (Processo de Gram-Schmidt) Seja $\{x_n\}_n$ uma sequência de vetores linearmente independentes em um espaço vetorial com produto interno. Defina indutivamente os vetores

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|},\ e_n = \frac{f_m}{\|f_n\|},\ \text{onde } f_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j\rangle e_j,\ \text{para } n \geq 2.$$

Prove que $\{e_n\}_n$ é um conjunto ortonormal e que este conjunto gera o mesmo espaço que $\{x_n\}_n$.

(4) Aplique o Processo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\} \subset L^2([-1, 1])$. Utilize sua resposta para calcular a distância de x^3 ao espaço $\langle\{1, x, x^2\}\rangle$, ou seja, encontre

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^{1} |x^3 - (a + bx + cx^2)|^2 dx.$$

(5) Seja K um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert H real. Prove que a projeção P_K não aumenta distânica, ou seja,

$$\|P_K f - P_K g\| \leq \|f - g\|, \quad \forall f, g \in H.$$

No caso em que H é um espaço de Hilbert complexo temos que o mesmo resultado é válido com a hipótese adicional de que K é um subespaço vetorial.

(6) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável e $M = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N) : f(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega^c\}$. Prove que a projeção de $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ em M é dada por $P_M f = \chi_\Omega f$.

(7) Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Então H é separável se e somente se possui um sistema ortonormal completo enumerável.

(8) Seja I um conjunto não-enumerável. Seja λ a medida contagem definida na σ-álgebra $\mathcal{P}(I)$ composta por todos subconjuntos de I. Logo, $(I, \mathcal{P}(I), \lambda)$ é um espaço de medida e podemos considerar o espaço $H = L^2(I, \lambda)$. Prove que H é um espaço de Hilbert não-separável.

(9) Prove que toda projeção ortogonal sobre subespaços fechados de um espaço de Hilbert é um operador autoadjunto.

(10) Seja $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ um operador definido por

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1].$$

Prove que T é um operador linear contínuo e que o adjunto $T^* : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ de T é dado por

$$T^*g(x) = \int_x^1 g(t)dt, \forall x \in [0,1].$$

(11) Seja $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ um operador definido por

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds,$$

onde o núcleo $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ pertence a $L^2([0,1] \times [0,1])$. Prove que T é compacto.

(12) Sejam X e Y espaços de Banach. Prove que se $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ então $x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \to Tx$. Além disso, prove que se X for reflexivo então a recíproca é verdadeira.

(13) Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in \mathcal{B}(H)$. Então T é compacto se e somente se T^* é compacto.

(14) Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Prove que $R(T)$ e $N(T)^\perp$ são subespaços separáveis de H_2 e H_1, respectivamente.

(15) Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(H)$ um operador autoadjunto. Prove que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T.

(16) Dada uma sequência $\{\alpha_n\}_n$ tal que $\alpha_n \to 0$, prove que existe um operador linear compacto T tal que $\sigma(T) = \{\alpha_n\}_n \cup \{0\}$. Sob quais condições este operador é autoadjunto?

(17) Sejam H um espaço de Hilbert, $K \in \mathcal{K}(H)$ e $\{T_n\}_n \subset \mathcal{B}(H)$ tal que para cada $x \in H$ temos $T_n(x) \to T(x)$, onde $T \in \mathcal{B}(H)$. Prove que $T_n K \to TK$ fortemente.

(18) Seja $S_r : l_2 \to l_2$ o operador translação à direita (*right shift*) definido como $S_r(x) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$.

(a) Prove que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| \leq 1$ então $S_r - \lambda I$ não é sobrejetor e conclua que
$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(S_r).$$

(b) Prove que $\|S_r\| = 1$ e conclua que
$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \sigma(S_r).$$

(c) S_r é autoadjunto? E compacto?

(19) Seja $X = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ o espaço das funções contínuas $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Calcule os autovalores e autovetores da aplicação $T : X \to X$ dada por
$$(Tf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t + x) f(t) dt.$$

(20) Seja $T : D(T) \subset (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ definido por $T(f) = f'$ onde $D(T) = \mathcal{C}^1([0,1])$. Prove que T é um operador linear densamente definido. Além disso, prove que $\lambda \in \sigma_p(T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Em particular, $\rho(T) = \emptyset$.

(21) Seja $T : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ dado por $T(f)(t) = tf(t)$. Prove que $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_r(T)$.

(22) Resolva os seguinte exercícios do livro do Brezis: $5.1, 5.2, 5.15, 5.16, 5.17, 5.19, 5.20, 5.26, 6.1,$ $6.2, 6.3, 6.4, 6.7, 6.8, 6.12, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20$ e 6.24.